

## Józef CIOŚMAK

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA, KATEDRA TELEKOMUNIKACJI, FOTONIKI I NANOMATERIAŁÓW  
Al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-314 Kielce

# Analiza efektywności transmisji danych pomiarowych w systemie zwielokrotnienia sygnałów z zastosowaniem transmultiplekserów

Dr inż. Józef CIOŚMAK

Ukończył studia na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Świętokrzyskiej w 1997 r. Prace doktorską obronił w 2007 w AGH. Jest adiunktem w Zakładzie Telekomunikacji Wydziału Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki PŚk. Jego zainteresowania naukowe koncentrują się wokół transmisji danych, lokalnych sieci bezprzewodowych, zastosowań elektroniki.



e-mail: jciosmak@tu.kielce.pl

### Streszczenie

Współczesne systemy pomiarowe bazujące na licznej grupie cyfrowych czujników pomiarowych przesyłają dane jednym torem z wykorzystaniem zwielokrotnienia czasowego. Alternatywą jest przesyłanie wielu niezależnych sygnałów równoległe w jednym kanale w postaci sygnału złożonego uzyskanego za pomocą układu transmultipleksera. Każda próbka sygnału złożonego zawiera fragment informacji ze wszystkich sygnałów pomiarowych. Jest wstępnie zakodowana i tym samym odporna na pojedyncze błędy transmisji. Podano przykład wielowejsiowego transmultipleksera z rzeczywistymi sygnałami pomiarowymi i wynikami obliczeń dokładności rekonstrukcji sygnałów źródłowych w funkcji liczby kanałów transmultipleksera i błędów wielokrotnych sygnału złożonego.

**Słowa kluczowe:** transmultipleksacja, perfekcyjna rekonstrukcja, zespoły filtrów.

## Analysis of the efficiency of measurement data transmission in a signal multiplication system with use of transmultiplexers

### Abstract

Contemporary measurement systems are based on a large group of measurement sensors with the digital output. Those sensors are usually joined in groups or teams and the obtain measurement data is sent by one line with use of time multiplication. Alternatively, we can send many independent signals parallel in one information channel as a complex signal obtained by means of the transmultiplexer configuration. The main component of the transmultiplexer are properly designed sets of connection/separation filters. The proposed solution based on FIR filters provides stability and accuracy of the reconstruction of source signals from a complex signal. Additionally, the complex signal is distracted both in time and frequency domain, and it links all those independent signals together. Every sample of the complex signal contains the part of the information from all the measurement signals. It is initially encoded and hence it is resistant to single transmission errors. There is given an example of the multi-input transmultiplexer together with the real measurement signals and the calculation results of the accuracy of source signal reconstruction in the function of the number of transmultiplexer channels and the multiple errors of the complex signal.

**Keywords:** transmultiplexer, perfect reconstruction, filter banks.

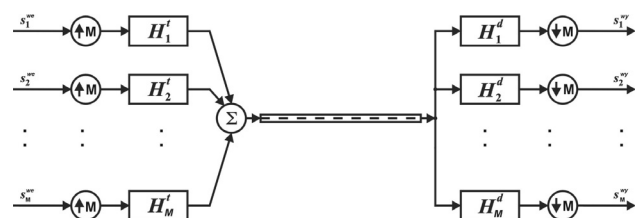
## 1. Wstęp

Określenie transmultipleksacja kojarzone jest głównie z konwersją danych z dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości (TDM→FDM) i odwrotnie z dziedziny częstotliwości do dziedziny czasu (TDM→FDM→TDM) [1]. Ogólnie transmultipleksacja polega na dodaniu zdefiniowanej liczby przefiltrowanych i nadpróbkowanych sygnałów wejściowych. Utworzony w ten sposób sygnał złożony jest transmitowany w pojedynczym kanale informacyjnym.

W odbiorniku następuje ponowna filtracja i podpróbkowanie – rekonstrukcja poszczególnych sygnałów źródłowych. Jakość rekonstrukcji zależy od zastosowanych zespołów filtrów transmultipleksacji/detransmultipleksacji. Początkowo były stosowane filtry pasmowo-przepustowe o idealnych teoretycznie charakterystykach częstotliwościowych [2, 3]. W praktyce taka struktura generowała przesłuchy oraz zniekształcała amplitudę i fazę sygnałów. Sformułowanie warunków perfekcyjnej rekonstrukcji przez Vetterliego pozwoliło na zaprojektowanie zespołu filtrów pasmowo-przepustowych o charakterystykach częściowo nakładających się oraz całkowicie eliminujących przesłuchy [4, 5]. W praktycznym wyznaczaniu współczynników filtrów pojawiają się błędy zaokrągleń oraz błędy precyzji procedur numerycznych. Pomimo tego błędy rekonstrukcji są o 3-5 rzędów wielkości mniejsze. W niniejszej pracy zastosowano układ transmultipleksera z filtrami „wszechprzepustowymi” [6]. „Wszechprzepustowość” oznacza tutaj, że wszystkie częstotliwości z zakresu  $f=0-f_s/2$  są wzmacniane lub tłumione – bez wyraźnej struktury pasmowej. Współczynniki poszczególnych filtrów wyznaczono numerycznie na podstawie rozwiązania układu równań, uzyskanego z analizy modelu matematycznego transmultipleksera.

## 2. Struktura transmultipleksera

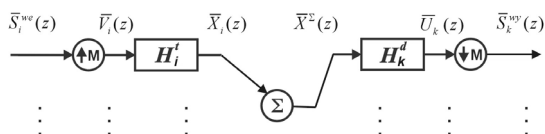
Schemat  $M$ -kanałowego transmultipleksera przedstawiono na rys. 1. Niezależne wejściowe sygnały cyfrowe są wstępnie nadpróbkowane. Nadpróbkowanie polega na wstawieniu próbek o wartościach zerowych pomiędzy każde dwie sąsiednie próbki sygnału wejściowego. Takie nadpróbkowanie nie zmienia energii oraz okresowości sygnałów wejściowych. Jeżeli liczba dodanych próbek zerowych jest równa liczbie sygnałów wejściowych pomniejszona o jeden to wtedy mówimy o nadpróbkowaniu krytycznym. Następnie wszystkie nadpróbkowane sygnały są filtrowane i sumowane tworząc jeden złożony sygnał. W odbiorniku sygnał złożony jest równoległe filtrowany i podpróbkowany. Podpróbkowanie polega na usunięciu pewnej liczby próbek określonej przez stałą podpróbkowania. Najistotniejszymi elementami układu z rys.1. są zespoły filtrów analizy i syntezy. Poprawnie zaprojektowane spełniają warunki perfekcyjnej rekonstrukcji.



Rys. 1. Schemat  $M$ -kanałowego transmultipleksera  
Fig. 1. Schematic diagram of the  $M$ -channel transmultiplexer

## 3. Model matematyczny

Model matematyczny transmultipleksera może być rozpatrywany w dziedzinie  $Z$ -transformacji, z uwagi na liniowy charakter jego poszczególnych elementów składowych. Rys. 2 przedstawia kolejne etapy przekształcenia  $i$ -tego sygnału [6].



Rys. 2. Tor sygnałowy  $i$ -tego sygnału transmuleksowanego  
Fig. 2. Successive transformations of the  $i$ -th input signal

Część syntetyzującą możemy zapisać równaniem

$$\bar{X}^\Sigma(z) = \sum_{i \in M} \bar{X}_i(z) \quad (1)$$

gdzie

$$\bar{X}_i(z) = \bar{H}_i^t(z) \bar{V}_i(z) = \bar{H}_i^t(z) \bar{S}_i^{we}(z^M) \quad (2)$$

dla  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

Podpróbkowany i przefiltrowany sygnał w odbiorniku ma postać

$$\bar{S}_k^{wy}(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \bar{U}_k(w_M^m z^{1/M}) \quad (3)$$

gdzie

$$\bar{U}_k(z) = \bar{H}_k^d(z) \bar{X}^\Sigma(z) \quad (4)$$

oraz  $w_M = e^{-j2\pi/M}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

Dla przejrzystości zapisu sygnały nadajnika oznaczono indeksem  $i$ -ty, odbiornika  $k$ -ty. Podstawiając (4), (1), (2) do równania (3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{S}_k^{wy}(z) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} u_k(p) \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j2\pi pm/M} z^{-p/M} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} u_k(p) e^{-j2\pi pm/M} z^{-p/M} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \bar{U}_k(z^{1/M} w_M^m). \end{aligned} \quad (5)$$

Równanie (5) wyznacza zależność dowolnego sygnału wyjściowego od wszystkich sygnałów wejściowych transmuleksera. Odpowiednio zaprojektowany układ transmuleksera spełnia warunki perfekcyjnej rekonstrukcji jeżeli sygnał wyjściowy  $S_k^{wy}$  jest opóźnioną i ewentualnie wzmocnioną wersją sygnału wejściowego  $S_i^{we}$ , tzn. istnieje  $c_i$  oraz  $\tau_i$  spełniające poniższe równanie

$$s_k^{wy}(n) = c_i s_i^{we}(n - \tau). \quad (6)$$

Wiążąc warunki perfekcyjnej rekonstrukcji równania (6) z równaniem (5) otrzymujemy

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{S}_i^{we}(z) \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \bar{H}_k^d(w_M^m z^{1/M}) \bar{H}_i^t(w_M^m z^{1/M}) \right] = c_i s_i^{we} \delta_{k,i} \quad (7)$$

gdzie  $\delta_{k,i}$  jest funkcją Kroneckera.

Stosując filtry typu FIR rzędu  $I$  do budowy transmuleksera

$$\bar{H}(z) = \sum_{i=0}^I h(i) z^{-i}, \quad (8)$$

iloczyn zespołu filtrów przyjmuje postać

$$\bar{H}^d(z) \bar{H}^t(z) = \sum_{p=0}^I \sum_{q=0}^I h^d(p) h^t(q) z^{-p-q}. \quad (9)$$

Uwzględniając (7) i (9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \bar{H}_k^d(w_M^m z^{1/M}) \bar{H}_i^t(w_M^m z^{1/M}) \right] = \\ = M \sum_{n=0}^{2I/M} z^{-n} \left[ \sum_{\substack{p=0 \\ 0 \leq Mn-p \leq I}}^I h^d(p) h_i^t(Mn-p) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

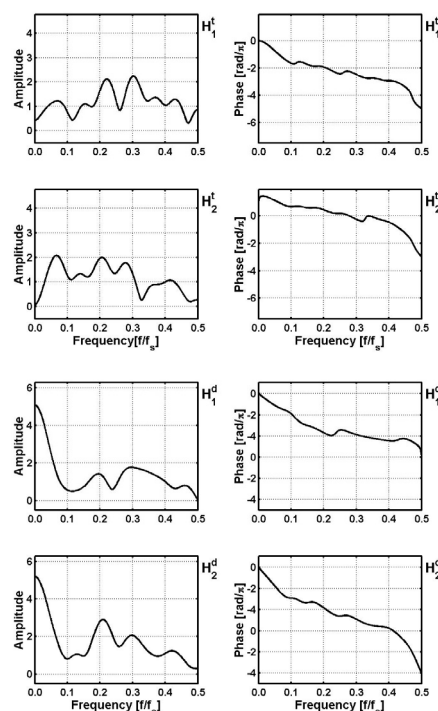
Przyjmując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej  $z$  otrzymujemy [7]

$$c \cdot \delta_{n,\tau} \cdot \delta_{k,i} = \sum_{\substack{p=0 \\ 0 \leq Mn-p \leq I}}^I h_k^d(p) h_i^t(Mn-p), \quad (11)$$

dla wszystkich  $i, k = 1, 2, \dots, M$  z  $n \leq (I+p)/M$  i  $n \geq p/M$ . Z ograniczenia wynika również, że parametr  $n$  nie przebiega pełnego zakresu od 0 do  $I$ , tylko mieści się w zakresie  $n = 0, \dots, \lfloor 2I/M \rfloor$ . Symbol  $\lfloor x \rfloor$  oznacza największą wartość całkowitą nie większą od  $x$ . Równanie (11) nie podaje bezpośredniego rozwiązania w postaci wartości poszczególnych współczynników filtrów, lecz wiąże je w układzie równań biliniowych [7].

#### 4. Przykłady filtrów

W pracy, do wyznaczenia wartości elementów filtrów, wykorzystano wskaźnik jakości  $Q_{\min}$  na bazie kryterium średniokwadratowego. Na bazie takiego kryterium uzyskano rozwiązanie, które jest przybliżeniem rozwiązania dokładnego, ze względu na ograniczoną dokładność obliczeń oraz zaokrąglenia numerycznej procedury minimalizującej. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe przykładowych filtrów nadajnika i odbiornika przedstawiono na rys. 3.

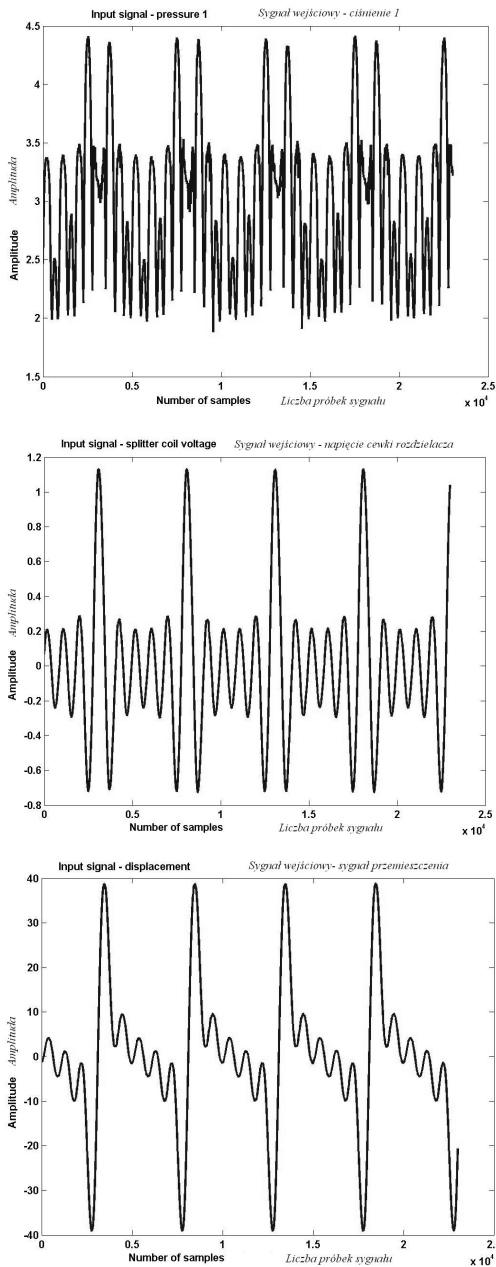


Rys. 3. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe zespołu filtrów dla 2-wejściowego transmuleksera ze współczynnikami filtrów 10-go rzędu  
Fig. 3. Frequency characteristics of bank filters for a 2-input transmuleksers with coefficients of 10-th order

Liczba możliwych zespołów filtrów spełniających zasadę dokładnej rekonstrukcji jest liczna i zależna od metody, warunków początkowych, rzędu filtrów, liczby sygnałów transmultiplexowanych.

### 5. Eksperyment z sygnałami pomiarowymi

W eksperymencie wykorzystano rzeczywiste sygnały pomiarowe z czujnika ciśnienia 1, czujnika ciśnienia 2, czujnika przemieszczenia, wskaźnika napięcia cewki rozdzielacza hydraulicznego. Wszystkie sygnały były próbkowane z częstotliwością  $f_s=500\text{Hz}$ . Zbudowano zestawy symulacyjnych układów: 2- i 4-wejściowego transmultiplexera z zespołami filtrów 2-go, 4-go, 6-go, 8-go, 10-go i 20-go rzędu oraz opóźnieniem  $\tau = \{1\}$ .



Rys. 4. Wejściowe sygnały transmultiplexerów z czujników: ciśnienia 1 (podobnie z ciśnienia 2), napięcia cewki rozdzielacza, przemieszczenia  
 Fig. 4. Real input signals of transmultiplexers from sensor of: pressure 1 (similar with pressure 2), splitter coil voltage, displacement

Eksperyment przeprowadzono oddzielnie dla układów 2-wejściowego oraz 4-wejściowego transmultiplexera dla tego samego zestawu próbek sygnałów pomiarowych. W każdym

przypadku złożony sygnał, uzyskany po etapie filtracji i sumowania w nadajniku, poddawano modyfikacji. Modyfikacja polegała na wyzerowaniu odpowiedniej liczby próbek w sygnale złożonym w określonym miejscu ciągu (na początku, w środku, na końcu). Za każdym razem zwiększano liczbę wyzerowanych próbek i wyznaczano dwa parametry. Pierwszy z nich to stosunek sygnału do szumu (SNR) zrekonstruowanych sygnałów. Drugi to wskaźnik pojawienia się zerowej próbki w poszczególnych sygnałach odbiornika. Aby wykazać główne cechy sygnału złożonego, liczny zbiór dostępnych próbek ograniczono do kilkudziesięciu – zmiany parametru SNR w kontekście błędów wielokrotnych, bardziej widoczne dla małego zakresu próbek testowych. Fragment zrekonstruowanych sygnałów odbiornika dla 4-kanalowego transmultiplexera z wyraźną próbką błędną (zerową) w ciągu próbek przedstawiono na rys. 5.

2.6763	2.8646	2.7464	0.8010
2.6753	2.8786	2.7504	0.8050
2.6763	2.8856	2.7474	0.8030
2.6743	2.8916	2.7484	0.8020
2.6753	2.9076	2.7454	0.8020
2.4735	2.5544	0.6768	2.2842
0	0	0	0
1.6272	3.8166	2.4461	0.3327
2.6763	2.9376	2.7484	0.8030
2.6763	2.9446	2.7474	0.8160
2.6783	2.9546	2.7484	0.8010
2.6763	2.9656	2.7464	0.8030
2.6763	2.9726	2.7484	0.8030
2.6753	2.9796	2.7484	0.8020
2.6763	2.9866	2.7464	0.8020
2.6783	2.9946	2.7474	0.8030
2.6753	3.0006	2.7464	0.8020
2.6743	3.0116	2.7484	0.8040

Rys. 5. Próbkę sygnałów zrekonstruowanych 4-kanalowego transmultiplexera z wyraźną próbką błędną dla wszystkich kanałów  
 Fig. 5. Reconstructed samples of real signals for a 4-channel transmultiplexer with the error sample for all channels

Oprócz wykazania istnienia wyraźnych przekłamań w sygnałach zrekonstruowanych, istotna jest zależność liczby błędnych próbek w funkcji rzędu zespołów filtrów użytych w transmultiplexerach oraz liczby sygnałów źródłowych łączonych we wspólny sygnał. Obliczenia przeprowadzono do wybranych układów. Zależność wystąpienia próbek zerowych w sygnałach zrekonstruowanych na wystąpienie błędów grupowych (różnej długości próbki zerowe) w sygnale złożonym w funkcji rzędu zespołu filtrów dla 2-wejściowego transmultiplexera zamieszczono w tabeli 1. W tabeli 2 dokonano podobnego zastawienia dla 4-wejściowego transmultiplexera. W tym przypadku minimalny rząd zespołu filtrów wynosi 4.

Tab. 1. Liczba wyzerowanych próbek sygnałów odbiornika dla 2-wejściowego transmultiplexera w funkcji rzędu zespołu filtrów i wyzerowanych próbek sygnału złożonego

Tab. 1. The number of zero samples in the reconstructed signals for a 2-channel transmultiplexer vs. the order of filter banks and the number of zero samples in the complex signal

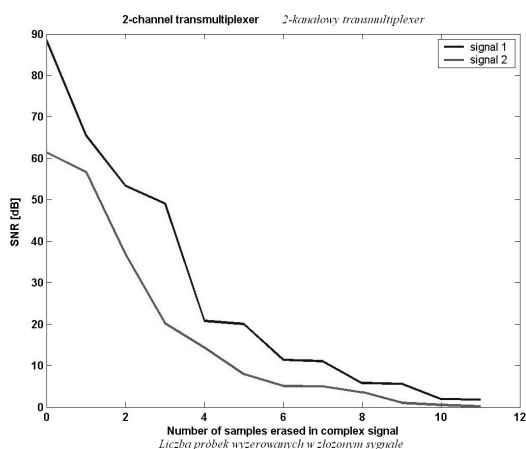
Liczba wyzerowanych próbek sygnału złożonego (grupowo)	Rząd zespołu filtrów I=2	Rząd zespołu filtrów I=4	Rząd zespołu filtrów I=6	Rząd zespołu filtrów I=8	Rząd zespołu filtrów I=10	Rząd zespołu filtrów I=20
1	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-
3	1	-	-	-	-	-
4	1	-	-	-	-	-
5	2	-	-	-	-	-
6	2	1	-	-	-	-
7	2	1	-	-	-	-
8	3	2	1	-	-	-
9	3	2	1	-	-	-
10	3	3	2	1	-	-
11	4	3	2	1	-	-
12	4	4	3	2	1	-

Tab. 2. Liczba wyzerowanych próbek sygnałów odbiornika dla 4-wejsiowego transmultiplexera w funkcji rzędu zespołu filtrów i wyzerowanych próbek sygnału złożonego

Tab. 2. The number of zero samples in the reconstructed signals for a 4-channel transmultiplexer vs. the order of filter banks and the number of zero samples in the complex signal

Liczba wyzerowanych próbek sygnału złożonego (grupowo)	Rząd zespołu filtrów $I=4$	Rząd zespołu filtrów $I=6$	Rząd zespołu filtrów $I=8$	Rząd zespołu filtrów $I=10$	Rząd zespołu filtrów $I=20$
1	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-
8	1	-	-	-	-
9	1	1	-	-	-
10	1	1	-	-	-
11	1	1	1	-	-
12	2	2	1	-	-
13	2	2	1	1	-

Innym, istotnym kryterium jest stosunek sygnału do szumu w funkcji liczby wyzerowanych próbek sygnału złożonego. Obliczenia przeprowadzono dla zespołu filtrów wyznaczonych numerycznie – stąd dodatkowa niedokładność rekonstrukcji sygnałów źródłowych. Dla porównania rys. 6 przedstawia SNR dla 2-kanalowego transmultiplexera z zespołami filtrów rzędu  $I=4$ , spełniającymi wskaźnik jakości  $Q_{\min}$  na poziomie  $3,11 \cdot 10^{-8}$  w funkcji liczby wyzerowanych próbek sygnału złożonego.



Rys. 6. SNR w funkcji liczby wyzerowanych próbek w sygnale złożonym dla 2-wejsiowego transmultiplexera

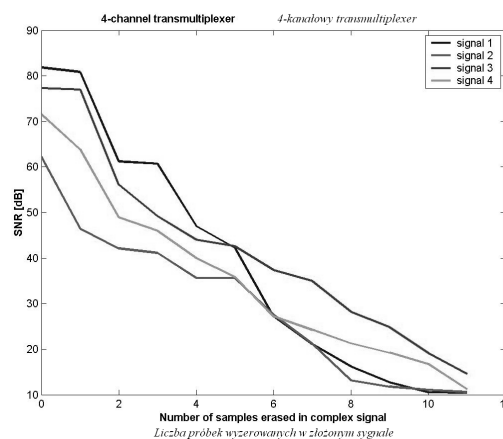
Fig. 6. SNR vs. the number of zero samples in the complex signal for a 2-channel transmultiplexer

Dla wyższych rzędów filtrów uzyskano gorsze wyniki parametru SNR. Wynika to ze wskaźnika jakości  $Q_{\min}$ , który dla 2- i 4-kanalowego transmultiplexera kształtuje się zgodnie z wynikami z tabeli 3.

Tab. 3. Wskaźnik jakości  $Q_{\min}$  w funkcji rzędu zespołu filtrów  
Tab. 3. Quality coefficient  $Q_{\min}$  vs. the order of filter banks

	$I=2$	$I=4$	$I=6$	$I=8$	$I=10$	$I=20$
2-kanalowy transmultiplexer $Q_{\min} \cdot 10^{-8}$	0,97	3,11	40,4	1050	2140	6160
4-kanalowy transmultiplexer $Q_{\min} \cdot 10^{-8}$	-	4,54	52,8	849	1490	5680

Rys. 7 przedstawia parametr SNR dla 4-kanalowego transmultiplexera z zespołami filtrów rzędu  $I=4$ , spełniającymi wskaźnik jakości  $Q_{\min}$  na poziomie  $4,54 \cdot 10^{-8}$  w funkcji liczby wyzerowanych próbek sygnału złożonego.



Rys. 7. SNR w funkcji liczby wyzerowanych próbek w sygnale złożonym dla 4-wejsiowego transmultiplexera

Fig. 7. SNR vs. the number of zero samples in the complex signal for a 4-channel transmultiplexer

## 6. Wnioski

Transmultipleksacja jest alternatywą dla obecnie funkcjonujących cyfrowych systemów zwielokrotnienia przesyłanych danych. Poprawnie zaprojektowana pozwala na równoczesną transmisję wielu niezależnych sygnałów cyfrowych w tym samym kanale transmisyjnym. Z uwagi na operację splotu próbek sygnałów są powiązane ze sobą i tym samym rekonstrukcja źródłowych sygnałów z zakłóconego sygnału złożonego jest możliwa. Jednak przy sukcesywnym zwiększaniu liczby kolejnych błędnych próbek w kanale transmisyjnym gwałtownie maleje stosunek sygnału do szumu – wykazano to na rys. 6 i rys. 7. Poprawy należy szukać w precyzyjnie wyznaczonych zespołach filtrów (zespołach całkowitoliczbowych) i stosowaniu operacji dodatkowo zabezpieczających sygnał przed błędami wielokrotnymi, takich jak np. przepłot bitowy i/lub bajtowy danych.

## 7. Literatura

- [1] Bellanger M., Daguët J.: TDM-FDM Transmultiplexer: Digital Polyphase and FFT, IEEE Transaction on Communications, vol. com-22, no. 9, pp. 1199-1205, September 1974.
- [2] Nussbaumer H.: Pseudo QMF filter bank, IBM Tech. Disclosure Bull., vol. 24, no. 6, pp. 3081-3087, November 1981.
- [3] Chu P. L.: Quadrature mirror filter design for an arbitrary number of equal bandwidth channels, IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-33, no. 3, pp. 203-218, February 1985.
- [4] Vetterli M.: A Theory of Multirate Filter Banks, IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 3, pp. 356-372, March 1987.
- [5] Vetterli M., Le Gall D.: Perfect reconstruction FIR filter banks: Some properties and factorizations, IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 37, no. 7, pp. 1057-1071, July 1989.
- [6] Ciosmak J.: Algorytm wyznaczania nieseparowalnych dwuwymiarowych zespołów filtrów dla potrzeb systemów transmultipleksacji, Przegląd Elektrotechniczny, str. 217-220, Nr 11/2011.
- [7] Ziółko M., Sypka P., Gryboś A.: Application of Optimization Method to Transmultiplexer Design, Proceedings of Workshop on Multimedia Communications and Services, pp. 97-100, Kielce 2003.