ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLI (2005)

TERESA LEDWINA (Wrocław)

O pewnych testach statystycznych i ich porównywaniu

Probabilistyka konstruuje i bada modele zjawisk losowych. Statystyka stara się odpowiedzieć na pytanie, jaki model probabilistyczny i na ile dobrze opisuje obserwowane zjawisko.

Jednym z kilku głównych działów statystyki jest teoria testów. Zanim wprowadzimy formalnie rozważane przez nas zagadnienie testowania i pojęcie testu, przedstawimy nieco informacji na temat najwcześniejszych prac próbujących rozstrzygnąć czy dany model „pasuje" do danych. Rozwiązaniom starszym i mniej popularnym w środowisku matematyków oraz ich autorom poświęcimy nieco więcej uwagi, niż tym dobrze znanym choćby z prac probabilistycznych.

1. Konstrukcje testów

1.1. *Od J. Arbuthnotta do K. Pearsona.* Za pierwszą pracę z omawianej dziedziny uważa się notkę J. Arbuthnotta [1]. Reprint tej pracy znaleźć można w książce Kendalla i Placketta [34] na str. 30–34. Ciekawe komentarze o tej publikacji zawarto w powyższej książce na str. 35–37 oraz w książce S. Stiglera [64] na str. 225–226. Nadmieńmy również, że ta krótka notka J. Arbuthnotta jest uznawana za jeden z milowych kamieni w rozwoju statystyki (por. Kotz i Johnson [36] str. viii–ix). Arbuthnott opublikował w niej liczby noworodków płci męskiej i żeńskiej ochrzczonych w Londynie w latach 1629–1710. Dane te pokazują, że we wszystkich osiemdziesięciu dwóch latach ujętych w jego wykazie, liczby noworodków chłopców są większe od liczb dziewczynek. Przyjmując założenie, że zdarzenie losowe ma szansę wynoszącą 1/2, autor wywnioskował stąd, że szansa na to, że w kolejnych 82 latach urodzi się więcej chłopców niż dziewczynek wynosi $(1/2)^{82}$. Nie negując stochastycznego charakteru samego procesu pojawiania się typu płci, autor konkluduje, że tak małe prawdopodobieństwo zaobserwowania uzyskanego wyniku wyklucza losowość (w powyższym rozumieniu). Jednocześnie autor stwierdza, że chłopcy wiodą bardziej ryzykowne życie i nieco większa liczba męskich noworodków gwarantuje równą proporcję płci w wieku

dojrzałym. To z kolei jest warunkiem monogamii, zgodnej z prawem naturalnym. Ostateczny wniosek jest taki, że wykazany brak losowości wskazuje na istnienie Boskiej Opatrzności. Niejako na usprawiedliwienie autora dodajmy, że poglądy na to, że rozmaite „regularności" zdarzeń losowych są przejawem boskiego porządku, nie były w osiemnastym wieku rzadkością. Nadmieńmy również, że Arbuthnott był lekarzem i znanym satyrykiem. Dla zarobku przetłumaczył na język angielski i nawet nieco uzupełnił probabilistyczny traktat Huyghensa [15]. To tłumaczenie było pierwszą pracą o prawdopodobieństwie opublikowaną w języku angielskim.

W następnych dwóch stuleciach pojawiło się zaledwie kilka dalszych prób orzekania o zgodności modelu probabilistycznego z obserwacjami. E. Lehmann [43] str. 126, wymienia w tym kontekście prace D. Bernoulliego [4], P. Laplace'a [39], J. Gavarreta [14], W. Lexisa [44], [45] i F. Edgewortha [12].

Następną przełomową pracą, która zapoczątkowała powszechne stosowanie testów była praca K. Pearsona z 1900 r. (patrz [58] i [37]). K. Pearson miał wszechstronne wykształcenie. Oprócz matematyki studiował prawo, fizykę, biologię, filozofię i średniowieczny język niemiecki. Od 1884 r. K. Pearson pracował jako profesor matematyki stosowanej i mechaniki w University College w Londynie. Początkowo jego zainteresowania i publikacje koncentrowały się na filozofii, religii i sztuce. Spotkanie w 1890 r. zoologa W. Weldona i dyskusje z nim zaowocowały założeniem w 1901 r. znakomitego czasopisma *Biometrika* i pracami K. Pearsona drukowanymi w latach 1893–1905 między innymi w rozprawach o matematycznej teorii ewolucji. W szczególności, około roku 1900 K. Pearson zajął się problemem weryfikowania zgodności rozkładu obserwacji z zadanym rozkładem. Wspomniana wyżej praca zawiera właśnie rozwiązanie tego problemu. Przedstawimy je w zastosowaniu do jednego konkretnego modelu, który będzie nam również służył jako ilustracja w dalszej części tego opracowania. Opis poprzedzamy wprowadzeniem niezbędnych oznaczeń.

1.1.1. Podstawowe oznaczenia. Przypuśćmy, że w wyniku pomiarów pewnej cechy w populacji otrzymaliśmy n liczb $y_1, \ldots, y_n$. Będziemy się ograniczać do sytuacji, gdy pomiary są dokonywane w sposób gwarantujący, że $y_1, \ldots, y_n$ mogą być interpretowane jako wartości niezależnych zmiennych losowych $Y_1, \ldots, Y_n$ o jednakowym rozkładzie. Oznaczmy przez G dystrybuantę zmiennej losowej Y_i, $i = 1, \ldots, n$. Jeśli Y_i jest określona na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, to $G(y) = P(Y_i \leq y)$, $y \in R$. Skrótowo będziemy pisać $Y_i \sim G$ i oznaczać przez P_G łączny rozkład $Y_1, \ldots, Y_n$.

Skupimy uwagę wyłącznie na przypadku, gdy G jest funkcją ciągłą. Wysuwamy przypuszczenie, zwane hipotezą testowaną lub zerową, mówiące, że $G = G_0$, gdzie G_0 jest daną ciągłą dystrybuantą, np. dystrybuantą rozkładu gaussowskiego $N(0, 1)$. Prostą i naturalną ilustracją problemu jest weryfikacja działania generatora liczb losowych.

Dla dowolnej ciągłej dystrybuanty G_0 zachodzi $Y \sim G_0 \Leftrightarrow X = G_0(Y) \sim F_0$, gdzie F_0 jest dystrybuantą rozkładu jednostajnego na odcinku (0,1), to znaczy

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ x & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Tak więc problem weryfikacji hipotezy $G = G_0$ w oparciu o obserwacje zmiennych $Y_1, \ldots, Y_n$ możemy zastąpić problemem weryfikacji hipotezy $F = F_0$ w oparciu o wartości zmiennych $X_1 = G_0(Y_1), \ldots, X_n = G_0(Y_n)$. Reasumując, całe poniższe opracowanie dotyczyć będzie problemu weryfikacji hipotezy zerowej

$$H_0 : F = F_0$$

w oparciu o niezależne zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ o dystrybuancie F z rozkładu skoncentrowanego na $(0, 1)$. Przez P_F będziemy oznaczać łączny rozkład tych zmiennych.

Na zakończenie wprowadzimy jeszcze dodatkową dystrybuantę

$$F_n(x) = \frac{\#\{X_i : X_i \leq x\}}{n},$$

gdzie $\#B$ oznacza liczność zbioru B. $F_n(x)$ jest nazywana dystrybuantą empiryczną zmiennych $X_1, \ldots, X_n$. Z dystrybuantą empiryczną w sposób naturalny wiąże się proces empiryczny $\{U_n(x), x \in [0, 1]\}$ gdzie

$$U_n(x) = \sqrt{n}[F_n(x) - x],$$

będący standaryzowaną różnicą między $F_n(x)$ i $F_0(x)$.

1.1.2. Test chi-kwadrat K. Pearsona. W zastosowaniu do weryfikacji $H_0 : F = F_0$, w oparciu o $X_1, \ldots, X_n$, rozumowanie i rozwiązanie K. Pearsona wyglądało następująco. Wybieramy liczbę naturalną k, $k \geq 2$, oraz liczby $0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < 1$. Dzielimy (0,1) na klasy $(a_0, a_1], (a_1, a_2], \ldots, (a_{k-1}, a_k)$, gdzie $a_0 = 0$, $a_k = 1$. Zliczamy liczności N_j wartości zmiennych $X_1, \ldots, X_n$, które wpadły do j-tej klasy, $j = 1, \ldots, k$. Zauważamy, że przy prawdziwości H_0 wektor $(N_1, \ldots, N_k)$ ma rozkład wielomianowy z parametrami n i $p_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0k})$, $p_{0j} = a_j - a_{j-1}$, $j = 1, \ldots, k$. Dla zmierzenia stopnia zgodności rozkładu X_i z F_0 K. Pearson zaproponował porównanie obserwowanych liczności N_j z ich oczekiwanymi wartościami np_{0j}, liczonymi przy założeniu, że $F = F_0$. W tym celu wprowadził statystykę (kryterium)

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - np_{0j})^2}{np_{0j}}.$$

Duże wartości tego kryterium świadczą o słabym dopasowaniu rozkładu F_0. K. Pearson udowodnił, że przy prawdziwości H_0 i $n \to \infty$ zachodzi $\chi^2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2_{(k-1)}$, gdzie $\chi^2_{(s)}$ oznacza zmienną losową o rozkładzie chi-kwadrat

z s stopniami swobody. Wobec powyższego, przynajmniej dla w miarę licznych prób, mając dane i obliczoną dla nich wartość χ^2_{obl} statystyki χ^2, można z tablic rozkładu $\chi^2_{(k-1)}$ odczytać wartość $P_{F_0}(\chi^2 \geq \chi^2_{obl})$. Ta liczba daje pogląd na ile „typowa" jest zaobserwowana wartość χ^2_{obl}, przy prawdziwości H_0. Jeśli to prawdopodobieństwo jest bardzo małe, to prawdziwość H_0 jest mocno wątpliwa.

Jak widać z tego opisu, rozwiązanie K. Pearsona wymagało wielu subiektywnych decyzji. Nie jest jasne jak, wybierać k i liczby a_j, $j = 1, \ldots, k-1$, a sprawa decyzji o akceptacji H_0 pozostała kwestią odczuć statystyka. O pewnych rozwiązaniach powyższych kwestii wspominamy w rozdziałach 1.3.1 i 1.4. Tym niemniej, w porównaniu do wcześniejszych dywagacji, praca K. Pearsona stanowiła ogromny postęp.

J. Haldane napisał o tym rozwiązaniu: *„This has turned out to be an immensely powerful tool, and is used on a huge scale"* (por. [57], str. 432). G. Barnard (patrz [37], str. 1) przypomina, że czasopismo *Science* zaliczyło w 1984 r. tę pracę K. Pearsona do dwudziestu najważniejszych osiągnięć wieku dwudziestego, w szerokim spektrum nauk ścisłych.

W następnym rozdziale omawiamy pokrótce dwa podobne rozwiązania, zaproponowane znacznie później przez znakomitych statystyków i probabilistów. Dla porównania statystyki K. Pearsona z ich propozycjami wyrazimy χ^2 jako funkcję procesu empirycznego $\{U_n(x), x \in [0,1]\}$. Bezpośrednio z definicji mamy

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{[U_n(a_j) - U_n(a_{j-1})]^2}{a_j - a_{j-1}}.$$

Tak więc, dla danego k i ustalonych $a_0, \ldots, a_k$, $(\chi^2)^{\frac{1}{2}}$ jest seminormą na przestrzeni $D[0,1]$, liczoną w punkcie U_n.

1.2. *Statystyki Craméra-von Misesa i Kołmogorowa-Smirnowa.* H. Cramér [7] (przedruk w [8]) i R. von Mises [46] rozważali między innymi statystyki typu

$$\int_0^1 [U_n(x)]^2 K(x)dx,$$

gdzie K jest pewną nieujemną funkcją wagową. W rzeczywistości obaj formułowali problem w terminach wyjściowych zmiennych losowych $Y_1, \ldots, Y_n$ i dystrybuanty G_0 (por. rozdział 1.1.1.). W takim ujęciu funkcje wagowe warto uzależnić od G_0, co przytomnie zauważył N. Smirnow. N. Smirnow [62] wyznaczył również asymptotyczny rozkład

$$W = \left\{ \int_0^1 [U_n(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Seminorma W jest we współczesnej literaturze nazywana statystyką Craméra-von Misesa. Warto zaznaczyć, że rozważania H. Craméra [7] były ciekawsze i głębsze, niż to co ostatecznie weszło do powszechnego obiegu. H. Cramér bazował na centralnym twierdzeniu granicznym i rozwinięciu Charliera granicznej dystrybuanty. W jego pracy jest analizowanych pięć dużych zbiorów danych oraz stopień dopasowania ich rozkładów empirycznych przez skorygowany (*via* uwzględnienie kolejnych członów rozwinięcia) rozkład normalny. E. Phragmén (por. [8], str. v) tak scharakteryzował H. Craméra: *„He belonged to a generation of mathematicians for which it was self evident that mathematics constitutes one of the highest forms of human thoughts, perhaps even the highest.... This does not however mean that they underestimated the importance of 'using theoretical knowledge to obtain know-how'."* Należy żałować, że N. Smirnow spopularyzował uproszczony wariant rozwiązania H. Craméra.

W 1933 r. A. Kołmogorow napisał pracę [35], w której rozważył inną seminormę procesu empirycznego. Mianowicie, zdefiniował

$$D = \sup_{x\in[0,1]} |U_n(x)|$$

i znalazł rozkład graniczny zmiennej D. Angielskie tłumaczenie tej przełomowej, w powszechnym odczuciu, pracy można znaleźć w [37]. Należy podkreślić, że w przeciwieństwie do H. Craméra, A. Kołmogorow przynajmniej do czasu drugiej wojny światowej nie interesował się statystyką. We wspomnianej pracy A. Kołmogorow jasno wykłada swoje motywacje. Skoro zachowanie normy L_2 procesu empirycznego (statystyka W) badał R. von Mises [46], to on zajmie się zachowaniem normy supremum (statystyka D). W pracy w ogóle nie pojawiają się słowa: test, statystyka itp. To N. Smirnow opracował rozmaite warianty D, wyznaczył ich rozkłady graniczne i wprowadził niejako tę seminormę do praktyki statystycznej. W uznaniu jego wkładu, D jest nazywana statystyką Kołmogorowa-Smirnowa. Oczywiście, tak jak w przypadku statystyki χ^2, duże wartości W i D wskazują na istotne odstępstwa od rozkładu hipotetycznego, zadanego dystrybuantą F_0. Również, podobnie jak rozwiązanie K. Pearsona, W i D są dziś standardowymi narzędziami, omawianymi we wszystkich podręcznikach i zaimplementowanymi w pakietach statystycznych. Więcej informacji na temat tych statystyk można znaleźć w ciekawym artykule M. Stephensa (patrz [37], str. 93–113) oraz w monografiach J. Durbina [11] oraz R. D'Agostino i M. Stephensa [9].

1.3. *Test Neymana.*

1.3.1. Uwagi i pojęcia wstępne. Wkład J. Neymana w zbudowanie ogólnej teorii testowania hipotez jest fundamentalny. Wiele szczegółów na ten temat można znaleźć m.in. w omówieniach L. LeCama i E. Lehmanna [40]

oraz T. Ledwiny [42]. W niniejszym opracowaniu ograniczymy się do przypomnienia paru mało znanych faktów i naświetlenia pewnych aspektów, które będą istotne dla zrozumienia rewolucyjności pracy J. Neymana [49], dotyczącej interesującego nas problemu testowania. Pracę tę krótko omówimy w rozdziale 1.3.2.

Jak widać z przedstawionego wyżej materiału, problem testowania został postawiony przez przyrodników i pierwsze prace nie wykraczały daleko poza dostarczenie jakiegoś narzędzia pozwalającego porównywać „obserwowane" z „oczekiwanym". Szczęśliwym trafem J. Neyman był doskonale wykształconym matematykiem. Przypomnijmy, że jego nauczycielem i mistrzem na studiach w Charkowie był S. Bernstein. Praca dyplomowa J. Neymana, licząca 530 str., dotyczyła całki Lebesgue'a i została wyróżniona złotym medalem. Te zainteresowania J. Neyman pogłębiał później na rocznym stypendium w Paryżu u E. Borela i H. Lebesgue'a. Po przyjeździe do Polski w 1921 r., z życiowej konieczności, J. Neyman zajął się statystyką i w 1924 r. uzyskał z niej doktorat na Uniwersytecie Warszawskim. Już wtedy ujawnił się niezwykły talent J. Neymana. W skład doktoratu weszły jego prace z doświadczalnictwa rolniczego, opublikowane po polsku między innymi w *Rocznikach Nauk Rolniczych*. Część tych wyników została w 1990 r. przetłumaczona na język angielski ([63]). W komentarzu do tego tłumaczenia D. Rubin ([60], str. 472) napisał: ... *„It is a honour to be asked to discuss this document, which reinforces Neyman's place as one of our greatest statistical thinkers..."*. Po doktoracie, J. Neyman spędził rok akademicki 1924/25 u K. Pearsona. Nawiązanie współpracy z E. Pearsonem, synem Karola, zaowocowało stworzeniem podstaw nowoczesnej teorii testowania hipotez. W szczególności, ich przełomowa praca z 1933 r. (patrz [53] lub przedruk w [66]) wprowadziła formalizację zagadnienia testowania w języku pewnego problemu optymalizacyjnego. Spróbujemy krótko przedstawić ich punkt widzenia na przykładzie zagadnienia, którym się zajmujemy w niniejszym opracowaniu. Takie rozwiązanie ograniczy znacznie ogólność prezentacji, równocześnie pozwoli na uniknięcie wprowadzania szeregu dodatkowych oznaczeń i założeń.

Przypomnijmy, że statystyk dysponuje wartościami n niezależnych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ o ciągłej dystrybuancie F, każda. Hipoteza testowana H_0 orzeka, że $F = F_0$, gdzie F_0 jest dystrybuantą rozkładu jednostajnego na $(0,1)$. Zanotujmy również, że już w pracach [51] i [52] (przedruki w [66]) J. Neyman z E. Pearsonem wprowadzili istotną innowację w stawianiu samego problemu testowania. Mianowicie, oprócz hipotezy testowanej wyróżnili również hipotezę alternatywną. Tak więc, jeśli przez $\mathcal{F}$ oznaczyny oznaczymy klasę wszystkich ciągłych dystrybuant na $(0,1)$, to problem weryfikacji zgodności z F_0 wyglądałby w ich ujęciu na przykład tak: testujemy hipotezę zerową

$$H_0 : F = F_0$$

przeciwko alternatywie

$$A_0 : F \in \mathcal{F}_0,$$

gdzie $\mathcal{F}_0$ jest pewną interesującą z praktycznego lub poznawczego punktu widzenia podklasą $\mathcal{F}$. Oczywiście, można wziąć w szczególności $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Zajmijmy się tak postawionym problemem testowania. Dla formalności wywodu zanotujmy, że $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ przyjmuje wartości w $\mathcal{X} = (0,1)^n$ i wprowadźmy przestrzeń probabilistyczną $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_F)$, gdzie $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich na $\mathcal{X}$, a P_F oznacza miarę produktową na $\mathcal{B}$ o brzegowych dystrybuantach F. Podkreślmy, że wszystkie rozważania w tym rozdziale są robione dla ustalonego n.

Testem statystycznym nazywać będziemy dowolną funkcję mierzalną $\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{X}$, przyjmującą wartości w zbiorze $\{0,1\}$. Dla wartości $\mathbf{x}$ takich, że $\phi(\mathbf{x}) = 0$ będziemy akceptować H_0, a dla $\mathbf{x}$, dla których $\phi(\mathbf{x}) = 1$, będziemy akceptować A_0 (odrzucając tym samym H_0). Kryteria wprowadzone przez K. Pearsona oraz H. Craméra i R. von Misesa prowadziły do akceptacji H_0, gdy wartości χ^2_{obl} i W_{obl} były subiektywnie mało prawdopodobne. Aby wprowadzić pewne standardy, J. Neyman z E. Pearsonem zaproponowali, aby wybrać pewną małą liczbę α, zwaną poziomem istotności, wyznaczyć liczbę c_α, zwaną wartością krytyczną, akceptować H_0, gdy obliczona wartość rozważanego kryterium nie przekracza c_α i odrzucać H_0 (akceptować A_0) w przypadku przeciwnym. Wartość c_α ustala się tak, aby prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy testowanej, gdy jest prawdziwa, wynosiło α. Ten postulat J. Neymana i E. Pearsona w naszym problemie można krótko zapisać w postaci warunku

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(\mathbf{x}) dP_{F_0}(\mathbf{x}) = E_{P_{F_0}} \phi(\mathbf{X}) = \alpha. \tag{1}$$

Dla ilustracji, zamiast liczyć $P_{F_0}(\chi^2 \geq \chi^2_{obl})$, jak proponował K. Pearson, i decydować czy uznać je za małe czy też nie, porównujemy χ^2_{obl} z wartością c_α spełniającą $P(\chi^2_{(k-1)} \geq c_\alpha) = \alpha$. Jeśli $\chi^2_{obl} \geq c_\alpha$, to H_0 odrzucamy na poziomie istotności α. Typowe poziomy istotności to 0.05 i 0.01. Takie ujęcie ułatwia rozumienie konkluzji wyciąganych przez rozmaitych statystyków dla tych samych zbiorów obserwacji.

Oznaczmy teraz przez $\mathcal{T}_\alpha$ klasę wszystkich mierzalnych $\phi : \mathcal{X} \to \{0,1\}$, które spełniają (1).

Nawiązując do ilustracji z rozdziału 1.1.1., widzimy, że test, służący do sprawdzania czy nowy generator rzeczywiście dostarcza wyników z rozkładu jednostajnego, jest na poziomie istotności α lub, równoważnie, należy do $\mathcal{T}_\alpha$, jeśli szansa zdyskwalifikowania przez ten test dobrego generatora wynosi α.

Drugi postulat J. Neymana i E. Pearsona zawierał istotę ich innowacji. W języku rozważanego tu problemu testowania można go sformułować następująco. W klasie $\mathcal{T}_\alpha$ szukamy funkcji ϕ_0 maksymalizującej $E_{P_F} \phi(\mathbf{X})$ dla

$F \in \mathcal{F}_0$. Tak więc ϕ_0 ma spełniać

$$\arg\max_{\phi \in \mathcal{T}_\alpha} E_{P_F}\phi(\mathbf{X}) = E_{P_F}\phi_0(\mathbf{X}), \quad \forall F \in \mathcal{F}_0. \tag{2}$$

Ponieważ $\phi(\mathbf{x}) = 1$ prowadzi do akceptacji A_0, warunek (2) oznacza, że w klasie $\mathcal{T}_\alpha$ szukamy funkcji maksymalizującej, jednostajnie po $\mathcal{F}_0$, prawdopodobieństwo stwierdzenia, że $F \in \mathcal{F}_0$, w sytuacji, gdy F rzeczywiście należy do $\mathcal{F}_0$.

W rozważanym przez nas przykładzie, drugi postulat J. Neymana i E. Pearsona oznacza, że szukamy testu, który rzadko (z prawdopodobieństwem α) będzie dyskwalifikował dobry generator i jednocześnie maksymalnie często odrzucał wadliwe generatory.

$E_{P_F}\phi(\mathbf{x})$, traktowana jako funkcja $F \in \mathcal{F}_0$, nazywana jest funkcją mocy testu ϕ. Krótko mówiąc, J. Neyman z E. Pearsonem postawili formalny problem wyznaczenia testu jednostajnie najmocniejszego w klasie testów na poziomie istotności α.

Jest chyba oczywiste, że możliwości rozwiązania tak postawionego problemu optymalizacyjnego są ograniczone. We wspomnianej pracy [53] podano np. rozwiązanie, gdy $\mathcal{F}_0 = \{F_1\}$, gdzie F_1 jest ustaloną dystrybuantą. Rozważono też pewną parametryczną rodzinę rozkładów $\{F_\theta, \theta \in \Theta \subset R^q\}$, pewne problemy testowania o jej parametrach i wyznaczono testy jednostajnie najmocniejsze. Dalsze prace J. Neymana i E. Pearsona ([54], [55]; przedruk w [66]) oraz innych statystyków doprowadziły do kompletnego i eleganckiego rozwiązania tak postawionego problemu i problemów pochodnych, wynikających z pewnych dalszych ale naturalnych ograniczeń na klasę $\mathcal{T}_\alpha$. Jeszcze raz podkreślmy, że wszystkie te wyniki uzyskano dla dowolnej, ale ustalonej wielkości próby n. Współczesne ujęcie tych wyników można znaleźć w monografii E. Lehmanna [43]. Na zakończenie tej krótkiej prezentacji zacytujmy opinię L. Le Cama i E. Lehmanna [40] na temat znaczenia omawianych wyżej prac J. Neymana i E. Pearsona. Chyba trudno trafniej i krócej podsumować ich zasługi. „*The impact of this work has been enormous. It is, for example, hard to imagine hypothesis testing today without the concept of power, which provides the basis both for the determination of sample size and for any comparisons among competing tests. And the optimum properties of the classical normal theory tests are not only aesthetically pleasing but serve as benchmarks against which the performance of simpler or more robust tests can be gauged. However, the influence of the work goes far beyond its implications for hypothesis testing. By deriving tests as the solutions of clearly defined optimum problems, Neyman and Pearson established a pattern for Wald's general decision theory and for the whole field of mathematical statistics as it has developed since then.*"

1.3.2. Gładki test Neymana. Jak widać z powyższego, już około 1936 roku J. Neyman zdawał sobie sprawę z tego, że lista problemów, w których,

przy ustalonej wielkości próby n, istnieją testy jednostajnie najmocniejsze w klasie $\mathcal{T}_\alpha$ lub w pewnych interesujących podklasach tej klasy, została wyczerpana. Dalszy postęp w dziedzinie definicji i konstrukcji testów optymalnych wymagał kolejnej istotnej innowacji. I J. Neyman takiej innowacji dokonał już w 1937 r. (por. [49] lub przedruk w [65]). Ta jego praca została określona przez L. Le Cama i E. Lehmanna [40] jako genialna. Jeśli się wie, jak ogromne wymagania stawiał sobie i innym Le Cam, waga tych słów zasługuje na szczególną uwagę. We wspomnianej pracy [49], dedykowanej pamięci zmarłego w 1936 r. Karola Pearsona, J. Neyman rozważył problem testowania jednostajności rozkładu. Używając oznaczeń z poprzedniego rozdziału, problem wyglądał następująco.

Testujemy

$$H_0 : F = F_0$$

przeciwko

$$A : F \neq F_0, \quad F \in \mathcal{F},$$

na bazie obserwacji niezależnych zmiennych $X_1, \ldots, X_n$. W przeciwieństwie do swych słynnych poprzedników, J. Neyman wyprowadził postać statystyki testowej na podstawie rozważań optymalizacyjnych.

Pierwszy krok, który zrobił J. Neyman, polegał na wyróżnieniu podklasy alternatyw. J. Neymana interesowała konstrukcja testu, który byłby czuły na 'gładkie' odstępstwa od hipotetycznego modelu jednostajnego. 'Gładkie' odstępstwa obejmowały: zmianę średniej, wariancji, skośności, stopnia spłaszczenia rozkładu itp. W celu sformalizowania tego postulatu, J. Neyman ograniczył po pierwsze rozważania do dystrybuant F posiadających gęstość f względem miary Lebesgue'a na (0,1). Wówczas równoważną postacią H_0 jest

$$H_0 : f = f_0 \equiv 1.$$

Do modelowania wspomnianych 'gładkich' odstępstw of f_0 J. Neyman zaproponował rodzinę gęstości $\mathcal{F}_k(\theta)$ złożoną z elementów postaci

$$f_k(x;\theta) = c_k(\theta) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{k} \theta_j L_j(x) \right\},$$

gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in R^k$ jest wektorem nieznanych parametrów, $\{L_j\}_{j \geq 1}$ jest układem ortonormalnych wielomianów Legendre'a na $(0,1)$ a $c_k(\theta)$ stałą normującą. W ten sposób wyjściowy problem testowania został zawężony do weryfikacji

$$H_0^* : \theta = 0$$

przeciwko

$$A_0^* : \theta \neq 0$$

w rodzinie gęstości $\mathcal{F}_k(\theta)$.

Drugi krok konstrukcji polegał na wyznaczeniu testu optymalnego dla tego zawężonego problemu testowania. Niebagatelną sprawą było samo określenie optymalności testu. Rozważając tę kwestię, J. Neyman podał rozwiązanie, które po trzech dekadach od momentu wprowadzenia weszło do powszechnego użycia i na długie lata było podstawowym narzędziem statystyki asymptotycznej. Mianowicie, J. Neyman zaproponował badanie i porównywanie funkcji mocy testów przy $n \to \infty$ i jednoczesnym „ściąganiu" parametrów alternatyw do 0 w tempie $1/\sqrt{n}$. Przy takim podejściu J. Neyman wyznaczył test lokalnie asymptotycznie optymalny dla H_0^* przeciwko A_0^*, w klasie testów na poziomie istotności α, spełniających pewne dodatkowe naturalne warunki symetrii. To asymptotycznie optymalne rozwiązanie okazało sie naturalne i łatwe do interpretacji. J. Neyman oznaczył statystykę testową, zapewne przez analogię do rozwiązania K. Pearsona, symbolem Ψ_k^2. Otrzymany test odrzuca H_0 dla dużych wartości Ψ_k^2, gdzie

$$\Psi_k^2 = n\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_j(X_i)\right\}^2 = n\sum_{j=1}^{k}\left\{\int_0^1 L_j(x)dF_n(x)\right\}^2$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\left\{\int_0^1 L_j(x)dU_n(x)\right\}^2,$$

podczas gdy F_n jest dystrybuantą empiryczną zmiennych $X_1, \ldots, X_n$ a $\{U_n(x), x \in [0,1]\}$ procesem empirycznym. Tak więc Ψ_k^2 jest unormowaną sumą kwadratów k pierwszych współczynników Fouriera F_n w bazie $\{L_j\}_{j\geq 1}$. Z drugiej strony, postać wielomianów Legendre'a implikuje, że małe wartości Ψ_k^2 oznaczają nieistotne zmiany kolejnych empirycznych momentów: średniej, wariancji itd. J. Neyman przedyskutował również zachowanie funkcji mocy testu Ψ_k^2 w zależności od wyboru k i do praktycznych celów zarekomendował Ψ_3^2 lub Ψ_4^2. Zanotujmy, że J. Neyman doskonale zdawał sobie sprawę z tego, że wybór liczby składników w Ψ_k^2 ma decydujące znaczenie dla zachowania funkcji mocy tego testu. Jego wybór gwarantował stabilną moc tylko przy bardzo 'gładkich' odstępstwach od postulowanego modelu.

W pracy [50] dedykowanej H. Cramérowi, J. Neyman dokonał następnego przełomowego odkrycia, podając konstrukcję klasy lokalnie asymptotycznie optymalnych testów dla problemów testowania z parametrami zakłócającymi. Tego typu problemy są kluczowe w praktyce statystycznej. Należy podkreślić, że istota pomysłu J. Neymana, pozwalającego wyeliminować wpływ parametrów zakłócających, została natychmiast podchwycona i jest eksploatowana do dziś w analizie złożonych modeli parametrycznych i semiparametrycznych. Niestety, wydaje się, że zasługi J. Neymana w tej materii nie są właściwie eksponowane. Warto też chyba nadmienić, że test

Ψ_k^2 był praktycznie zapomniany przez niemal 50 lat, a wprowadzona w [50] klasa testów optymalnych nie była właściwie doceniona przez niemal 40 lat.

1.3.3. Klasa gładkich testów Neymana. Jest rzeczą oczywistą, że rozwiązanie J. Neymana można uogólnić używając innych układów w miejsce wielomianów Legendre'a. W niniejszym opracowaniu będziemy rozważać głównie klasę gładkich testów odrzucających H_0 dla dużych wartości

$$N_k = N_k(\Upsilon) = n\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Upsilon_j(X_i)\right\}^2, \tag{3}$$

gdzie $\{\Upsilon_j\}_{j\geq 1}$ jest ortonormalnym układem w $L_2([0,1], a\ \lambda)$, λ miarą Lebesgue'a. Naturalnie, można pójść dalej i wprowadzić układy podwójnie indeksowane $\{\Lambda_{j,k}\}$, $1 \leq j \leq k$, $k = 1, 2, \ldots$ dopuszczając w ten sposób do zastosowania np. funkcji sklejanych czy falek. W szczególności, biorąc układ $\{\Lambda_{j,k}^0\}$ zortogonalizowanych funkcji

$$b_{j,k}(x) = \{I_{(a_{j-1},a_j]}(x) - p_{0j}\}p_{0j}^{-1/2},$$

gdzie $I_A(\cdot)$ jest indykatorem zbioru A, a pozostałe oznaczenia wzięto z rozdziału 1.1.2, można pokazać, że statystyka χ^2 K. Pearsona ma postać

$$\chi^2 = n\sum_{j=1}^{k-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{j,k-1}^0(X_i)\right\}^2. \tag{4}$$

Statystyki o strukturze (3) lub, ogólniej,

$$n\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{j,k}(X_i)\right\}^2 \tag{5}$$

nazywa się współcześnie gładkimi statystykami rzędu k.

1.3.4. Inne rozwiązania i inne problemy testowania. Oprócz przedstawionych tu statystyk istnieje wiele innych, będących funkcjami dystrybuanty empirycznej lub procesu empirycznego. Rozważa się również testy oparte na procesach kwantylowych, spacjach, funkcjach charakterystycznych i estymatorach gęstości. Do konstrukcji testów wykorzystuje się ponadto rozmaite charakteryzacje rozkładów, własności momentów itp. Przegląd tego typu rozwiązań można znaleźć w książce R. D'Agostino i M. Stephensa [9].

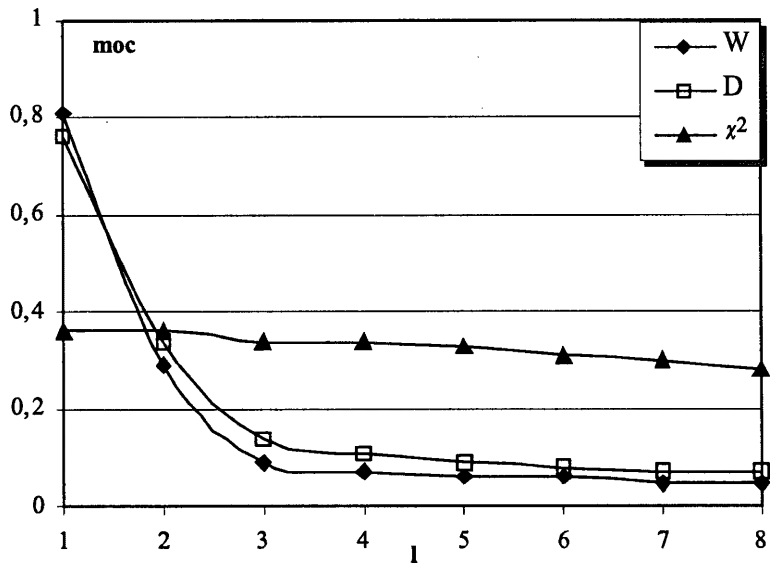
Analogiczne konstrukcje opracowano i nadal się opracowuje dla problemów testowania z parametrami zakłócającymi, rozmaitych schematów zbierania danych (np. obserwacje zależne lub cenzurowane), procesów stochastycznych, danych funkcyjnych itp. Istniejąca liczba rozmaitych wariantów i uogólnień przedstawionych idei jest przeogromna.

Pod koniec lat osiemdziesiątych zeszłego stulecia zaczęto robić pierwsze badania symulacyjne. Wykazały one między innymi, że omówione w niniejszym opracowaniu rozwiązania są proste, ale dość słabe. Dokładniej,

ich moc jest duża tylko dla specjalnych odstępstw od H_0. Dla ilustracji istoty tego problemu przedstawimy symulowane moce testu χ^2, Craméra-von Misesa (W) i Kołmogorowa-Smirnowa (D) dla problemu testowania $H_0 : f = f_0 \equiv 1$, w sytuacji, gdy obserwacje pochodzą z rozkładu o gęstości

$$f(x; d, l) = 1 + d\cos(l\pi x) \quad d \in (0, 1], \quad l = 1, 2, \ldots$$

W symulacjach wzięto poziom istotności $\alpha = 0.05$, $n = 100$ i wykonano 10000 powtórzeń. Statystyka χ^2 jest liczona dla podziału $(0, 1)$ na 15 równych podprzedziałów.



Rys. 1. Symulowane moce testów Craméra-von Misesa (W), Kołmogorowa-Smirnowa (D) i K. Pearsona (χ^2) przy $n = 100$, $\alpha = 0,05$ i alternatywach $1 + (0,4)\cos(l\pi x)$, $l = 1, \ldots, 8$.

Wyniki pokazują, że moc testów W i D jest bardzo wysoka przy zaburzeniu f_0 pierwszym cosinusem, a potem gwałtownie spada wraz ze wzrostem liczby oscylacji. To pośrednio implikuje, że dla alternatyw f o dużym pierwszym współczynniku Fouriera, w bazie cosinusów, moc tych testów też będzie wysoka. Natomiast dla alternatyw f, w których dominują wyższe składowe, moc wspomianych testów będzie stosunkowo niska. Z kolei test χ^2, przy powyższym dość typowym doborze klas, ma stabilną, ale niezbyt wysoką moc.

Zauważona słabość klasycznych i niezwykle popularnych testów spowodowała pod koniec lat dziewięćdziesiątych spore zainteresowanie w znalezieniu nowych, bardziej efektywnych rozwiązań. Pewne istotne ulepszenia przedstawili G. Neuhaus [48], J. Hart i R. Eubank [13] oraz P. Bickel i Y. Ritov [5]. T. Ledwina [41] zaproponowała powiązanie konstrukcji J. Neymana

z 1937 r. z nowoczesnymi metodami doboru modelu. Powstałą w ten sposób procedurę nazwała testem adaptacyjnym. Szczegóły tej konstrukcji podamy poniżej.

1.4. *Adaptacyjne testy Neymana.* Przypomnijmy, że rozważamy problem testowania jednostajności

$$H_0 : F = F_0$$

przeciwko

$$A : F \neq F_0, \quad f \in \mathcal{F},$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest klasą wszystkich ciągłych dystrybuant rozkładów skoncentrowanych na $(0,1)$.

Myśląc realistycznie, jest oczywiste, że mając, powiedzmy, $n = 100$ obserwacji niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie F nie jesteśmy w stanie zidentyfikować wszystkich możliwych alternatyw. Innymi słowy, przy konstrukcji testu warto uwzględnić jakieś realistyczne postulaty co do spektrum odstępstw od modelu, jakie przede wszystkim chcielibyśmy „wyłapać" z dużą częstością, przy umiarkowanych wartościach n. Postulat J. Neymana [49], aby w pierwszej kolejności skupić uwagę na 'gładkich' odstępstwach od modelu, wydaje się rozsądny. Z drugiej strony jest także naturalne, aby wraz ze wzrostem n stopień złożoności alternatyw, które możemy wykryć z dużym prawdopodobieństwem, również rósł.

Dla spełnienia tych dwóch powyższych postulatów T. Ledwina [41] zaproponowała, aby wyróżnić w $\mathcal{F}$ rosnącą wraz z n rodzinę modeli $\mathcal{F}_1^*(\theta) \subset \mathcal{F}_2^*(\theta) \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{d(n)}^*(\theta)$, gdzie $d(n) \to \infty$ przy $n \to \infty$, a elementy $\mathcal{F}_k^*(\theta)$ mają postać

$$f_k(x;\theta) = c_k(\theta) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{k} \theta_j \Upsilon_j(x) \right\},$$

podczas gdy $\{\Upsilon_j\}_{j\geq 1}$ jest pewnym układem ortonormalnym. Przypomnijmy, że dla każdego ustalonego k, używając konstrukcji J. Neymana [49] z 1937 r., jesteśmy w stanie skonstruować optymalny test dla testowania f_0 przeciwko f_k. Test ten odrzuca H_0 dla dużych wartości $N_k = N_k(\Upsilon) = n\sum_{j=1}^{k}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Upsilon_j(X_i)\}^2$. Cały problem z użyciem konstrukcji J. Neymana do naszych celów polega na tym, że nie wiemy jakiemu f_k, choćby w przybliżeniu, podlegają obserwacje. Jak nadmieniliśmy uprzednio, bezmyślny lub nietrafiony wybór k w N_k ma dramatyczne skutki dla mocy testu. Wobec tego w omawianej pracy zaproponowano aby, mając dane, sprawdzić niejako najpierw jak wygląda najlepiej dopasowany do nich model z listy $\mathcal{F}_1^*(\theta) \subset \mathcal{F}_2^*(\theta) \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{d(n)}^*(\theta)$, gdzie $\mathcal{F}_k^*(\theta) = \{f_k(x;\theta) : \theta \in R^k\}$. Dopiero w następnym kroku, znając ten model, a w szczególności jego wymiar k_0 wybrany na podstawie posiadanych obserwacji, sprawdzić testem N_{k_0}, czy jednostajność należy odrzucić.

Powyższe rozumowanie doprowadziło do pytania o odpowiednią metodę doboru modelu $\mathcal{F}_k^*(\theta)$. Istnieje wiele rozwiązań w tym zakresie (por. Lanterman [38]). T. Ledwina [41] zaproponowała użycie reguły Schwarza [61], która została wyprowadzona na gruncie bayesowskiej teorii decyzji. Są znane również uzasadnienia tej metody na bazie teorii kodowania (por. Barron i Cover [3] oraz Lanterman [38]).

Prezentację reguły Schwarza ograniczymy do rozważanej powyżej sytuacji. Przypuśćmy, że niezależne zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ mają rozkład o gęstości $f_k(x;\theta)$, każda. Przy ustalonych wartościach $x_1, \ldots, x_n$ tych zmiennych wprowadźmy następujące oznaczenia

$$L_k(\theta) = \log \prod_{i=1}^{n} f_k(x_i;\theta) \quad \text{oraz} \quad \hat{L}_k = \sup_{\theta \in R^k} L_k(\theta) = L_k(\hat{\theta}_k).$$

Zauważmy, że $\hat{L}_k$ dobiera parametr $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(x_1, \ldots, x_n)$, przy którym pojawienie się wyników $x_1, \ldots, x_n$ jest najbardziej prawdopodobne, mówiąc skrótowo. Zanotujmy również, że próba użycia $\arg \max_{1 \le k \le d(n)} \hat{L}_k$ jako kryterium doboru wymiaru modelu $\mathcal{F}_k^*(\theta)$ prowadziłaby do wyboru maksymalnego dopuszczalnego wymiaru $d(n)$. Zdefiniujmy dodatkowo funkcję

$$\mathcal{L}_k = \hat{L}_k - \frac{1}{2} k \log n$$

pomniejszającą $\hat{L}_k$ o karę na wymiar modelu i wielkość próby. Opymalizacyjne rozważania Schwarza doprowadziły do reguły S, podającej optymalny wymiar modelu i danej wzorem

$$S = \min\{k, 1 \le k \le d(n) : \mathcal{L}_k = \max_{1 \le j \le d(n)} \mathcal{L}_j\}.$$

Przedstawiona argumentacja wskazuje, że S dobiera możliwie „oszczędny", ale w miarę dobrze dopasowany model.

Reasumując, powyższe rozumowanie dało w wyniku adaptacyjną wersję gładkiej statystyki Neymana postaci N_S.

Własności S i N_S zostały wnikliwie przebadane w pracach W. Kallenberga i T. Ledwiny [31] oraz T. Inglota i T. Ledwiny [21].

Praktyczne wyznaczenie reguły Schwarza S wymaga użycia metod numerycznych i obliczeń komputerowych. Ponadto, kwestia przeniesienia konstrukcji tej reguły na modele nieparametryczne i semiparametryczne nie wydaje się oczywista. Z tych względów w pracy W. Kallenberga i T. Ledwiny [32] zaproponowano tak zwaną uproszczoną regułę Schwarza, która w omawianym tu przypadku testowania jednostajności przyjmuje szczególnie prostą postać. Oznaczmy tę nową regułę przez $S1$. Mamy

$$S1 = \min\{k,\ 1 \le k \le d(n) : N_k(\Upsilon) - k \log n \ge N_j(\Upsilon) - j \log n, \quad j = 1, \ldots, d(n)\}.$$

$S1$ jest prosta, bardzo dobrze naśladuje S i daje się w naturalny sposób uogólniać na bardziej złożone problemy wnioskowania. Dla krótkości prezentacji, w dalszej części tego opracowania, ograniczymy uwagę do układu $\Upsilon_j(x) = C_j(x) = \sqrt{2}\cos(\pi j x)$, $j = 1, 2, \ldots$, i związanej z nim uproszczonej reguły Schwarza $S1$. Dla zwięzłości będziemy pisać N_k w miejsce $N_k(C)$.

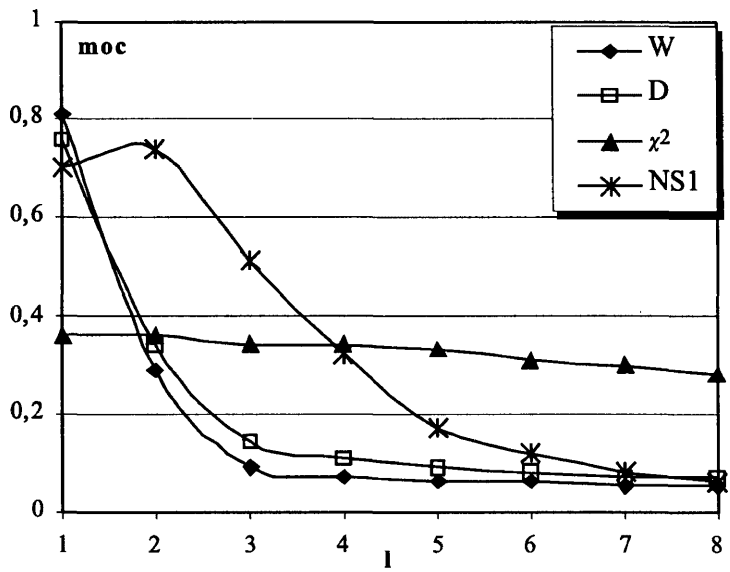
Asymptotyczne zachowanie $S1$, związanej z układem $\{C_j\}_{j\geq 1}$, przy założeniu prawdziwości H_0, opisuje następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 1. *Jeśli ciąg* $\{d(n)\}$ *spełnia* $d(n)\sqrt{\log n/n} \to 0$, *to przy prawdziwości* H_0, *mamy*

$$\lim_{n\to\infty} P_{F_0}(S1 = 1) = 1.$$

Symulacje pokazują, że zbieżność jest szybka. Np. przy $n = 50$ i $n = 100$ frakcje $\{S1 = 1\}$ wynoszą 94/100 i 96/100, odpowiednio. Dowód twierdzenia 1 eksploatuje elegancką wykładniczą nierówność Prohorowa [59] dla rozkładu norm wektorów losowych. Twierdzenie 1 natychmiast implikuje, że granicznym rozkładem N_{S1} przy H_0 jest $\chi^2_{(1)}$.

Rozdział ten zakończymy prezentacją i dyskusją zachowania symulowanych mocy testu opartego na N_{S1}. Rozważamy tę samą sytuację co na rys. 1 i uzupełniamy go o wyniki dla N_{S1} (patrz rys. 2).



Rys. 2. Symulowane moce testów W, D, χ^2 i N_{S1} przy $n = 100$, $\alpha = 0,05$ i alternatywach $1 + (0,4)\cos(l\pi x)$, $l = 1, \ldots, 8$.

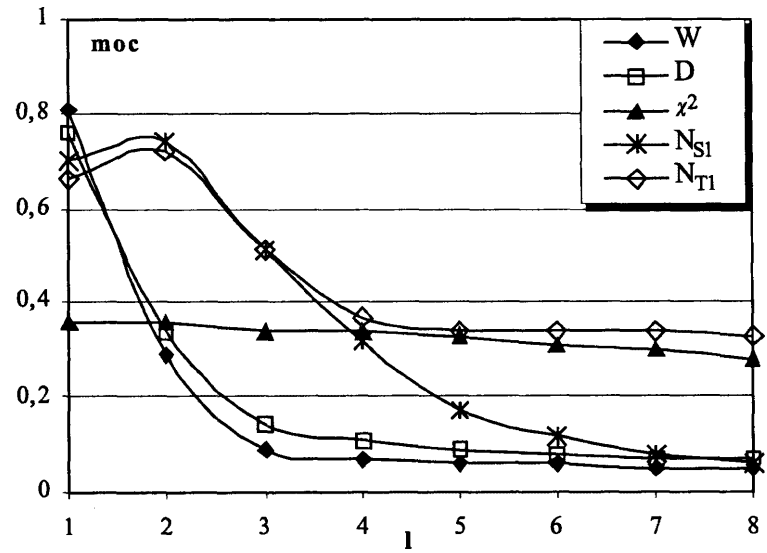
Widać, że używając N_{S1}, dla alternatyw generowanych przez pierwsze trzy lub cztery cosinusy uzyskano znacznie większe moce niż mają testy klasyczne. Jak stwierdzono uprzednio, podobny efekt uzyskuje się dla innych

alternatyw o dominujących pierwszych czterech współczynnikach Fouriera. Powstaje też pytanie, czy taki wynik można było uznać za zadowalający. Jeśli chodzi o klasyczne problemy testowania zgodności z zadanym rozkładem, to, naszym zdaniem, odpowiedź jest pozytywna. Bardzo obszerne badania symulacyjne pokazały, że przedstawione rozwiązanie i jego uogólnienia na problemy testowania z parametrami zakłócającymi (patrz np. Kallenberg i Ledwina [32]) oraz zagadnienia nieparametryczne (np. testowanie niezależności i problem dwóch prób; por. W. Kallenberg i T. Ledwina [33] oraz A. Janic-Wróblewska i T. Ledwina [28]) dały moce porównywalne lub przewyższające moce najlepszych istniejących rozwiązań poszczególnych problemów. Wyniki porównań z rozwiązaniami G. Neuhausa [48], R. Eubanka i J. Harta [13] oraz P. Bickela i Y. Ritova [5] też były satysfakcjonujące. Powodem takiej sytuacji jest to, że rozkłady alternatywne, jakie się rozważa w modelowaniu wielu zjawisk, są, w sensie analitycznym, bardzo gładkie i kilka pierwszych wyrazów w ich rozwinięciu w szereg Fouriera zawiera zasadniczą informację o ich kształcie. Informacja ta jest wychwytywana przez adaptacyjne testy przy stosunkowo niewielkich n. Oczywiście, wraz ze wzrostem n czułość wszystkich testów rośnie i tym samym rozszerza się zakres ich czułości. Jednakże prace teoretyczne nad porównaniem adaptacyjnych testów z rozwiązaniami klasycznymi i współczesnymi pokazały, że w pewnym sensie moce testów adaptacyjnych rosną szybciej wraz z n. Zagadnienia te dyskutujemy pokrótce w poniższym rozdziale.

Na zakończenie tej dyskusji nadmieńmy, że rozwiązania, które zaproponowaliśmy, dają się rozszerzyć na dużo bardziej złożone problemy, niż te dotychczas dyskutowane. W takich zagadnieniach wysoko oscylujące alternatywy występują w sposób naturalny. Praca nad takimi zagadnieniami była motywacją do pewnych modyfikacji konstrukcji N_{S1}, powiedzmy, w celu uzyskania testu, którego zakres czułości, przy danym n, zostałby zwiększony dla wysokich oscylacji przy jednoczesnym ewentualnym minimalnym spadku mocy dla niskich oscylacji. Takie rozwiązanie przedstawiono w pracy T. Inglota i T. Ledwiny [27]. Rys. 3 zawiera symulowane moce tego nowego rozwiązania (N_{T1}) oraz tych uprzednio rozważanych. Prezentację samego rozwiązania pomijamy.

Zanotujmy również, że, uwzględniając reprezentację statystyki χ^2 daną (4), było w miarę oczywiste, że wypracowana metodologia konstrukcji adaptacyjnych testów może być również użyta do wyboru, na podstawie obserwacji, liczby przedziałów oraz ich końców. Takie rozwiązania podano w pracach M. Bogdan [6] oraz T. Inglota i A. Janic-Wróblewskiej [17].

2. Porównywanie testów. Jak wspomnieliśmy uprzednio, J. Neyman [49] zaproponował badanie i porównywanie asymptotycznej mocy testów przy ciągach alternatyw zbieżnych do hipotezy zerowej w tempie $1/\sqrt{n}$.



Rys. 3. Symulowane moce testów W, D, χ^2, N_{S1} i N_{T1} przy $n = 100$, $\alpha = 0{,}05$ i alternatywach $1 + (0,4)\cos(l\pi x)$, $l = 1, \ldots, 8$.

Może warto w tym miejscu nadmienić, jak się formalnie rozumie stwierdzenie, że ciąg gęstości $\{f_n\}$ zbiega do f_0 w tempie $1/\sqrt{n}$. Mianowicie, oznacza ono, że

$$\limsup_{n\to\infty} nH^2(f_n, f_0) < \infty,$$

gdzie

$$H(f_n, f_0) = \left\{ \int_0^1 (f_n^{1/2} - f_0^{1/2})^2 d\lambda \right\}^{1/2}$$

jest odległością Hellingera między f_n i f_0. Ten pomysł Neymana zdominował asymptotyczną statystykę w dwudziestym wieku. W pewnym momencie okazało się jednak, że takie podejście przestaje wystarczać. Już praca Neuhausa [47] pokazała, że informacja o asymptotycznej mocy tak prostej statystyki jak W Craméra-von Misesa, jaką można w ten sposób uzyskać, jest dość ograniczona i raczej opisowa niż ilościowa. Dodatkowe przejścia graniczne pozwoliły Neuhausowi na stwierdzenie, że test odrzucający H_0 dla dużych wartości W jest optymalny jedynie przy alternatywie postaci $1 + d\cos(\pi x)$, $d \approx 0$, a dla alternatyw postaci $1 + d\cos(j\pi x)$, $d \approx 0$, $j \geq 1$, jego asymptotyczna moc maleje wraz ze wzrostem j. Te opisowe wyniki są zgodne z wynikami symulacji (por. rys. 1; dodajmy, że maksymalna moc, jaką można uzyskać dla tej alternatywy przy $j = 1$, $n = 100$ i $\alpha = 0.05$, wynosi 0.9). W odniesieniu do N_{S1} rozważanie lokalnych alternatyw zbieżnych w tempie $1/\sqrt{n}$ daje wręcz absurdalne wyniki (por. T. Inglot i T. Ledwina [22]).

Statystycy wypracowali również wiele alternatywnych metod porównywania testów. Część z nich nie ma, niestety, sensownej praktycznej interpretacji. Większość standardowych procedur daje się głównie stosować do statystyk, które mają w przybliżeniu strukturę liniową i ich zastosowanie do N_{S1} okazało się niemożliwe (por. dyskusja w [22]).

Powstała więc potrzeba znalezienia jakiegoś sensownego podejścia, pozwalającego zbadać zachowanie mocy N_{S1} przy dużych n i porównać je z zachowaniem mocy innych testów. W serii prac napisanych w ciągu ostatnich dziesięciu lat przez T. Inglota i T. Ledwinę oraz współpracowników (por. [10], [18], [19], [21]–[26]) rozwinięto tak zwane podejście pośrednie zaproponowane w pracach Kallenberga [29], [30]. Okazało się, że to rozwiązanie dało się zastosować do porównywania testów klasycznych, np. Craméra-von Misesa i Kołmogorowa-Smirnowa, jak i nowych konstrukcji Neuhausa [48], Bickela i Ritova [5], Eubanka i Harta [13], Ledwiny [41], Barauda i innych [2], itp. Prace na temat asymptotycznego porównywania testów są na ogół bardzo techniczne. Nie inaczej jest w przypadku stosowania podejścia pośredniego. Właściwie, należy to wyraźnie powiedzieć, samo podejście jest dużo bardziej złożone niż klasyczne rozwiązania (por. Inglot i Ledwina [21] oraz Inglot [16]). Jego precyzyjny opis znacznie wykracza poza ramy niniejszego opracowania. Ograniczymy się więc do zasygnalizowania, z czym się wiąże liczenie tak zwanej efektywności pośredniej Kallenberga i jak wygląda przykładowy rezultat jej zastosowania do statystyki W. Podamy również krótki komentarz na temat analogicznych wyników dla N_{S1}. W naszych pracach rozwinęliśmy dwa pomysły Kallenberga: liczenie efektywnosci i liczenie niedoboru mocy. Liczenie niedoboru mocy jest subtelniejsze i wymaga nieco mocniejszych narzędzi niż liczenie efektywności. Liczenia niedoboru mocy nie będziemy tu w ogóle dyskutować.

Poniżej przedstawiamy pewne fragmenty argumentacji leżącej u podstaw formalnej definicji efektywności Kallenberga. Prezentację ograniczamy do problemu liczenia efektywności testu Craméra-von Misesa względem innego testu odrzucającego H_0 dla dużych wartości pewnej statystyki V.

Generalnie, statystyk chciałby mieć pewien miernik mówiący mu o ile i jakich sytuacjach jeden test jest lepszy od drugiego. Typową próbą odpowiedzi na tak postawione pytanie jest podanie jakiegoś wariantu efektywności względnej. Efektywność względną wypiszemy dla problemu testowania jednostajności, przy dodatkowym założeniu, że dystrybuanty F posiadają gęstość f względem miary Lebesgue'a na (0,1). To ograniczenie nie jest potrzebne przy wprowadzaniu samej definicji efektywności, ale pozwoli nieco skrócić późniejszą dyskusję. Rozważamy więc

$$H_0 : f = f_0 \equiv 1$$

przeciwko

$$A : f \neq f_0.$$

Niech α będzie danym poziomem istotności, a β zadaną liczbą, $0 < \alpha < \beta < 1$. Niech $N_V(\alpha, \beta, f)$ oznacza minimalną liczbę obserwacji potrzebną na to, aby test na poziomie istotności α, odrzucający H_0 dla dużych wartości V, miał moc co najmniej β przy alternatywie f. Analogicznie definiuje się $N_W(\alpha, \beta, f)$. Relatywną efektywnością W względem V nazywa się iloraz

$$e_{W,V}(\alpha, \beta, f) = \frac{N_V(\alpha, \beta, f)}{N_W(\alpha, \beta, f)}. \tag{6}$$

Ta wielkość ma prostą i intuicyjną interpretację, ale jest praktycznie nie do policzenia. Dla wybrnięcia z tego kłopotu próbuje się rozważać rozmaite wielkości pochodne. Np. zastosowanie pomysłu Pitmana z 1949 r., eksploatującego podejście Neymana [49], polegałoby na próbie wyliczenia $\lim_{n\to\infty} e_{W,V}(\alpha, \beta, f_n)$, gdzie $f_n \to f_0$ w tempie $1/\sqrt{n}$. Wariant Bahadura z 1967 r. to $\lim_{n\to\infty} e_{W,V}(\alpha_n, \beta, f)$, gdzie $\alpha_n \to 0$ w tempie wykładniczym. Niestety, w rozważanym przez nas przypadku oba te pomysły nie prowadzą do kryteriów, które można by bezpośrednio zastosować do porównywania testów. Neuhaus [47] i Nikitin [56] zastosowali dodatkowe przejścia graniczne, aby dostać dla W coś w miarę czytelnego.

W ogólnej sytuacji Kallenberg [30] podał, rozwiązanie pośrednie między tymi wprowadzonymi przez Pitmana i Bahadura. Mianowicie zaproponował, aby rozważać $\alpha_n \to 0$ wolniej niż wykładniczo i $f_n \to f_0$ wolniej niż w tempie $1/\sqrt{n}$. Formalnie rzecz ujmując, mają być spełnione następujące warunki:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \alpha_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} H(f_n, f_0) = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} nH^2(f_n, f_0) = \infty.$$

Dla wyegzekwowania warunku $0 < \beta < 1$, występującego w definicji relatywnej efektywności i gwarantującego nietrywialność uzyskiwanych wyników, tempa zbieżności f_n i α_n muszą być powiązane. Pomysł Kallenberga z grubsza wyglądał tak, że próbuje się wyliczyć wielkość

$$\mathcal{E}_{W,V} = \lim_{n\to\infty} e_{W,V}(\alpha_n, \beta, f_n). \tag{7}$$

I rzeczywiście, okazało się, że przy drobnej, ale sensownej modyfikacji definicji $N_V(\alpha, \beta, f)$, podanej wyżej, pewnych założeniach na zachowanie się przy H_0 ogonów rozkładów statystyk W i V oraz przy zachodzeniu prawa wielkich liczb dla W i V przy $\{f_n\}$, granica (7) istnieje dla dużej klasy ciągów $\{f_n\}$ i odpowiednich ciągów $\{\alpha_n\}$. Szczegóły, dyskusję warunków i przykłady zastosowań można znaleźć np. w pracach W. Kallenberga [30], T. Inglota i T. Ledwiny [21], [22] i [25] oraz T. Inglota [16]. Tu podamy jedynie garść informacji na temat zachowania ogonów rozkładu W, które są istotne dla istnienia efektywności Kallenberga oraz postać $\mathcal{E}_{W,V}$ dla wybranej prostej klasy $\{f_n\}$ i wybranej konkurencyjnej statystyki V.

Przypomnijmy, że Bahadur żądał, aby $\alpha_n \to 0$ w tempie wykładniczym. To założenie wymuszało istnienie wielkich odchyleń dla rozważanych statystyk testowych. W szczególności, w jego podejściu kluczową rolę odgrywała funkcja

$$\mathcal{I}(x) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx^2} \log P_{F_0}(W \geq x\sqrt{n}).$$

Podejście Kallenberga wiąże się z wolniejszą asymptotyką $\{\alpha_n\}$. To z kolei implikuje, że w omawianym tu przykładzie centralną rolę pełnią oszacowania dla $P_{F_0}(W \geq x_n\sqrt{n})$ oraz granice

$$c_W = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx_n^2} \log P_{F_0}(W \geq x_n\sqrt{n}), \tag{8}$$

gdzie $x_n \to 0$ oraz $nx_n^2 \to \infty$. Dla ilustracji przytaczamy oszacowanie, które można uzyskać z rezultatów pracy T. Inglota i T. Ledwiny [20].

TWIERDZENIE 2. *Jeśli* $x_n \to 0$ *i* $nx_n^2 \to \infty$, *to dla każego* $\gamma \in (2,3)$ *zachodzi*

$$P_{F_0}(W \geq x_n\sqrt{n}) = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\pi^2 nx_n^2 + O(nx_n^\gamma) + O(\log[nx_n^2])\Big\}. \tag{9}$$

Oczywiście, (9) natychmiast implikuje (8) z $c_W = \pi^2/2$.

Dla sprawdzenia jak sprawnie statystyka W wydobywa informację o gęstości f, zawartą w próbie $X_1, \ldots, X_n$, będziemy liczyć jej efektywność względem najlepszego testu dla weryfikowania $H_0 : f = f_0$ przeciwko $A_1 : f = f_n$, gdzie f_n jest n-tym elementem ciągu gęstości $\{f_n\}$. Taki najlepszy (najmocniejszy) test został skonstruowany w 1933 r. przez J. Neymana i E. Pearsona. Odrzuca on H_0 dla dużych wartości statystyki $\sum_{i=1}^n \log f_n(X_i)$ lub równoważnie, jej standaryzowanej wersji

$$V = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_{0n}} \sum_{i=1}^n \{\log f_n(X_i) - e_{0n}\},$$

gdzie

$$e_{0n} = \int_0^1 \log f_n d\lambda \quad \text{oraz} \quad \sigma_{0n}^2 = \int_0^1 (\log f_n)^2 d\lambda - e_{0n}^2.$$

Jest chyba jasne, że w rozważanym zagadnieniu używanie V nie jest możliwe, bo f_n nie jest znane. Test ten jest jednakże rodzajem pewnego wzorca pokazującego jaka maksymalna moc jest teoretycznie możliwa do uzyskania w punkcie f_n, przy danym n i α. Przy takim wyborze V zawsze mamy $\mathcal{E}_{W,V} \leq 1$. Jeśli dla jakiegoś ciągu $\{f_n\}$ zachodzi równość, to mówimy, że W jest optymalny przy $\{f_n\}$. Porównując także inne testy do wzorca V dostajemy jednocześnie informację o ich wzajemnej relacji. Odpowiednik (8) dla V można wydedukować z raportu Booka (1996) (por. twierdzenie 5.8 w pracy [21]).

Rozwinięta przez nas teoria pozwala liczyć $\mathcal{E}_{W,V}$ dla dowolnych ciągów alternatyw spełniających $H(f_n, f_0) \to 0$ i $nH^2(f_n, f_0) \to \infty$. Jednakże dla prostoty prezentacji przedstawimy postać efektywności $\mathcal{E}_{W,V}$ jedynie dla wybranej, standardowej w literaturze, klasy ciągów $\{f_n\}$. Mianowicie, rozważymy wszystkie ciągi o elementach postaci

$$f_n(x) = 1 + \theta_n a(x), \quad \theta_n \to 0, \quad n\theta_n^2 \to \infty, \tag{10}$$

gdzie

$$a \in \mathcal{A} = \left\{ a : \sup_{x\in[0,1]} |a(x)| < \infty, \int_0^1 a d\lambda = 0, \int_0^1 a^2 d\lambda = 1 \right\}. \tag{11}$$

Poniższe twierdzenie pochodzi z pracy T. Inglota i T. Ledwiny [22].

TWIERDZENIE 3. *Dla każdego ciągu alternatyw* $\{f_n\}$ *danego przez* (10) *i* (11) *oraz* $\{\alpha_n\}$ *zdefiniowanego wzorem* (12) *zachodzi*

$$\mathcal{E}_{W,V} = (\pi \|A\|)^2,$$

gdzie

$$A(x) = \int_0^x a d\lambda, \qquad \|A\| = \left\{ \int_0^1 A^2 d\lambda \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi j} \right)^2 c_j^2 \right\}^{1/2},$$

$$c_j = \int_0^1 a C_j d\lambda,$$

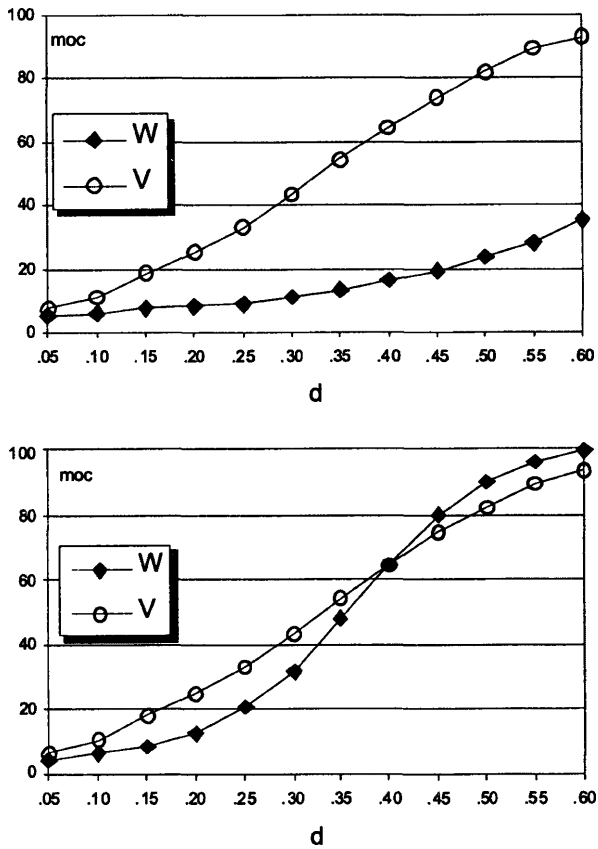
a $C_j(x) = \sqrt{2}\cos(j\pi x)$. *Związana z* $\{f_n\}$, *postać* α_n, *gwarantująca niezdegerowaną asymptotyczną moc* $\beta \in (0,1)$, *jest dana przez*

$$\alpha_n = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\pi^2 (n\theta_n^2) \|A\|^2 + O(\sqrt{n}\theta_n) \right\}. \tag{12}$$

Ponieważ $\int a^2 = 1$, powyższy wynik implikuje, że $\mathcal{E}_{W,V} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a(x) = C_1(x)$. Dla każdego innego $a \in \mathcal{A}$ mamy $\mathcal{E}_{W,V} < 1$. W szczególności, dla $a(x) = C_j(x)$, $j = 2, 3, \ldots$ otrzymujemy

$$\mathcal{E}_{W,V} = 1/j^2. \tag{13}$$

Wynik ten jest zgodny z opisowymi rezultatami Neuhausa [47]. Interpretacja (13) jest następująca. Dla uzyskania przez W takiej samej mocy jaką ma V, wyliczone na bazie n obserwacji, należy wziąć dla powyższych lokalnych alternatyw nj^2 obserwacji. Oczywiście, w praktyce mamy ustalone α i n oraz ustalone alternatywy. Badania symulacyjne pokazują jednakże, że lokalna teoria ma sensowne odzwierciedlenie w rzeczywistej sytuacji. Dla ilustracji



Rys. 4. Empiryczne moce testów Neymana-Pearsona (V) i Craméra-von Misesa (W) przy $\alpha = 0{,}05$ i alternatywach $1 + d\cos(2\pi x)$, $d = 0{,}05, \ldots, 0{,}60$. Góra: empiryczne moce V i W przy $n = 50$. Dół: empiryczna moc V przy $n = 50$ i empiryczna moc W przy $n = 200$.

przytaczamy jeden z rysunków z pracy [24] (rys. 4). Analogiczne rozważania i ilustracje dla testu Kołmogorowa-Smirnowa podano w [25].

Zastosowanie efektywności Kallenberga do porównywania N_{S1} i V jest dużo bardziej złożone. W szczególności, dla N_{S1} nie istnieją umiarkowane odchylenia w pełnym zakresie $\{x_n\}$ (odpowiednik (8)). Ponadto, oprócz zgrania temp zbieżności $\{f_n\}$ i $\{\alpha_n\}$, trzeba jeszcze uwzględnić tempo w jakim przyrasta długość listy modeli $d(n)$. Tym niemniej daje się pokazać (por. T. Inglot i T. Ledwina [21], [22] i T. Inglot [16]), że przy szerokiej klasie alternatyw $\{f_n\}$ zbieżnych do f_0 w tempie wolniejszym niż $1/\sqrt{n}$ zachodzi $\mathcal{E}_{N_{S1},V} = 1$. Była to pierwsza znana nam konstrukcja o takiej własności. Można też pokazać, że podobny wynik zachodzi dla N_{T1}.

W 2003 r. Baraud, Huet i Laurent podali alternatywną konstrukcję, która też jest optymalna w sensie Kallenberga (por. T. Inglot i T. Ledwina [26]).

Na zakończenie chcielibyśmy przedstawić kilka uwag na temat interpretacji wyniku $\mathcal{E}_{N_{S1},V} = 1$. Nie można zapomnieć, że jest to wynik graniczny,

osiągnięty dla pewnej pomocniczej abstrakcyjnej sytuacji i jego przeniesienie na sytuację rzeczywistą, gdzie mamy ustalone n, α i alternatywę (dla nas nieznaną), nie może być literalne. Zbieżność do wartości 1 nie jest jednostajna po klasie alternatyw. Tak więc, jeśli rozpatrujemy np. empiryczne moce N_{S1} przy alternatywach typu $1 + dC_j(x)$ i danym n oraz α (por. rys. 2. i podane tam warunki), to nie należy oczekiwać, że dla wszystkich $j = 1, 2, \ldots$ moc testu N_{S1} będzie jednakowo bliska mocy testu najlepszego; to jest .90. Konstrukcja N_{T1} pokazuje, że dla skończonego n inny asymptotycznie optymalny test może mieć nieco inną funkcję mocy (por. rys. 3.). Wynik $\mathcal{E}_{N_{S1},V} = 1$ oznacza, że konstrukcja T. Ledwiny (1994), wraz ze wzrostem n, wyciąga, w pewnym sensie, całą dostępną informację o alternatywie, która jest zawarta w próbie $X_1, \ldots, X_n$. Wynik ten wskazuje również, że nazwa adaptacyjny test Neymana jest adekwatna i dobrze uzasadniona. Konstrukcja N_{T1} pokazała z kolei, że dla skończonego n asymptotycznie optymalne rozwiązanie można jeszcze poprawić.

Podziękowania. Niniejszy tekst pokrywa się w dużej mierze z treścią wykładu wygłoszonego na XVI Zjeździe Matematyków Polskich we Wrocławiu w 2005 r. Autorka dziękuje Organizatorom za zaproszenie, a prof. dr hab. R. Dudzie za propozycję przesłania tego tekstu do *Wiadomości Matematycznych*.

Literatura

[1] J. Arbuthnott, *An argument for Divine Providence, taken from the constant regularity observ'd in the births of both sexes*, Philos. Trans. Roy. Soc., London., **27** (1710), 186–190.

[2] Y. Baraud, S. Huet, B. Laurent, *Adaptive tests of linear hypotheses by model selection*, Ann. Statist. **31** (2003), 225–251.

[3] A. R. Barron, T. M. Cover, *Minimum complexity density estimation*, IEEE Trans. Inf. Th. **37** (1991), 1034–1054.

[4] D. Bernoulli, *Quelle est la cause physique de l'inclinaison de planètes...*, Recueil des Pièces qui ont Remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences **3** (1734), 95–122.

[5] P. J. Bickel, Y. Ritov, *Testing for goodness of fit: a new approach*, w: A. K. Md. E. Saleh (redaktor), *Nonparametric Statistics and Related Topics*, North-Holland, Amsterdam 1992, 51–57.

[6] M. Bogdan, *Data driven versions of Pearson's chi-squre test for uniformity*, J. Statist. Comput. Simulation **52** (1995), 217–237.

[7] H. Cramér, *On the composition of elementary errors. Second paper: statistical applications*, Skand. Aktuarietidskrift. **11** (1928), 141–180.

[8] H. Cramér, *Collected Works, I*, A. Martin-Löf (edytor), Springer, Berlin 1993.

[9] R. B. D'Agostino, M. A. Stephens, *Goodness-of-Fit Techniques*, Marcel Dekker, New York 1986.

[10] G. R. Ducharme, T. Ledwina, *Efficient and adaptive nonparametric test for the two-sample problem*, Ann. Statist. **31** (2003), 2036–2058.

[11] J. Durbin, *Distribution Theory for Tests Based on the Sample Distribution Function*, SIAM, Philadelphia 1973.

[12] F. Y. Edgeworth, *Methods of Statistics, Jubilee volume of the Statist. Soc.*, E. Stanford, London 1885.

[13] R. L. Eubank, J. D. Hart, *Testing goodness of fit in regression via order selection criteria*, Ann. Statist. **20** (1992), 1412–1425.

[14] J. Gavarret, *Principes géneraux de statistique médicale*, Paris 1840.

[15] C. Huyghens, *De ratiociniis in ludo aleae, Exercitationum Mathematicarum*, 517–534, Leiden 1657.

[16] T. Inglot, *Generalized intermediate efficiency of goodness of fit tests*, Math. Methods Statist. **8** (1999), 487–509.

[17] T. Inglot, A. Janic-Wróblewska, *Data driven chi-square test for uniformity with unequal cells*, J. Stat. Comput. Simulation **73** (2003), 545–561.

[18] T. Inglot, W. C. M. Kallenberg, T. Ledwina, *Vanishing shortcoming of data driven Neyman's tests, Asymptotic Methods in Probability and Statistics*, w: B. Szyszkowicz (redaktor), *A volume to honour Miklós Csörgő*, Elsevier, Amsterdam 1978, 811–829.

[19] T. Inglot, W. C. M. Kallenberg, T. Ledwina, *Vanishing shortcoming and asymptotic relative efficiency*, Ann. Statist. **28** (2000), 215–238

[20] T. Inglot, T. Ledwina, *On probabilities of excessive deviations for Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises and chi-square statistics*, Ann. Statist. **18** (1990), 1491–1495.

[21] T. Inglot, T. Ledwina, *Asymptotic optimality of data driven Neyman's tests for uniformity*, Ann. Statist. **24** (1996), 1982–2019.

[22] T. Inglot, T. Ledwina, *Intermediate approach to comparison of some goodness-of-fit tests*, Ann. Inst. Statist. Math. **53** (2001), 810–834.

[23] T. Inglot, T. Ledwina, *Asymptotic optimality of data driven smooth tests for location-scale family*, Sankhy-a, Ser. A. **63** (2001), 41–71.

[24] T. Inglot, T. Ledwina, *On consistent minimax distinguishability and intermediate efficiency of Cramér-von Mises test*, J. Statist. Plan. Inference. **124** (2004), 453–474.

[25] T. Inglot, T. Ledwina, *Intermediate efficiency of some max-type statistics*, J. Statist. Plan. Inference (w druku).

[26] T. Inglot, T. Ledwina, *Asymptotic optimality of new adaptive test in regression model*, Annales de L'Institut Henri Poincaré, Probab. & Stat. (w druku).

[27] T. Inglot, T. Ledwina, *Towards data driven selection of a penalty function for data driven Neyman tests*, Linear Algebra Appl., A volume to honour Ingram Olkin (w druku).

[28] A. Janic-Wróblewska, T. Ledwina, *Data driven rank test for two-sample problem*, Scand. J. Statist. **27** (2000), 281–297.

[29] W. C. M. Kallenberg, *Asymptotic Optimality of Likelihood Ratio Tests in Exponential Families*, Mathematical Centre Tracts No. 77, Amsterdam 1978.

[30] W. C. M. Kallenberg, *Intermediate efficiency, theory and examples*, Ann. Statist. **11** (1983), 170–182.

[31] W. C. M. Kallenberg, T. Ledwina, *Consistency and Monte Carlo simulation of data driven version of smooth goodness of fit tests*, Ann. Statist. **23** (1995), 1594–1608.

[32] W. C. M. Kallenberg, T. Ledwina, *Data driven smooth tests when the hypothesis is composite*, J. Amer. Statist. Assoc. **92** (1997), 1094–1104.

[33] W. C. M. Kallenberg, T. Ledwina, *Data driven rank tests for independence*, J. Amer. Statist. Assoc. **94** (1999), 285–301.

[34] M. G. Kendall, R. L. Plackett (redaktorzy), *Studies in the History of Statistics and Probability*, II. Charles Griffin & Co Ltd, London 1977.

[35] A. Kolmogorov, *Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione*, Ist. Ital. Attuari, G., **4** (1933), 1–11.

[36] S. Kotz, N. L. Johnson (redaktorzy), *Breakthroughs in Statistics, I (Foundations and Basic Theory)*, Springer-Verlag, New York 1992.

[37] S. Kotz, N. L. Johnson, (edytorzy), *Breakthroughs in Statistics, II (Methodology and Distributions)*, Springer-Verlag, New York 1992.

[38] A. D. Lanterman, *Schwarz, Wallace, and Rissanen: intertwining themes in theories of model selection*, Int. Statist. Rev. **69** (2001), 185–212.

[39] P. S. Laplace (1773), *Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes*, Mem. Acad. Roy. Sci. Paris, **VII** (1776), 503–524.

[40] L. Le Cam, E. L. Lehmann, *J. Neyman On the occasion of his 80th birthday*, Ann. Statist. **2** (1974), vii–xiii.

[41] T. Ledwina, *Data driven version of the Neyman smooth test of fit*, J. Amer. Statist. Assoc. **89** (1994), 1000–1005.

[42] T. Ledwina, *Idee Neymana w teorii testowania hipotez*, w: S. Domoradzki, Z. Pawlikowska-Brożek, D. Węglowska (redaktorzy), *XII Szkoła Historii Matematyki*, Wydawnictwo AGH (1999), 37–44.

[43] E. L. Lehmann, *Testing Statistical Hypotheses*, Wiley, New York 1986.

[44] W. Lexis, *Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik*, Strassburg 1875.

[45] W. Lexis, *Zur Theorie der Massenerscheinungen in der Menschlichen Gesellschaft*, Wagner, Freiburg 1877.

[46] R. von Mises, *Vorlesungen aus dem Gebiete der Angewandten Mathematik, 1, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik*, Deuticke, Leipzig 1931.

[47] G. Neuhaus, *Asymptotic power properties of the Cramér-von Mises test under contiguous altermatives*, J. Multivariatre Anal. **6** (1976), 95–110.

[48] G. Neuhaus, *Addendum to: „Local asymptotics for linear rank statistics with estimated score functions"*, Ann. Statist. **16** (1988), 1342–1343.

[49] J. Neyman, *'Smooth' test for goodness of fit*, Scand. Aktuarietidskr. **20** (1937), 149–199.

[50] J. Neyman, *Optimal asymptotic tests of composite statistical hypotheses*, Probability and Statistics (The Harald Cramér Volume), 213–234, Almquist and Wiksells, Uppsala 1959.

[51] J. Neyman, E. S. Pearson, *On the use and interpretation of certain certain test criteria for purposes of statistical inference. Part I*, Biometrika **20** A (1928), 175–240.

[52] J. Neyman, E. S. Pearson, *On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference. Part II*, Biometrika **20** A (1928), 263–294.

[53] J. Neyman, E. S. Pearson, *On the problem of most efficient tests of statistical hypotheses*, Phil. Trans. Roy. Soc. A **231** (1933), 289–337.

[54] J. Neyman, E. S. Pearson, *Contributions to the theory of testing statistical hypotheses. Part I. Unbiased critical regions of type A and type A_1*, Statist. Res. Mem. **1** (1936), 1–37.

[55] J. Neyman, E. S. Pearson, *Contributions to the theory of testing statistical hypotheses. Part II. Certain theorems on unbiased critical regions of type A*, Statist. Res. Mem. **2** (1938), 25–57.

[56] Ya. Yu. Nikitin, *Asymptotic Efficiency of Nonparametric Tests*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995.

[57] E. S. Pearson, M. G. Kendall (redaktorzy), *Studies in the History of Statistics and Probability*, Carles Griffin & Co Ltd, London 1970.

[58] K. Pearson, *On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonable supposed to have arisen from random sampling London*, Edinburgh and Dublin Philos. Mag. and J. of Sci. **50** (1900), 157–172.

[59] A. V. Prohorov, *On sums of random vectors*, Theory Probab. Appl. **18** (1973), 186–188.

[60] D. B. Rubin, *Comment: Neyman (1923) and causal inference in experiments and observational studies*, Statist. Sci. **5** (1990), 472–480.

[61] G. Schwarz, *Estimating the dimension of a model*, Ann. Statist. **6** (1978), 461–464.

[62] N. V. Smirnov, *Sur la distribution de ω^2 (criterium de M. R. von Mises)*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **202** (1936), 449–452.

[63] J. Spława-Neyman, *On the application of probability theory to agricultural experiments. Essay on principles. Section 9*, Statist. Sci. **5** (1990), 465–472.

[64] S. M. Stigler, *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*, The Belkamp Press, Cambridge, 1986.

[65] *A Selection of Early Statistical Papers of J. Neyman*, University of California Press, Berkeley 1967.

[66] *Joint Statistical Papers of J. Neyman & E. S. Pearson*, University of California Press, Berkeley 1967.