MINUT 2021 (3), s. 31–41
ISSN 2719-3063

Alicja SAMULEWICZ[1]

[1]Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Dziedzina funkcji jednej zmiennej

Streszczenie. W artykule przedstawione zostały podstawowe metody wyznaczania dziedziny funkcji jednej zmiennej. Opracowanie przeznaczone jest dla studentów pierwszego roku studiów pierwszego stopnia i licealistów, przy czym uczniowie szkół średnich mogą pominąć przykłady, w których występują funkcje cyklometryczne. Nauczyciele znajdą tu przykładowy konspekt ćwiczeń. Uzupełnienie artykułu stanowi wybór przykładów do samodzielnego rozwiązania, które mogą być wykorzystane jako zadania domowe.

Słowa kluczowe: dziedzina, funkcja rzeczywista, funkcja jednej zmiennej.

1. Wstęp

Dziedzina funkcji to zbiór wszystkich argumentów tej funkcji, czyli tych elementów, którym funkcja przyporządkowuje wartości. W tym opracowaniu rozważane są wyłącznie funkcje rzeczywiste jednej zmiennej rzeczywistej, co oznacza, że zarówno argumenty, jak i wartości będą liczbami rzeczywistymi. Tego typu funkcje są stosowane między innymi w geometrii i fizyce do opisu zależności pomiędzy różnymi wielkościami.

Bardzo często dziedzina określona jest już w opisie funkcji. Symbol $f\colon X \to \mathbb{R}$ oznacza, że dziedziną funkcji f o wartościach rzeczywistych jest zbiór X, który w przypadku funkcji jednej zmiennej rzeczywistej zawsze jest podzbiorem $\mathbb{R}$. W takiej sytuacji przy zapisie $f\colon X \to \mathbb{R}$ podaje się wzór funkcji, który określa sposób obliczania wartości funkcji dla danego argumentu x, np. $f\colon [1,9] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$ oznacza, że argumenty x funkcji f należą do przedziału $[1,9]$, przy czym funkcja f każdej liczbie $x \in [1,9]$ przyporządkowuje liczbę $x^2 - 3$. Dziedzinę funkcji f oznacza się przeważnie symbolem D_f; odpowiednio dziedzinę funkcji g oznaczymy D_g.

W wielu przypadkach dziedzina funkcji związana jest z zastosowaniem tej funkcji do opisu określonych zjawisk. Dziedziną funkcji opisującej objętość kuli w zależności od jej promienia jest zbiór liczb dodatnich, ponieważ promień kuli z założenia jest wielkością dodatnią. Wprawdzie wartość funkcji danej wzorem $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ może być obliczona dla dowolnej liczby rzeczywistej r, ale tylko dla $r > 0$ może być interpretowana jako objętość kuli o promieniu r. Można dopuścić też $r = 0$ — mamy wówczas kulę zdegenerowaną do punktu, której objętość (zgodnie ze wzorem) jest równa zero.

Autor korespondencyjny: A. Samulewicz (Alicja.Samulewicz@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 16.02.2021.

Dwie funkcje są równe, gdy mają tę samą dziedzinę i tym samym argumentom przyporządkowują te same wartości. Może się zdarzyć, że dwie równe sobie funkcje są opisane różnymi wzorami, ale ich dziedziny muszą być takie same.

Przykład 1. Rozważmy następujące funkcje:

$$\begin{aligned} &f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, && f(x) = x^2, \\ &g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && g(x) = x^2, \\ &h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, && h(x) = (x-2)\cdot(x+2)+4. \end{aligned}$$

Funkcje f i g nie są równe. Co prawda są opisane tym samym wzorem, ale mają różne dziedziny. Funkcje f i h mają tę samą dziedzinę, a przy tym $h(x) = (x-2)\cdot(x+2)+4 = x^2 = f(x)$ dla każdego $x \in (0,\infty)$, więc $f = h$.

2. Wyznaczanie dziedziny funkcji

Jeżeli w opisie funkcji podany jest tylko jej wzór, przyjmuje się, że dziedziną jest największy zbiór, w którym wykonalne są wszystkie operacje definiujące funkcję. Wyznaczanie dziedziny funkcji sprowadza się do określenia tego zbioru, nazywanego *dziedziną naturalną* funkcji. Przydaje się przy tym znajomość własności pewnych szczególnych funkcji: potęgowych (zaliczają się do nich również funkcje pierwiastkowe), wykładniczych, logarytmicznych, trygonometrycznych i cyklometrycznych.

Wyznaczenie dziedziny funkcji ma kluczowe znaczenie przy badaniu jej własności. Może się okazać, że np. wszystkie argumenty danej funkcji należą do przedziału o skończonej długości — w takiej sytuacji nie będzie mowy o istnieniu asymptot poziomych lub ukośnych. Jeżeli dziedziną funkcji będzie skończony zbiór o niewielkiej liczbie elementów, to własności tej funkcji można szybko odczytać z tabeli wartości i nie trzeba stosować żadnych zaawansowanych narzędzi matematycznych. Może się również zdarzyć, że dziedzina funkcji będzie pusta, ponieważ dla żadnej liczby rzeczywistej nie mogą być wykonalne wszystkie operacje występujące we wzorze funkcji.

Przykład 2. Wyznaczymy dziedzinę funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \log_3(x-2).$$

Pierwiastek kwadratowy (oraz dowolnego parzystego stopnia) można obliczyć tylko z liczby nieujemnej, dlatego liczba z dziedziny funkcji f musi spełniać nierówność

$$1 - x^2 \geq 0. \tag{1}$$

Dziedziną wszystkich funkcji logarytmicznych, w tym logarytmu o podstawie 2, jest zbiór liczb dodatnich $(0,\infty)$. Stąd otrzymujemy kolejne ograniczenie:

$$x - 2 > 0. \tag{2}$$

Nierówność kwadratową (1) zapisujemy w równoważnej postaci[1]:

$$x^2 - 1 \leq 0$$
$$(x-1)(x+1) \leq 0$$

i odczytujemy rozwiązanie:

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Z nierówności (1) i (2) otrzymujemy warunki $x \in [-1, 1]$ i $x > 2$, które nie mogą być spełnione równocześnie. Oznacza to, że dziedzina funkcji f jest zbiorem pustym.

Odpowiedź. $D_f = \emptyset$.

Najbardziej oczywistym ograniczeniem dotyczącym dziedziny jest niedopuszczalność dzielenia przez zero. Kolejne wiąże się z dziedziną pierwiastka stopnia $n \in \mathbb{N}$: dla n parzystych jest ona równa $[0, \infty)$, podczas gdy dla n nieparzystych jest to cały zbiór $\mathbb{R}$.

Przykład 3. Wyznaczmy dziedzinę funkcji

$$f(x) = \frac{x + \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{x^2-4}}.$$

W liczniku występuje pierwiastek stopnia parzystego, dlatego każdy element dziedziny musi spełniać nierówność

$$x + 1 \geq 0. \tag{3}$$

Pierwiastek w mianowniku ma stopień nieparzysty, dlatego jedyne ograniczenie wiąże się z miejscami zerowymi mianownika:

$$\sqrt[5]{x^2-4} \neq 0, \tag{4}$$

czyli $x \neq -2$ i $x \neq 2$. Stąd $x \in (-1, \infty) \setminus \{-2, 2\} = (-1, 2) \cup (2, \infty)$.

Odpowiedź. $D_f = (-1, 2) \cup (2, \infty)$.

Przykład 4. Wyznaczając dziedzinę funkcji

$$f(x) = \log_3 \left[x(x^2-1)(x^2-4)\right],$$

korzystamy z tego, że dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb dodatnich. W konsekwencji otrzymujemy nierówność

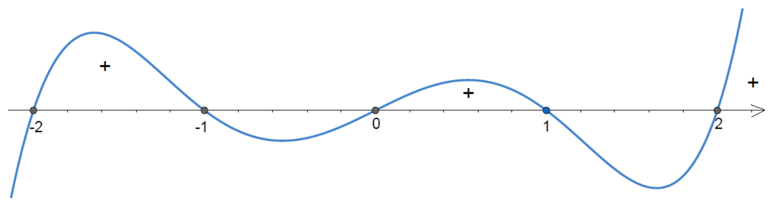
$$x(x^2-1)(x^2-4) > 0.$$

Znajdujemy pierwiastki (miejsca zerowe) wielomianu po lewej stronie:

$$x(x^2-1)(x^2-4) = x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

Są nimi liczby: 0, 1, -1, 2, -2 (wszystkie są pojedyncze). Zaznaczamy je na osi liczbowej i rysujemy przybliżony wykres wielomianu.

[1] Przy rozwiązywaniu nierówności $x^2 - a^2 \leq 0$ (czy $x^2 - a^2 \geq 0$) błędy zdarzają się częściej niż w przypadku innych nierówności kwadratowych. Wiele osób przekształca je do postaci $x^2 \leq a^2$ i wyciąga fałszywe wnioski.



Odczytujemy z niego zbiór rozwiązań nierówności, który jest dziedziną funkcji f. Jest to suma przedziałów $(-2,-1)\cup(0,1)\cup(2,\infty)$.

Odpowiedź. $D_f=(-2,-1)\cup(0,1)\cup(2,\infty)$.

Przykład 5. Wyznaczymy teraz dziedzinę funkcji

$$f(x)=\log_{x-1}(5-x).$$

Przypomnijmy, że logarytmować można tylko liczby dodatnie, a podstawami logarytmów mogą być wyłącznie liczby dodatnie różne od 1. Wobec tego elementy dziedziny muszą spełniać następujące warunki:

(i) $5-x>0$,

(ii) $x-1>0$,

(iii) $x-1\neq 1$.

Stąd $D_f=(1,2)\cup(2,5)$.

Przed omówieniem następnych przykładów przypomnijmy, że funkcje sinus i cosinus są określone w całym zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, dziedziną funkcji tangens jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$, a funkcji cotangens — zbiór $\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. Symbol $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych.

Przykład 6. Rozważmy funkcje $f(x)=\sin(\operatorname{tg} x)$ i $g(x)=\operatorname{tg}(\sin x)$. Dziedzina f jest taka sama jak dziedzina funkcji tangens: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. Jak wiadomo, $\sin x\in[-1,1]$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$. Ponieważ $[-1,1]\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, a $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\subset\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$, dziedziną funkcji g jest cały zbiór $\mathbb{R}$.

Przykład 7. Wyznaczymy dziedzinę funkcji

$$f(x)=\log_{0,3}(\operatorname{ctg} 2x-1)+\frac{x+\sqrt{-x}}{\sin x+\cos x}.$$

Elementy dziedziny muszą spełniać następujące warunki:

(i) $2x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$,
ponieważ $2x$ jest argumentem cotangensa,

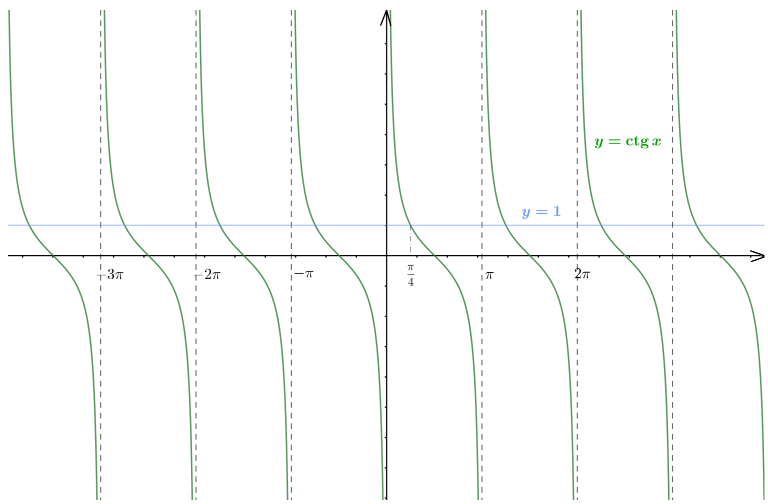
(ii) $\operatorname{ctg} 2x-1>0$,
bo liczba, z której oblicza się logarytm, musi być dodatnia,

(iii) $-x\geq 0$, czyli $x\leq 0$,
bo $-x$ występuje pod pierwiastkiem kwadratowym,

(iv) $\sin x + \cos x \neq 0$,
 ponieważ wyrażenie w mianowniku musi być różne od zera.

Rozwiązujemy nierówność z warunku (ii):

$$\operatorname{ctg} 2x - 1 > 0$$
$$\operatorname{ctg} 2x > 1$$
$$\operatorname{ctg} 2x > \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}.$$



Cotangens jest funkcją malejącą w każdym przedziale $(k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ i okresową o okresie π. Stąd

$$k\pi < 2x < k\pi + \frac{\pi}{4}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{k\pi}{2} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Zajmiemy się teraz warunkiem (iv). Zbiór rozwiązań nierówności $\sin x + \cos x \neq 0$ jest dopełnieniem zbioru rozwiązań równania

$$\sin x = -\cos x. \tag{5}$$

Korzystając z tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (znanej jako *jedynka trygonometryczna*), otrzymujemy zależności:

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Wobec tego rozwiązania równania (5) są postaci $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Przypomnijmy, że właśnie te liczby musimy wykluczyć z dziedziny rozważanej funkcji, ponieważ są miejscami zerowymi mianownika. Stąd elementy dziedziny należą do zbioru $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$.

W warunku (iv) można też zastosować inny sposób rozumowania. Z równania (5) wynika, że $\sin x \neq 0$ i $\operatorname{ctg} x = -1$. Stąd

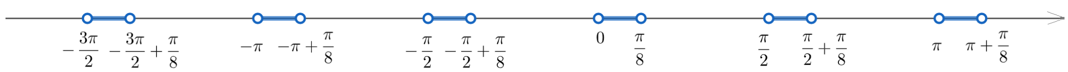
$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = 0,$$

co jest sprzeczne z warunkiem (ii).

Możemy teraz zapisać warunki (i)–(iv) w następujący sposób:

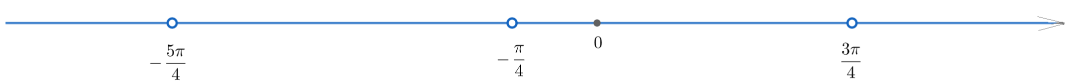
(i) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(ii) $\frac{k\pi}{2} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \qquad k \in \mathbb{Z}$,



(iii) $x \leq 0$,

(iv) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}$.



Elementy dziedziny muszą spełniać wszystkie powyższe ograniczenia, a więc

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{2}, -\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cup \ldots .$$

Aby skrócić zapis, możemy użyć symbolu sumy mnogościowej: $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{k\pi}{2}, -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$.

Odpowiedź. $D_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{k\pi}{2}, -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$.

We wzorze funkcji z następnych przykładów występują funkcje cyklometryczne, nazywane również kołowymi: arcsin, arccos, arctg i arcctg. Przypomnijmy, że dziedziną funkcji arcsin i arccos jest przedział $[-1, 1]$, natomiast funkcje arctg i arcctg są określone w całym zbiorze $\mathbb{R}$.

Przykład 8. Wyznaczymy dziedzinę funkcji

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{\operatorname{arcctg} x} + \arcsin(-3 + \log_{\frac{1}{2}} x).$$

Ponieważ dziedziną funkcji arctg i arcctg jest $\mathbb{R}$, rozważamy wyłącznie następujące warunki:

(i) $\operatorname{arcctg} x \neq 0$,
który jest spełniony dla wszystkich liczb $x \in \mathbb{R}$, ponieważ wartości funkcji arcctg należą do przedziału $(0, \pi)$;

(ii) $x > 0$,
ponieważ logarytmy są określone tylko dla liczb dodatnich;

(iii) $-1 \leq -3 + \log_{\frac{1}{2}} x \leq 1$
ze względu na dziedzinę funkcji arcsin. Z powyższej nierówności otrzymujemy

$2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 4.$

Zauważmy, że podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a więc $\log_{\frac{1}{2}}$ jest funkcją malejącą. Stąd

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^4$, czyli $x \in \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$.

Warunki (i)–(iii) spełniają liczby $x \in \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$.

Odpowiedź. $D_f = \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$.

Przykład 9. Wyznaczmy dziedzinę funkcji

$$f(x) = \sqrt[3]{2x-1} + \arccos \frac{x^2+1}{x^2-1}. \tag{6}$$

Pierwiastek stopnia nieparzystego jest określony dla wszystkich liczb rzeczywistych, wobec tego elementy dziedziny funkcji f muszą spełniać następujące warunki:

(i) $x^2 - 1 \neq 0$,
bo wyrażenie to znajduje się w mianowniku,

(ii) $-1 \leq \frac{x^2+1}{x^2-1} \leq 1$,
ponieważ dziedziną funkcji arccos jest przedział $[-1, 1]$.

Z (i) otrzymujemy

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \tag{7}$$

Warunek (ii) oznacza, że muszą być spełnione dwie nierówności:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} \leq 1 \tag{8}$$

oraz

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} \geq -1. \tag{9}$$

Zajmiemy się najpierw nierównością (8). Obie strony mnożymy przez kwadrat mianownika. Jest to liczba dodatnia, dzięki czemu nie zmieni się zwrot nierówności[2]. Mamy:

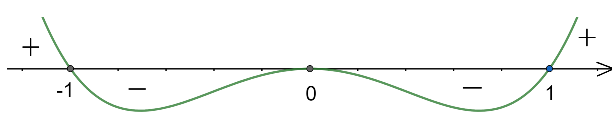
$$
\begin{aligned}
&(x^2+1)(x^2-1) \le (x^2-1)^2\\
&(x^2+1)(x^2-1) - (x^2-1)^2 \le 0\\
&(x^2-1)\left[(x^2+1)-(x^2-1)\right] \le 0\\
&(x^2-1)\cdot 2 \le 0\\
&(x+1)(x-1) \le 0,\\
&-1 \le x \le 1.
\end{aligned}
$$

Biorąc pod uwagę (7), otrzymujemy następujące rozwiązanie nierówności (8):

$$x \in (-1, 1). \tag{10}$$

W podobny sposób rozwiązujemy nierówność (9):

$$
\begin{aligned}
&(x^2+1)(x^2-1) \ge -(x^2-1)^2\\
&(x^2+1)(x^2-1) + (x^2-1)^2 \ge 0\\
&(x^2-1)\left[(x^2+1)+(x^2-1)\right] \ge 0\\
&(x^2-1)\cdot 2x^2 \ge 0\\
&(x+1)(x-1)x^2 \ge 0.
\end{aligned}
$$



Widzimy, że liczba 0 jest pierwiastkiem podwójnym tego wielomianu i pamiętamy, że $x \notin \{-1, 1\}$, a więc

$$x \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty). \tag{11}$$

Wszystkie warunki (7), (10) i (11) spełnia tylko liczba 0.

Odpowiedź. $D_f = \{0\}$.

Przy okazji zwróćmy uwagę na kilka ciekawych własności funkcji f z przykładu 9.
Jej jedyna wartość wynosi $f(0) = \sqrt[3]{-1} + \arccos 1 = -1 + 0 = -1$, dlatego możemy zastąpić wzór (6) bardziej czytelnym opisem, np. $f\colon \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(0) = -1$, czy nawet $f\colon \{0\} \to \{-1\}$.
Nawet nie znając żadnych twierdzeń o własnościach funkcji ciągłych, stwierdzamy, że funkcja ta jest ciągła, ponieważ jedynym jej argumentem jest punkt izolowany dziedziny.

[2] Przypomnijmy, że obustronne mnożenie przez mianownik nie daje takiej gwarancji. Mnożenie przez liczbę ujemną zmienia zwrot nierówności na przeciwny, dlatego jeżeli nie znamy znaku mianownika, lepiej zdecydować się na mnożenie przez jego kwadrat. Można też rozwiązać nierówność rozpatrując osobno przypadki z mianownikiem dodatnim i z mianownikiem ujemnym, ale ten sposób jest na ogół bardziej pracochłonny. Więcej o nierównościach wymiernych można znaleźć w artykule [1].

Możemy też od razu podać wzór funkcji odwrotnej:

$$f^{-1}\colon \{-1\} \to \{0\},$$

podczas gdy znalezienie tego wzoru wyłącznie przez odpowiednie przekształcanie wzoru (6) byłoby bardzo trudne. Pamiętajmy więc, że badanie jakichkolwiek własności funkcji należy rozpocząć od wyznaczenia jej dziedziny.

Przykład 10. Określimy dziedzinę funkcji

$$f(x) = \frac{\ln\left(\pi - 3\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{x^2 - x^3}} + \sqrt[6]{2 - |x|}.$$

Ze względu na operacje określające wartości funkcji elementy dziedziny muszą spełniać następujące warunki:

(i) $2 - |x| \geq 0$,
poniważ wyrażenie to jest argumentem pierwiastka stopnia parzystego,

(ii) $x^2 - x^3 \geq 0$ i $\sqrt{x^2 - x^3} \neq 0$,
bo $x^2 - x^3$ jest argumentem pierwiastka kwadratowego i $\sqrt{x^2 - x^3}$ znajduje się w mianowniku,

(iii) $\pi - 3\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} > 0$,
ponieważ logarytm jest określony tylko dla liczb dodatnich.

Wyznaczenie dziedziny sprowadza się do rozwiązania powyższych nierówności.

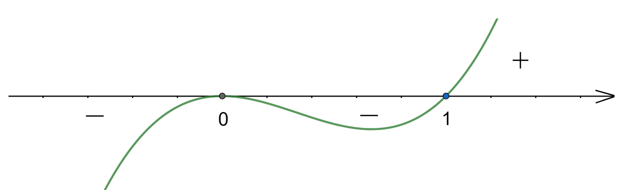
(i) Zapisujemy nierówność w równoważnej formie:

$$\begin{aligned} |x| &\leq 2 \\ -2 \leq x &\leq 2. \end{aligned}$$

Stąd $x \in [-2, 2]$.

(ii) Rozwiązujemy nierówność wielomianową

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 &< 0 \\ x^2(x-1) &< 0 \end{aligned}$$



Wobec tego $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

(iii) Przekształcamy nierówność

$$\begin{aligned} \pi &> 3\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} \\ \frac{\pi}{3} &> \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{arctg}\sqrt{3} &> \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ponieważ arctg jest funkcją rosnącą, otrzymujemy

$$\sqrt{3} > \frac{x}{\sqrt{3}}, \tag{12}$$

czyli $x < 3$.

Wszystkie trzy warunki (i)–(iii) są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in [-2, 0) \cup (0, 1)$.

Odpowiedź. $D_f = [-2, 0) \cup (0, 1)$.

Podsumowanie

Określenie dziedziny jest bardzo ważnym elementem badania własności funkcji. Jeżeli chcemy np. zbadać ciągłość, monotoniczność, wypukłość jakiejś funkcji, znaleźć asymptoty wykresu funkcji czy wyznaczyć funkcję odwrotną, to zawsze powinniśmy zacząć od wyznaczenia dziedziny funkcji.

W przypadku funkcji rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej wyznaczanie dziedziny sprowadza się zwykle do rozwiązania pewnego układu nierówności, dlatego wymaga wcześniejszego opanowania metod rozwiązywania nierówności różnych typów. Z drugiej strony zadania związane z wyznaczaniem dziedziny funkcji sprzyjają ugruntowaniu wiedzy o własnościach funkcji elementarnych i pozwalają rozwinąć umiejętność sprawnego rozwiązywania nierówności.

Przy omawianiu tego typu zadań przydatne mogą być informacje zebrane w poniższej tabeli:

Funkcja	Dziedzina	Zbiór wartości
$y = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$y = \sqrt[n]{x}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą parzystą	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt[n]{x}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą nieparzystą	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$y = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$y = \operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$

3. Zadania

Wyznacz dziedziny następujących funkcji:

a) $f(x) = \ln(4 - \sqrt{x+7})$

b) $f(x) = 2x + \sqrt{4 + x - x^2} - \sqrt[5]{\sin(x - 4x^2)}$

c) $f(x) = \sqrt{1 - \log_2(x^2 + 5x + 6)}$

d) $f(x) = 2^{-x} + \sqrt[4]{1 - |x^2 - 3x + 1|}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{9 - 3^x}$

f) $f(x) = \dfrac{\cos(2 - |x - 1|)}{\log_4(1 - \sin 2x)}$

g) $f(x) = \log_8(\operatorname{arcctg}(2x - 3))$

h) $f(x) = \arcsin \dfrac{x-1}{2} + \sqrt{2 - \ln x}$

i) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arcctg} 3x}{\sqrt{-\operatorname{arctg} x}}$

j) $f(x) = \arccos \dfrac{x-4}{x+3}$.

Odpowiedzi

a) $[-7, 9)$

b) $\left[\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right]$

c) $[-4, -3) \cup (-2, -1]$

d) $[0, 1] \cup [2, 3]$

e) $[-4, 2) \cup (2, 4]$

f) $\mathbb{R} \setminus \left(\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

g) $\mathbb{R}$

h) $(0, 3]$

i) $(-\infty, 0)$

j) $\left[\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

Podziękowania

Autorka pragnie podziękować recenzentom za cenne uwagi i pomoc przy redagowaniu ostatecznej wersji tekstu.

Literatura

1. K. Adrianowicz, *Rozwiązywanie nierówności wymiernych*, MINUT 2019 (1), s. 76–90, `https://minut.polsl.pl/articles/C_19_007.pdf`
2. R. Grzymkowski, *Matematyka dla studentów wyższych uczelni technicznych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2005.
3. R. Grzymkowski, *Matematyka. Zadania i odpowiedzi*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2005.
4. W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019.
5. E. Łobos, J. Macura, B. Sikora, *Calculus and linear algebra in exercises, Part 1*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2020.