BIULETYN PAŃSTWOWEGO INSTYTUTU GEOLOGICZNEGO 431: 251–258, 2008 R.

MODELOWANIE PRZEPŁYWU WODY W UTWORACH O PODWÓJNEJ POROWATOŚCI

MODELLING OF WATER FLOW IN DOUBLE-POROSITY MEDIA

ADAM SZYMKIEWICZ[1]

Abstrakt. Występujące w naturze grunty i skały często charakteryzują się obecnością dwóch systemów porów o odmiennych właściwościach filtracyjnych. Przykładem mogą być zarówno utwory, w których obok pierwotnej mikroporowatości wykształciła się sieć połączonych spękań, szczelin lub makroporów, jak też utwory zawierające soczewki, inkluzje bądź przewarstwienia o przewodności znacząco odbiegającej od materiału podstawowego. Ze względu na dużą różnicę charakterystycznego czasu filtracji w systemach mikro- i makroporów symulacja przepływu w utworach o podwójnej porowatości wymaga użycia specjalnych modeli matematycznych. Ich istotą jest odrębny opis przepływu w każdym z dwóch systemów przewodzących. W artykule przedstawiono podstawowe modele przepływu w ośrodkach o podwójnej porowatości i zachodzące między nimi relacje. Szczególną uwagę poświęcono modelom otrzymanym metodą homogenizacji.

Słowa kluczowe: ośrodki niejednorodne, ośrodki o podwójnej porowatości, porowatość wtórna, skały szczelinowe, modelowanie matematyczne, homogenizacja.

Abstract. Natural soils and rocks often contain two porous systems having different physical properties. The double-porosity structure is related either to the development of a network of secondary porosity (fractures, fissures or macropores) in a microporous matrix or to the presence of lenses or inclusions with the hydraulic conductivity very different from the background material. Since the characteristic time of flow in the two pore systems differs considerably, special models are required for double-porosity media. Such models describe separately the flow in each of the two pore systems. This paper presents the most common double-porosity models and discusses the relationship between them. Special attention is paid to the models obtained by the method of homogenization.

Key words: heterogeneous media, double-porosity media, secondary porosity, fractured rocks, mathematical modelling, homogenization.

WSTĘP

Przepływ wody w ośrodku porowatym można opisać równaniem różniczkowym cząstkowym o ogólnej postaci (np. Zaradny, 1990):

$$C\frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot \left[K\nabla\left(h - x_3\right)\right] = 0 \qquad [1]$$

w którym współczynnik pojemności C i współczynnik filtracji K zdefiniowane są następująco:

$$C = C\left(h\right) = \frac{\mathrm{d}\theta\left(h\right)}{\mathrm{d}h} + s\cdot\frac{\theta\left(h\right)}{n}, \; K = K\left(h\right) = K_S K_R\left(h\right) \qquad [2a, b]$$

gdzie:

- h – wysokość ciśnienia, [m]
- θ (h) – wilgotność objętościowa, [–]
- s – współczynnik pojemności sprężystej związany ze ściśliwością wody i szkieletu gruntowego, [m^{-1}]
- n – porowatość, [–]
- K_S – współczynnik filtracji w stanie nasyconym, [m·s^{-1}]

[1] Polska Akademia Nauk, Instytut Budownictwa Wodnego, ul. Kościerska 7, 80-328 Gdańsk; adams@ibwpan.gda.pl

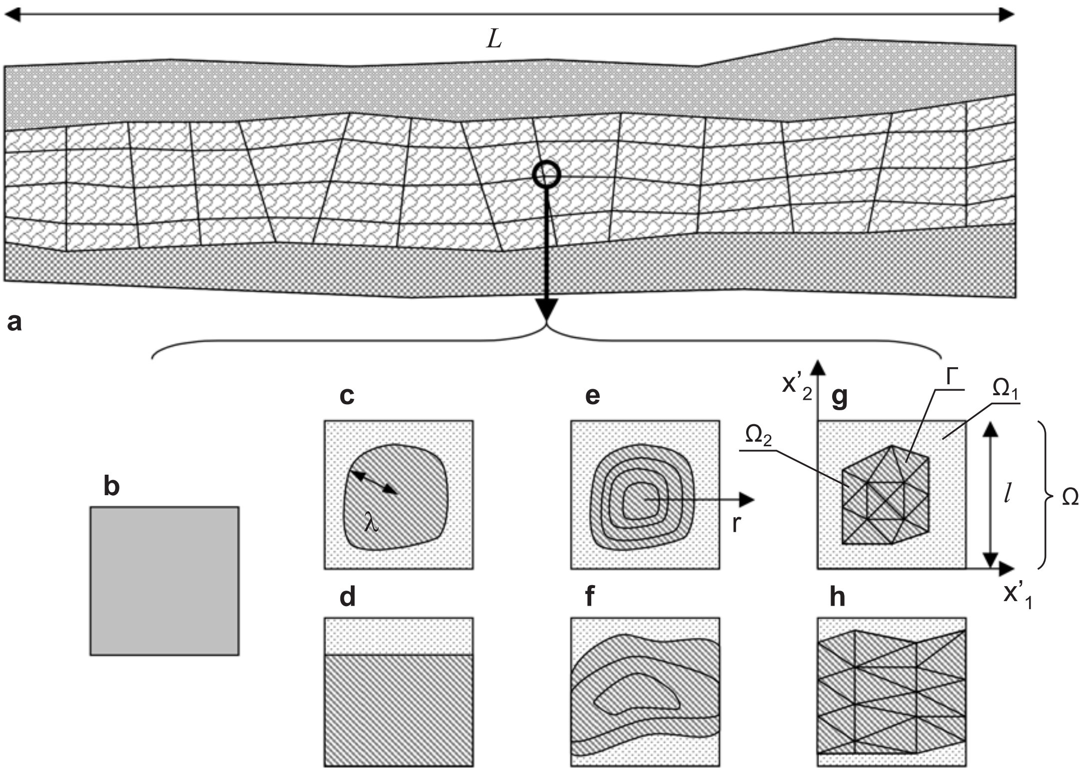

Fig. 1. Klasyfikacja modeli opisujących przepływ w ośrodku o podwójnej porowatości: a – makroskopowy obszar modelowania, b – model „pojedynczego kontinuum", c, d – modele „podwójnego kontinuum", e, f – modele MINC, g, h – modele otrzymane metodą homogenizacji

Classification of the models for flow in double-porosity media: **a** – macroscopic modelling domain, **b** – "single continuum" model, **c**, **d** – "dual continuum" models, **e**, **f** – MINC models, **g**, **h** – models obtained by homogenization

$K_R(h)$ – względny współczynnik filtracji w warunkach niepełnego nasycenia, [–]

t – czas, [s]

x_3 – współrzędna pionowa, [m].

Równanie [1] ma charakter ogólny i można je zastosować do opisu przepływu zarówno w strefie nasyconej, jak i nienasyconej. W strefie nasyconej $\theta(h) = n$ i $K_R(h) = 1$, zatem $C = s = \text{const}$ i $K = K_S = \text{const}$. W warunkach niepełnego nasycenia współczynniki C i K są zależne od wysokości ciśnienia.

Jednym z najistotniejszych problemów związanych z modelowaniem filtracji jest uwzględnienie niejednorodności utworów geologicznych. Szczególnym przypadkiem ośrodków niejednorodnych są utwory o podwójnej porowatości. Nazwą tą obejmuje się ośrodki charakteryzujące się obecnością dwóch systemów porowatych o różnych właściwościach hydraulicznych (fig. 1). Typowymi przykładami są skały spękane lub grunty z makroporami, w których na skutek różnego rodzaju procesów fizycznych, chemicznych i biologicznych wykształciła się porowatość wtórna tworząca sieć uprzywilejowanych dróg filtracji. Do grupy utworów o podwójnej porowatości zalicza się też grunty i skały zawierające soczewki, inkluzje lub przewarstwienia zbudowane z materiału porowatego o charakterystyce znacząco różnej od materiału podstawowego. Cechą tego typu ośrodków jest możliwość wyróżnienia pośredniej skali przestrzennej (skala lokalna lub mezoskopowa), znacznie większej od skali pojedynczych porów (skala mikroskopowa), a znacznie mniejszej od rozmiaru modelowanego obszaru (skala makroskopowa). Charakterystyczny wymiar tej skali jest związany z lokalną zmiennością parametrów ośrodka (np. rozstaw szczelin, rozmiar soczewki). Uwzględnienie takich niejednorodności w sposób jawny na siatce numerycznej jest bardzo trudne, a często wręcz niemożliwe. W praktyce konieczne jest zatem posługiwanie się modelami opisującymi zjawisko przepływu w skali makroskopowej. Podstawowe ich rodzaje zostaną omówione w dalszej części artykułu. Dla uproszczenia dwa systemy porów będą określane jako „mikropory" i „makropory", pamiętając, że pojęcie makroporów jest umowne i obejmuje również np. szczeliny w masywie skalnym lub dobrze przewodzące pory w piasku zawierającym soczewki gliny.

MODELE „POJEDYNCZEGO KONTINUUM"

Najbardziej intuicyjnym podejściem do modelowania przepływu w niejednorodnym ośrodku porowatym wydaje się wprowadzenie do równania [1] uśrednionych współczynników pojemności i przewodności. Wynika to z przyjęcia założenia, że niejednorodny ośrodek porowaty można zastąpić ośrodkiem równoważnym (ang. *equivalent continuum*) o parametrach uśrednionych (fig. 1b). Taki model został zaproponowany m.in. w pracy Petersa i Klavettera (1988). Równanie makroskopowe ma postać:

$$\left(f_1 C_1 + f_2 C_2\right)\frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\left(f_1 K_1 + f_2 K_2\right)\nabla\left(h - x_3\right)\right] = 0 \qquad [3]$$

gdzie indeksy 1 i 2 odnoszą się odpowiednio do systemu dobrze przewodzącego (makropory) i słabo przewodzącego (mikropory), a f_1 i f_2 oznaczają udział obu materiałów w ogólnej objętości ośrodka.

Efektywne współczynniki pojemności i filtracji są zdefiniowane jako średnie ważone współczynników lokalnych. Równanie [3] ma jednak ograniczone zastosowanie dla ośrodków o podwójnej porowatości. Duża różnica przewodności między systemem makroporów i mikroporów przekłada się bowiem na dużą różnicę w czasie reakcji obu systemów na zmianę warunków brzegowych. Charakterystyczny „dwuskładnikowy" charakter odpowiedzi ośrodka o podwójnej porowatości na wymuszenie zewnętrzne nie może być odwzorowany za pomocą modelu z parametrami uśrednionymi.

MODELE „PODWÓJNEGO KONTINUUM"

Modele te zakładają, że w skali makroskopowej ośrodek o podwójnej porowatości można przedstawić jako dwa nałożone na siebie kontinua, z których jedno reprezentuje system makroporów, a drugie mikroporów (np. Barenblatt i in., 1960; Warren, Root, 1963). Każdy system charakteryzuje się swoim własnym zestawem parametrów (porowatość, współczynniki przewodności i pojemności). W konsekwencji każdemu punktowi modelowanego obszaru odpowiadają dwie wartości potencjału hydraulicznego (odpowiednio dla makro- i mikroporów), a przepływ opisany jest dwoma sprzężonymi równaniami. W najbardziej ogólnym przypadku model „podwójnego kontinuum" ma postać (Barenblatt i in., 1960):

$$f_1 C_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} - \nabla \cdot \left[f_1 K_1 \nabla\left(h_1 - x_3\right)\right] + Q = 0 \qquad [4a]$$

$$f_2 C_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} - \nabla \cdot \left[f_2 K_2 \nabla\left(h_2 - x_3\right)\right] - Q = 0 \qquad [4b]$$

gdzie Q [s^{-1}] jest członem określającym natężenie wymiany wody między systemami mikro- i makroporów, w przeliczeniu na jednostkę objętości ośrodka. Na ogół człon Q wyraża się formułą pierwszego rzędu (Warren, Root, 1963; Gerke, van Genuchten, 1993) lub drugiego rzędu (Zimmerman i in., 1996):

$$Q = f_2 \frac{\beta}{\lambda^2}\gamma K_a\left(h_1 - h_2\right) \qquad [5a]$$

lub

$$Q = f_2 \frac{\beta}{2\lambda^2} K_a \frac{\left(h_1 - h_{2,i}\right)^2 - \left(h_2 - h_{2,i}\right)^2}{\left(h_2 - h_{2,i}\right)} \qquad [5b]$$

gdzie:

K_a – przewodność na granicy materiału mikro- i makroporowatego, [$m \cdot s^{-1}$]

β – współczynnik zależny od kształtu bloków mikroporowatych, [–]

λ – charakterystyczny wymiar bloku, [m]

γ – współczynnik korekcyjny (γ = 0,4 dla infiltracji w strefie nienasyconej, γ = 1 w pozostałych przypadkach), [–]

$h_{2,i}$ – początkowa wartość wysokości ciśnienia w blokach mikroporowatych, [m].

W przypadku gdy bloki mikroporowate są rozdzielone bądź tylko słabo połączone, przepływ w skali makroskopowej odbywa się poprzez sieć szczelin (makroporów), a bloki działają jak źródło bądź upust, pobierając lub oddając wodę do systemu szczelin. W takiej sytuacji równanie [4b] upraszcza się do postaci (Warren, Root, 1963):

$$f_2 C_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} - Q = 0 \qquad [6]$$

Aby odróżnić modele, w których uwzględnia się makroskopowy przepływ w mikroporach (równania [4a] i [4b], fig. 1d), od modeli, w których bloki działają wyłącznie jako źródło, te pierwsze często określa się mianem „modeli podwójnej przewodności" (ang. *double permeability models*), natomiast określenie „modele podwójnej porowatości" (ang. *double porosity models*) rezerwuje się dla przypadku drugiego (równania [4a] i [6], fig. 1c).

Inne założenie, często stosowane w przypadku skał spękanych, dotyczy małej pojemności szczelin w stosunku do matrycy mikroporowatej. Równanie [4a] opisujące przepływ w szczelinach przybiera wówczas postać:

$$-\nabla \cdot \left[f_1 K_1 \nabla\left(h - x_3\right)\right] + Q = 0 \qquad [7]$$

Natomiast przepływ w matrycy mikroporowatej może być w takim przypadku opisany równaniem [4b] lub [6].

MODEL MINC

W celu zwiększenia dokładności modelowania można uwzględnić lokalną zmienność potencjału w poszczególnych blokach mikroporowatych. Taka jest idea modelu zaproponowanego przez Pruessa i Narasimhana (1985) pod nazwą MINC (skrót od ang. *Multiple Interacting Continua*). W modelu tym każdemu punktowi obszaru makroskopowego **x** rzyporządkowany jest reprezentatywny blok mikroporowaty. Zakłada się, że wewnątrz bloku ciśnienie zmienia się przede wszystkim w funkcji odległości od najbliższej szczeliny, zaś ciśnienie w systemie szczelin otaczających blok zmienia się na tyle szybko, że można przyjąć taką samą jego wartość wokół całego bloku. Przepływ ma zatem charakter quasi-radialny i może być opisany równaniem:

$$C_2 \frac{\partial h_2'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(S(r) K_2 \frac{\partial h_2'}{\partial r} \right) = 0 \qquad [8]$$

gdzie:

- h'_2 – lokalna (zmienna) wartość potencjału wewnątrz bloku,
- r – odległość od najbliższej szczeliny,
- $S(r)$ – powierzchnia obejmująca punkty położone w tej samej odległości od powierzchni zewnętrznej bloku.

Dla celów obliczeniowych bloki dzielone są na pewną liczbę koncentrycznych powłok (fig. 1e), a równanie [8] dyskretyzuje się zgodnie z założeniami metody objętości skończonych. Metoda ta wymaga stosunkowo dużej liczby węzłów, co wynika z potrzeby dwupoziomowej dyskretyzacji (lokalnej i globalnej). Metodę MINC można również zaadaptować do przypadku z ciągłą matrycą mikroporowatą, wprowadzając połączenie między niektórymi lub wszystkimi powłokami sąsiadujących bloków (fig. 1f).

MODELE OTRZYMANE METODĄ HOMOGENIZACJI

Przedstawione powyżej modele określa się często w literaturze mianem modeli fenomenologicznych, gdyż w każdym z nich przyjęto pewne aprioryczne założenia dotyczące formy równań opisujących przepływ. Alternatywnym podejściem do problemu jest wyprowadzenie modelu bezpośrednio z równań opisujących przepływ w skali lokalnej. Można w tym celu użyć np. metody homogenizacji asymptotycznej. Jej zaletą, obok formalnej poprawności matematycznej, jest możliwość precyzyjnego określenia związku między równaniami opisującymi przepływ w różnych skalach oraz zakresu stosowalności otrzymanego modelu. Modele przepływu nasyconego i nienasyconego w ośrodkach o podwójnej porowatości otrzymane metodą homogenizacji przedstawiono m.in. w pracach Douglas i Arbogast (1990) oraz Lewandowska i in. (2004). W procesie homogenizacji wprowadza się szereg założeń, z których najważniejszymi są: (i) istnienie elementu reprezentatywnego (oznaczonego przez Ω, fig. 1g), zawierającego izolowane bloki mikroporowate (Ω_2) rozdzielone systemem szczelin (Ω_1); (ii) rozdzielność skal obserwacji, wyrażająca się warunkiem $\varepsilon = l / L \ll 1$; (iii) mała rola sił grawitacji w skali lokalnej. Szczególne znaczenie ma założenie dotyczące skali czasowej opisywanego zjawiska. Przepływ wody gruntowej ma charakter procesu dyfuzyjnego (współczynnik dyfuzji $D = K / C$), a zatem czas przepływu (reakcji systemu na wymuszenie brzegowe) jest proporcjonalny do kwadratu długości rozpatrywanego obszaru i odwrotnie proporcjonalny do współczynnika przewodności. Można wykazać (np. Lewandowska i in., 2004), że zjawiska charakterystyczne dla utworów o podwójnej porowatości („pamięć ośrodka") występują wtedy, gdy czas przepływu w szczelinach w skali globalnej jest tego samego rzędu co czas przepływu w pojedynczym bloku mikroporowatym, $L^2 C_1 / K_1 \approx l_2 C_2 / K_2$. Stąd wynika relacja między współczynnikami dyfuzji obu systemów $D_2 / D_1 = (K_2 C_1) / (K_1 C_2) \approx \varepsilon^2$. Dla tak sformułowanych założeń przepływ w systemie szczelin w skali makroskopowej jest opisany równaniem:

$$f_1 C_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K_{ij}^{eff} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h_1 - x_3 \right) \right] + Q = 0 \qquad [9]$$

gdzie $\mathbf{K}^{eff}$ jest efektywnym współczynnikiem filtracji systemu szczelin (w ogólnym przypadku wielkość tensorowa), zdefiniowanym następująco:

$$K_{ij}^{eff} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_1} K_1 \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\chi_i + x'_i \right) \mathrm{d}\Omega \qquad [10]$$

gdzie **x'** jest lokalną zmienną przestrzenną, a χ – funkcją wektorową, którą wyznacza się rozwiązując tzw. lokalny problem brzegowy dla obszaru pojedynczego elementu reprezentatywnego:

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \left[K_1 \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\chi_i + x'_i \right) \right] = 0 \ \mathrm{w} \ \Omega_1 \qquad [11a]$$

$$\left[K_1 \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\chi_i + x'_i \right) \right] n_i = 0 \ \mathrm{na} \ \Gamma \qquad [11b]$$

gdzie **n** jest wektorem jednostkowym prostopadłym do Γ.

W celu obliczenia wartości członu Q należy rozpatrzeć przepływ w pojedynczym bloku położonym w punkcie **x** obszaru rozwiązania. Natężenie wymiany wody dane jest całką:

$$Q = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} K_2 \frac{\partial h'_2}{\partial x'_i} n_i \mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_2} C_2 \frac{\partial h'_2}{\partial t} \mathrm{d}\Omega \qquad [12]$$

Wyznaczenie wartości całki wymaga znajomości lokalnego rozkładu potencjału w bloku $h_2'(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$, opisanego równaniem:

$$C_2 \frac{\partial h_2'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(K_2 \frac{\partial h_2'}{\partial x_i'} \right) = 0 \qquad [13]$$

przy czym na brzegu Γ zakłada się ciągłość potencjału: $h_2'(\mathbf{x}',\mathbf{x}, t) = h_1(\mathbf{x}, t)$.

Numeryczna implementacja modelu jest złożona, gdyż wymaga dwupoziomowej dyskretyzacji przestrzennej (podobnie jak w modelu MINC), przy czym siatka dla lokalnego przepływu w blokach jest w ogólnym przypadku trójwymiarowa.

W przypadku gdy stosunek dyfuzyjności obu systemów spełnia warunek $D_2/D_1 \approx \varepsilon^0 >> \varepsilon^2$ (małe różnice przewodności), przepływ jest opisany pojedynczym równaniem analogicznym do równania [3], z tym że przewodność efektywna jest funkcją K_1, K_2 i geometrii lokalnej, zdefiniowaną poprzez odrębny lokalny problem brzegowy (Lewandowska, Laurent, 2001). Równanie takie obowiązuje również dla ośrodka zawierającego izolowane makropory bądź szczeliny w ciągłej matrycy mikroporowatej (Lewandowska i in., 2005). W przypadku przepływu w strefie nienasyconej istotne znaczenie ma zmienność wartości współczynników przewodności i pojemności (a co za tym idzie także ich wzajemnego stosunku) w funkcji potencjału. Problem ten został uwzględniony w uogólnionym modelu zaproponowanym w pracy Szymkiewicza i Lewandowskiej (2006).

DYSKUSJA

OGÓLNA POSTAĆ MODELI

Modele fenomenologiczne w postaci równań [4a] i [6] oraz model MINC można uznać za uproszczone formy modelu otrzymanego metodą homogenizacji. Różnią się one brakiem definicji efektywnego współczynnika filtracji (co szerzej omówiono dalej) oraz zastosowaniem różnego typu aproksymacji członu wymiany. Można zauważyć, że dla bloków mikroporowatych o kształcie kuli lub koła równanie [13] można przekształcić do problemu jednowymiarowego we współrzędnych radialnych, formalnie równoważnego równaniu [8] metody MINC. Z kolei zastępując lokalnie zmienną wartość ciśnienia $h_2'(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ wartością uśrednioną $h_2(\mathbf{x})$ możemy otrzymać formuły [5a] i [5b]. Biorąc pod uwagę, że dla danego bloku mikroporowatego gradient potencjału na brzegu ~ $(h_1\text{-}h_2)/\lambda$, objętość bloku ~ λ^3, a jego powierzchnia zewnętrzna ~ λ^2, wzór [5a] można traktować jako zgrubne oszacowanie całki po Γ występującej we wzorze [12]. Z kolei wzór [5b] opiera się na wykorzystaniu przybliżonego rozwiązania analitycznego równania [8] dla bloku o kształcie kulistym (Zimmerman i in., 1996).

Różnice między poszczególnymi sposobami obliczania członu źródłowego można zilustrować rozpatrując przepływ w bloku dwuwymiarowym o kształcie prostokąta, o wymiarach 0,1 na 0,3 m w warunkach pełnego i częściowego nasycenia. W pierwszym przypadku przyjęto stałą początkową wartość potencjału h_0 = 10 m, potencjał wymuszony na brzegu h_b = 12 m oraz K / C = const = $4{,}5\times10^{-3}$ m/h. Dla przypadku nienasyconego przyjęto h_0 = –10 m, h_b = –0,01 m, zaś zależności *K(h)* i *C(h)* dane są funkcjami van Genuchtena (van Genuchten, 1980) z parametrami θ_R = 0,067, θ_S = 0,45, α = 2,0 m^{-1}, n_v = 1,81 i K_S = $4{,}5\times10^{-3}$ m/h. Dla tak sformułowanych warunków obliczono wartość członu Q (natężenie infiltracji w przeliczeniu na jednostkę objętości bloku) czterema metodami: (i) rozwiązując pełne zagadnienie dwuwymiarowe (metoda objętości skończonych, ze względu na symetrię obszar rozwiązania ograniczono do ¼ bloku, siatka jednorodna 120 na 40 komórek); (ii) rozwiązując zagadnienie jednowymiarowe metodą MINC (podział bloku na 10 koncentrycznych powłok); (iii) wg wzoru [5a]; (iv) wg wzoru [5b]. Dla formuł uproszczonych przyjęto współczynnik kształtu β = 5,54, wg Gerke i van Genuchten (1996). Zgodnie z propozycjami autorów wzorów [5a] i [5b] we wzorze [5a] przyjęto $K_a = \frac{1}{2}\left[K_2(h_1) + K_2(h_2)\right]$, a we wzorze [5b] $K_a = K_2(h_1)$. We wszystkich przypadkach stosowano krok czasowy $\Delta t = 10^{-4}$ h. Wyniki pokazano na figurach 2a (przepływ nasycony) i 2b (przepływ nienasycony). Jak widać, metoda MINC daje wyniki bardzo bliskie rozwiązaniu pełnego problemu dwuwymiarowego. Uproszczone formuły [5a] i [5b] są mniej dokładne, przy czym [5b] lepiej sobie radzi w początkowej fazie infiltracji, zaś [5a] w fazie końcowej.

Analizę metodą homogenizacji można rozszerzyć na przypadek utworów z ciągłą matrycą mikroporowatą. Ponieważ obszary mikroporowatości odpowiadające poszczególnym punktom **x** są ze sobą połączone, równania [13] opisujące przepływ lokalny będą ze sobą sprzężone, a zatem rozwiązanie modelu „zhomogenizowanego" wymagałoby podobnego nakładu pracy, co rozwiązanie dla ośrodka z pełnym opisem niejednorodności.

OSZACOWANIE EFEKTYWNEGO WSPÓŁCZYNNIKA FILTRACJI

Istotną zaletą metody homogenizacji wydaje się być uwzględnienie w modelu makroskopowym definicji efektywnego współczynnika filtracji dla systemu makroporów. W modelach fenomenologicznych zwykle przyjmuje się efektywną przewodność równą ważonej średniej arytmetycznej lub też pozostawia się ją jako parametr do wyznaczenia w procesie kalibracji modelu. Z drugiej strony, obliczanie przewodności efektywnej ośrodka niejednorodnego dla różnych skal obserwacji (ang. *permeability upscaling*) jest problemem szeroko opisywanym w literaturze hydrogeologicznej (np. Renard, de Marsilly, 1997), z tym że zazwyczaj

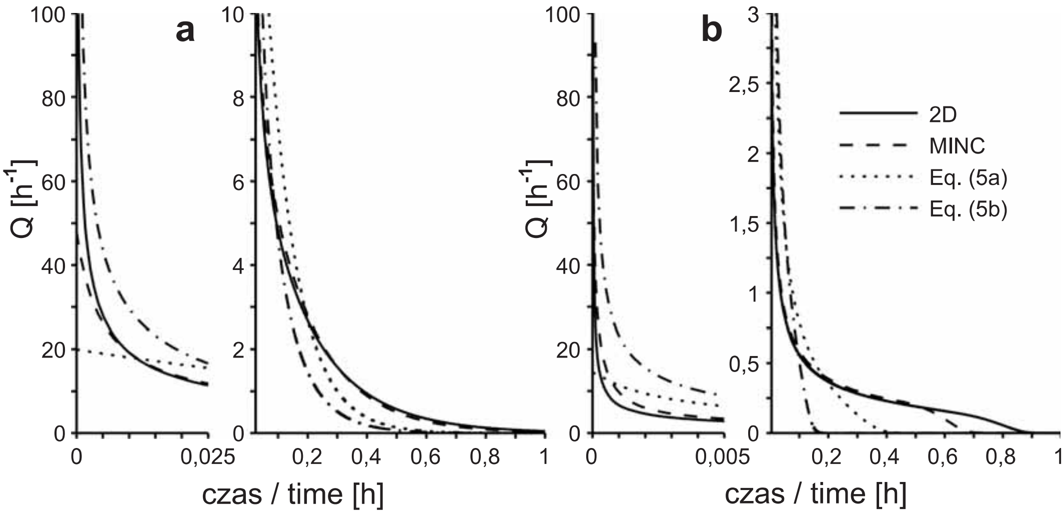

Fig. 2. Wartości członu wymiany *Q* obliczone dla bloku prostokątnego; a – przepływ nasycony, b – przepływ nienasycony

Water transfer intensity *Q* computed for a rectangular microporous block; **a** – saturated flow, **b** – unsaturated flow

wiąże się z modelem „pojedynczego kontinuum" (równanie [3]). Warto tutaj zauważyć, że efektywną przewodność często wyznacza się na podstawie rozwiązania równania filtracji ustalonej z periodycznymi warunkami brzegowymi, a zatem w sposób analogiczny do metody homogenizacji.

Można też wykazać, że ważona średnia arytmetyczna jest dokładnym oszacowaniem efektywnego współczynnika filtracji jedynie w przypadku, gdy linie prądu w obu systemach porowatych są do siebie równoległe (np. układ warstwowy). Dla każdej innej geometrii (np. bloki mikroporowate w formie prostopadłościanów, elipsoid itp.) przewodność efektywna będzie mniejsza od średniej arytmetycznej. W celu zilustrowania tego efektu przeprowadzono obliczenia wartości $\mathbf{K}^{eff}$ wg wzorów [10] i [11] dla dwóch przykładowych struktur ośrodka o podwójnej porowatości, pokazanych na fig. 3, zakładając że $K_1 = 1$, $K_2 = 10^{-4}$. Obliczenia przeprowadzono dla wielu różnych zawartości makroporów (od 1 do 50%). Lokalny problem brzegowy rozwiązano metodą objętości skończonych na siatkach 800 na 800 i 1200 na 600 komórek, odpowiednio dla geometrii A i B. Jak widać, wszystkie wartości $\mathbf{K}^{eff}$ są zdecydowanie niższe od średniej arytmetycznej. W przypadku geometrii B widać też wyraźną anizotropię ośrodka, której nie można odzwierciedlić stosując proste oszacowania współczynnika efektywnego, oparte jedynie na zawartości poszczególnych materiałów.

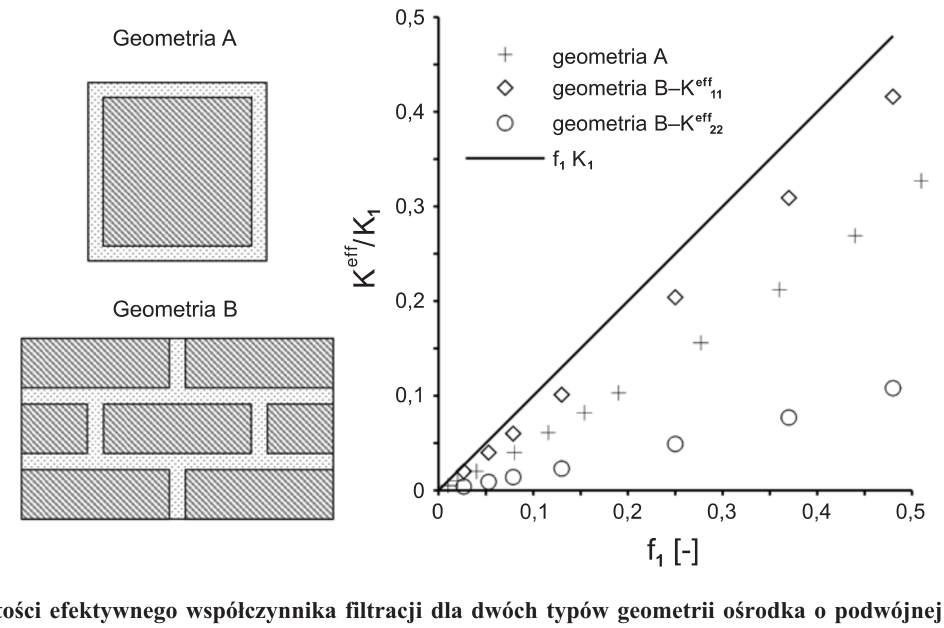

Fig. 3. Wartości efektywnego współczynnika filtracji dla dwóch typów geometrii ośrodka o podwójnej porowatości

Effective permeability coefficients for two types of double-porosity structure

PODSUMOWANIE

Przepływ w gruntach i skałach o podwójnej porowatości może być opisany przy użyciu szeregu różnych modeli o charakterze fenomenologicznym. Ich dokładność i zakres stosowalności można ocenić na drodze teoretycznej, przez porównanie z modelem otrzymanym metodą homogenizacji asymptotycznej. Wyniki homogenizacji wskazują, że w przypadku przepływu nieustalonego w utworach charakteryzujących się dużym lokalnym kontrastem przewodności z formalnego punktu widzenia nie można rozdzielić lokalnego i makroskopowego pola potencjału. Model „zhomogenizowany" można uznać za rozszerzoną formę modelu MINC, uzupełnioną o definicję makroskopowej przewodności ośrodka. Natomiast klasyczne modele „podwójnego kontinuum" należy uznać za formy uproszczone, z założenia obarczone błędem związanym z uśrednieniem potencjału w blokach mikroporowatych. Z kolei model „pojedynczego kontinuum" ma zastosowanie w przypadku małej różnicy przewodności między systemami makro- i mikroporów bądź w przypadku przepływu ustalonego.

LITERATURA

BARENBLATT G., ZHELTOV I., KOCHINA I., 1960 – Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. *J. Applied Mathematics and Mechanics* (PMM), **24**: 852–864.

DOUGLAS J. Jr., ARBOGAST T., 1990 – Dual porosity models for flow in naturally fractured reservoirs. *W*: (H. Cushman red.), Dynamics of fluids in hierarchical porous media: 177–221. Academic Press, London.

GERKE H.H., van GENUCHTEN M.TH., 1993 – Evaluation of a first-order water transfer term for variably saturated dual-porosity flow models. *Water Resour. Res.*, **29**: 1225–1239.

GERKE H.H., van GENUCHTEN M.TH., 1996 – Macroscopic representation of structural geometry for simulating water and solute movement in dual-porosity media. *Adv. Water Resour.*, **19**: 343–357.

LEWANDOWSKA J., LAURENT J.-P., 2001 – Homogenization modeling and parametric study of moisture transfer in an unsaturated heterogeneous porous medium. *Transport in Porous Media*, **45**: 321–345

LEWANDOWSKA J., SZYMKIEWICZ A., AURIAULT J.-L., 2005 – Upscaling of Richards equation for soils containing highly conductive inclusions. *Adv. Water Resour*., **28**: 1159–1176.

LEWANDOWSKA J., SZYMKIEWICZ A., BURZYŃSKI K., VAUCLIN M., 2004 – Modeling of unsaturated water flow in double porosity soils by the homogen+ization approach. *Adv. Water. Resour.*, **27**: 283–296.

PETERS R.R., KLAVETTER E.A., 1988 – A continuum model for water movement in an unsaturated fractured rock mass. *Water Resour. Res.*, **24**: 416–430.

PRUESS K., NARASIMHAN T., 1985 – A practical method for modeling fluid and heat flow in fractured porous media. *Soc. Pet. Eng. J.*, **25**: 14–26.

RENARD P., de MARSILLY G., 1997 – Calculating effective permeability: a review. *Adv. Water Resour.*, **20**: 253–278.

SZYMKIEWICZ A., LEWANDOWSKA J., 2006 – Unified macroscopic model for unsaturated water flow in soils of bimodal porosity. *Hydrol. Sc. J.*, **51**: 1106–1124.

Van GENUCHTEN M., 1980 – A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sc. Soc. Am. J.*, **44**: 892–898.

WARREN J.R., ROOT P.J., 1963 – The behavior of naturally fractured reservoirs. *Soc. Pet. Eng. J.,* **3**: 245–255.

ZARADNY H., 1990 – Matematyczne metody opisu i rozwiązań zagadnień przepływu wody w nienasyconych i nasyconych gruntach i glebach. *Pr. Inst. Budow. Wodnego PAN*, **23**.

ZIMMERMAN R.W., HADGU T., BODVARSSON G.S., 1996 – A new lumped-parameter model for flow in unsaturated dual-porosity media. *Adv. Water Resour.*, **19**: 317–327.

SUMMARY

Groundwater flow in double-porosity soils and rocks can be described by a variety of phenomenological models. Their accuracy and domain of validity can be assessed theoretically by comparison with the model obtained by asymptotic homogenization, which represents a mathematically rigorous description of flow in a double-porosity medium. Homogenization shows that for unsteady flow in media with high local permeability contrast, it is impossible to decouple local and macroscopic potential fields. The homogenized model can be considered as an extension of the MINC model, which additionally includes the definition of effective permeability. In contrast, the classical "dual continuum" models should be regarded as simplified forms, with inherent error related to the introduction of averaged potential in microporus blocks. Finally, the "equivalent continuum" approach is suitable for media with small difference in permeability between micropores and macropores, or for steady-state flow.