



Modelowanie stanów nieustalonych w przewodach ciśnieniowych z uwzględnieniem kawitacji oraz zmiennych oporów hydraulicznych. Część I. Modele kawitacji

KAMIL URBANOWICZ

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie,
Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn,
70-310 Szczecin, Al. Piastów 19, kamil.urbanowicz@zut.edu.pl

Streszczenie. W pracy omówione zostały cztery kluczowe modele matematyczne opisujące przepływ nieustalony z kawitacją w przewodach ciśnieniowych: model rozerwania strumienia cieczy (*Column Separation Model* — CSM), model kawitacji parowo-gazowej (*Gas Column Separation Model* — CSMG), model Adamkowskiego (*Adamkowski's Column Separation Model* — CSMA) i model kawitacji pęcherzykowej (*Bubble Cavitation Model* — BCM). We wszystkich tych modelach uwzględnione zostały zmienne opory hydrauliczne. Równania opisujące te modele rozwiązano z wykorzystaniem metody charakterystyk. Napężenie styczne na ścianie przewodu obliczane było z sumy dwóch wyrażień: quasi-ustalonego i nieustalonego. Wyrażenie nieustalone jest modelowane w postaci całki splotowej z lokalnego przyspieszenia cieczy i funkcji wagi $w(t)$.

Słowa kluczowe: numeryczna mechanika płynów, przepływy nieustalone, kawitacja, zmienne opory hydrauliczne, przewody ciśnieniowe

DOI: 10.5604/12345865.1168704

1. Wstęp

Nieustalone przepływy cieczy w przewodach ciśnieniowych występują bardzo często w praktyce, można tu przytoczyć np.: rurociągi przesyłowe, hydrauliczne instalacje przemysłowe, rurociągi dosyłowe elektrowni wodnych, hydrauliczne układy pulsacyjne, czy też niektóre układy napędów i sterowań hydraulicznych. Współczesna

tematyka dotycząca badania tych przepływów jest bardzo bogata i obejmuje m.in. takie zagadnienia jak dyssypacja energii mechanicznej cieczy, rozerwanie strumienia cieczy spowodowane kawitacją czy też wzajemne oddziaływanie cieczy i ścianek przewodu. Praca niniejsza wiąże się z pierwszym i drugim zagadnieniem. Dotyczy modelowania niestacjonarnych strat tarcia i kawitacji w przewodach ciśnieniowych na drodze symulacji numerycznej, pod kątem zastosowań do prognozowania pulsacji ciśnienia w momencie występowania przepływów nieustalonych.

Powszechnie stosowany quasi-ustalony, jednowymiarowy model strat tarcia oparty o formułę Darcy'ego-Weisbacha może być stosowany w przypadku powolnych zmian pola prędkości cieczy w przekroju poprzecznym przewodu. Zawodzi on jednak w przypadku modelowania i symulacji przepływów szybkozmiennych, np. podczas uderzenia hydraulicznego. Otrzymane wówczas wyniki (znacząco) odbiegają od wyników badań eksperymentalnych. W pracy niniejszej naprężenie styczne na ściance przewodu zapisane zostało w postaci sumy dwóch wyrażeń: quasi-ustalonego i nieustalonego. Nieustalone wyrażenie jest modelowane w postaci całki splotowej z lokalnego przyspieszenia cieczy i funkcji wagi $w(t)$. Funkcja wagi w przypadku przepływów nieustalonych laminarnych jest znana od wielu lat za sprawą pracy przedstawionej w 1968 roku przez Zielke [19], natomiast w przypadku przepływów turbulentnych funkcję wagi wyznaczyć można w oparciu o dwuwymiarowe równanie Reynoldsa (osiowosymetryczne), hipotezę Boussinesqa oraz dane eksperymentalne (dotyczące rozkładu współczynnika lepkości turbulენტnej w przekroju poprzecznym przewodu). Znane są powszechnie funkcje wagi dla przepływu turbulენტnego zaprezentowane przez Vardy'ego i Browna [11-13] oraz Zarzyckiego [17, 18]. Funkcje wagi w przypadku przepływu turbulენტnego nie są zależne jedynie od czasu, lecz także od liczby Reynoldsa oraz chropowatości względnej przewodów rurowych. Oznacza to, że w przypadku przepływu laminarnego kształt funkcji wagi pozostaje stały i niezmienny, natomiast w momencie wystąpienia przepływu turbulენტnego jest on zmienny w czasie.

Z przepływem kawitacyjnym spotykamy się często podczas niestacjonarnego przepływu cieczy w przewodach ciśnieniowych maszyn i urządzeń hydraulicznych i energetycznych. Obszary kawitacyjne pojawiają się w miejscach, w których ciśnienie spadnie do wartości bliskiej ciśnieniu parowania cieczy w danej temperaturze. Ich zanikom towarzyszą gwałtowne zmiany ciśnienia (zwykle powtarzające się cyklicznie). Przepływ w takich warunkach jest dwufazowy i szybkozmienny. W literaturze przedmiotu brakuje potwierdzonych informacji o charakterze pojawiających się obszarów kawitacyjnych, tzn. czy obszary te mają charakter lokalny, czy są rozłożone wzdłuż osi przewodu. W związku z tym przyjmowane są różne modele kawitacji przejściowej oraz metody obliczania i symulacji przebiegu niestacjonarnego przepływu cieczy w przewodach zamkniętych z towarzyszącym im zjawiskiem kawitacji. Większość programów komputerowych wykorzystywanych do symulacji przebiegów nieustalonych z kawitacją korzysta z najprostszego algorytmu

obliczeniowego zaprezentowanego przez Streetera [14] w 1969 r., opartego na tzw. modelu rozerwania strumienia cieczy (*column separation model* — CSM). Model CSM ulegał z czasem licznym modyfikacjom. Najważniejsze modyfikacje ukształtowały dwa kluczowe modele: kawitacji parowo-gazowej [5, 6, 14, 15] (CSMG) oraz Adamkowskiego [1, 2, 4] (CSMA). Pierwszy z nich uwzględnia dodatkowo wpływ kawitacji gazowej na przebieg uderzenia hydraulicznego. W drugim przenoszone zostają nieciągłości obliczane w wielu przekrojach do jednego wybranego przekroju (najczęściej brzegowego), spełniając przy tym zasadę zachowania masy i ilości ruchu. Modelem kawitacji ciągłej omawianym w tej pracy jest model jednorodnej kawitacji pęcherzykowej [9, 16] (*bubbly cavitation model* — BCM). Modele uwzględniające zmienne opory hydrauliczne wykazują znaczną przewagę nad modelami, w których uwzględniono tylko quasi-ustalone opory. Zostanie to udowodnione w drugiej i zarazem ostatniej części niniejszej pracy.

2. Modele przepływu nieustalonego z kawitacją

W literaturze wyróżnić można dwa typy modeli umożliwiających symulację stanów nieustalonych z kawitacją w przewodach ciśnieniowych: modele z grupy rozerwania strumienia cieczy oraz modele przepływu dwufazowego, którego szczególnym przypadkiem jest przepływ jednofazowy.

W poniższej pracy (szczegóły dotyczące modelowania niestacjonarnych strat tarcia omówione zostaną szczegółowo w drugiej części niniejszej pracy) zmodyfikowane zostaną poprzez uwzględnienie zmiennych oporów hydraulicznych cztery kluczowe modele przepływu nieustalonego z kawitacją:

- model rozerwania strumienia cieczy CSM,
- model Adamkowskiego CSMA,
- model kawitacji parowo-gazowej CSMG,
- model kawitacji pęcherzykowej BCM.

Trzy pierwsze z analizowanych modeli zaliczane są do grupy modeli dyskretnych (CSM, CSMA i CSMG), natomiast model BCM jest modelem ciągłym.

2.1. Modele CSM i CSMA

Równania opisujące przepływ nieustalony są następujące [7, 14]:

$$\text{— równanie ruchu} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \gamma + \frac{2\tau}{\rho R} = 0, \quad (1)$$

$$\text{— równanie ciągłości} \quad \frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

gdzie: $v = v(x, t)$ — średnia prędkość cieczy w przekroju poprzecznym przewodu;
 $p = p(x, t)$ — ciśnienie w przekroju poprzecznym przewodu;
 R — promień wewnętrzny przewodu;
 τ — naprężenie styczne na ścianie przewodu;
 ρ — gęstość cieczy;
 g — przyspieszenie ziemskie;
 γ — kąt pochylenia przewodu ciśnieniowego;
 c — prędkość propagacji fali ciśnienia;
 t — czas;
 x — współrzędna osiowa przewodu.

Powyższy układ równań (1) i (2) zawiera trzy niewiadome: v , p i τ . W celu jego zamknięcia należy ustalić dodatkowy związek, którym najczęściej jest zależność między naprężeniem stycznym τ a średnią prędkością przepływu $\tau = f(v)$. Numeryczne szczegóły dotyczące modelowania naprężenia stycznego na ścianie przewodu będą jednym z głównych tematów w kolejnej części niniejszej pracy.

Korzystając z metody charakterystyk równania (1) i (2), można doprowadzić do postaci:

$$C^+ : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = +c \\ \frac{1}{c\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{dv}{dt} + g \sin \gamma + \frac{2}{\rho R} \tau = 0. \end{cases} \quad (3) \text{ i } (4)$$

$$C^- : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -c \\ -\frac{1}{c\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{dv}{dt} + g \sin \gamma + \frac{2}{\rho R} \tau = 0. \end{cases} \quad (5) \text{ i } (6)$$

Równania powyższe będą wykorzystane przy symulacji niestacjonarnego przepływu kawitacyjnego z wykorzystaniem modeli CSM i CSMA.

Naprężenie styczne występujące we wszystkich omawianych poniżej w tej pracy modelach określone będzie następującą zależnością matematyczną:

$$\tau(t) = \frac{\lambda \rho v |v|}{8} + \frac{2\mu}{R} \cdot \int_0^t w(t-u) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(u) \cdot du, \quad (7)$$

gdzie: λ — współczynnik oporu hydraulicznego;
 μ — lepkość dynamiczna;
 $w(t-u)$ — funkcja wagi.

Dla dowolnego wewnętrznego punktu D siatki charakterystyk (rys. 1), przez który przechodzą dwie różniomienne charakterystyki C^+ i C^- , przeprowadzono całkowanie z wykorzystaniem liniowych różnic skończonych między punktami D i A oraz D i B [7]. W wyniku tego całkowania otrzymano następujące równania:

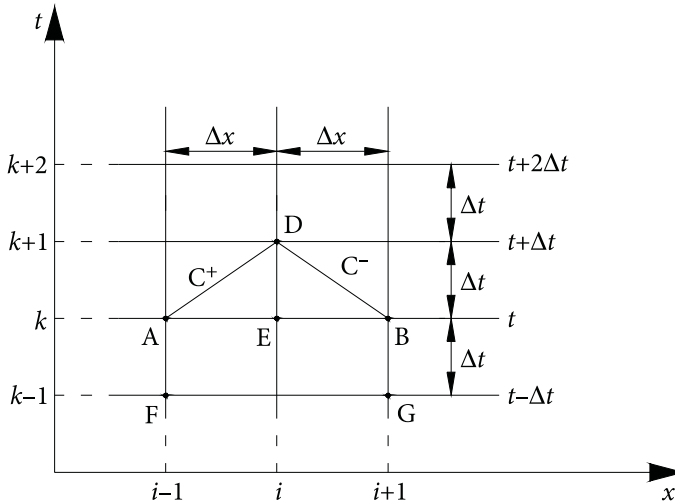
$$\frac{1}{c\rho}(p_D - p_A) + (v_D - v_A) + g\Delta t \sin \gamma + \frac{2\Delta t}{\rho R} \tau_A = 0, \quad (8)$$

$$-\frac{1}{c\rho}(p_D - p_B) + (v_D - v_B) + g\Delta t \sin \gamma + \frac{2\Delta t}{\rho R} \tau_B = 0. \quad (9)$$

Rozwiązując powyższy układ równań (8) i (9), znaleziono ostateczne wzory na obliczane wielkości ciśnienia p_D oraz prędkości v_D w węźle wewnętrznym D siatki charakterystyk w następującej postaci:

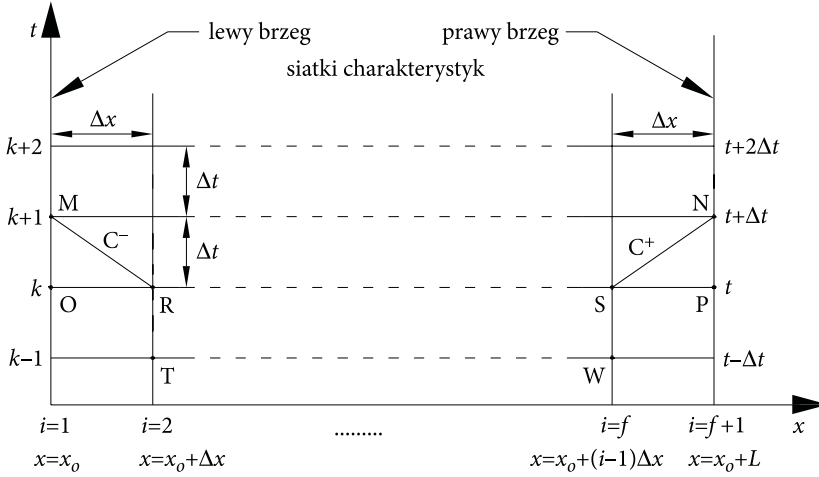
$$p_D = \frac{1}{2} \left[(p_A + p_B) + c\rho(v_A - v_B) + \frac{2c\Delta t}{R} (\tau_B - \tau_A) \right], \quad (10)$$

$$v_D = \frac{1}{2} \left[(v_A + v_B) + \frac{1}{c\rho} (p_A - p_B) - 2g\Delta t \sin \gamma - \frac{2\Delta t}{\rho R} (\tau_A + \tau_B) \right]. \quad (11)$$



Rys. 1. Siatka charakterystyk

W celu rozwiązania zadania w pozostałych punktach siatki charakterystyk konieczna jest znajomość warunków brzegowych (rys. 2).



Rys. 2. Warunki brzegowe

Gdy na lewym brzegu siatki charakterystyk ($i = 1$) określona jest prędkość przepływu v , natomiast na prawym ($i = f + 1$) znane jest ciśnienie p , wówczas:

$$p_M = p_R + c\rho(v_M - v_R) + c\rho g\Delta t \sin \gamma + \frac{2c\Delta t}{R}\tau_R, \quad (12)$$

$$v_N = v_S - \frac{1}{c\rho}(p_N - p_S) - g\Delta t \sin \gamma - \frac{2\Delta t}{\rho R}\tau_S. \quad (13)$$

Natomiast w przypadku gdyby na lewym brzegu siatki charakterystyk ($i = 1$) określone było ciśnienie p , a na prawym ($i = f + 1$) wartość prędkości przepływu v , wówczas:

$$v_M = v_R + \frac{1}{c\rho}(p_M - p_R) - g\Delta t \sin \gamma - \frac{2\Delta t}{\rho R}\tau_R, \quad (14)$$

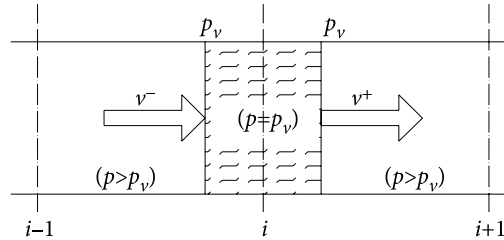
$$p_N = p_S - c\rho(v_N - v_S) - c\rho g\Delta t \sin \gamma - \frac{2c\Delta t}{R}\tau_S. \quad (15)$$

W procedurze numerycznej bazującej na powyższych wzorach założono możliwość pojawiania się obszarów kawitacyjnych w wyniku spadku ciśnienia w danym rozpatrywanym węźle siatki charakterystyk do ciśnienia bliskiego ciśnieniu parowności pary nasyconej p_v .

Założenie wówczas stałego ciśnienia $p = p_v$ umożliwia wyliczanie w rozpatrywanym węźle prędkości na lewym i prawym brzegu rozerwania strumienia cieczy, zgodnie z rysunkiem 3:

$$v_D^- = v_A + \frac{1}{c\rho}(p_A - p_v) - g\Delta t \sin \gamma - \frac{2\Delta t}{\rho R} \tau_A, \quad (16)$$

$$v_D^+ = v_B + \frac{1}{c\rho}(p_v - p_B) - g\Delta t \sin \gamma - \frac{2\Delta t}{\rho R} \tau_B. \quad (17)$$



Rys. 3. Prędkość na wlocie i wylocie dyskretnego obszaru parowego

Objętość strefy kawitacji oblicza się, wykorzystując warunek ciągłości w postaci [3, 7]:

$$V_c = A \int_{t_0}^t (v^+ - v^-) \cdot dt, \quad (18)$$

gdzie: A — pole przekroju poprzecznego przewodu rurowego;
 t_0 — czas pojawienia się kawitacji (określony chwilą, kiedy ciśnienie p przekroczy wartość p_v);
 v^+ i v^- — są wartościami prędkości powierzchni międzyfazowych odpowiednio z prawej i lewej strony powstałej nieciągłości (rys. 3).

Po scałkowaniu powyższego równania (18) objętość strefy kawitacji w węźle oblicza się z następującego warunku ciągłości:

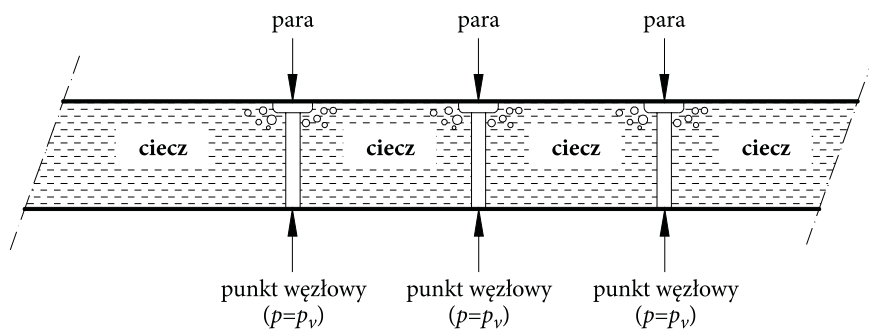
$$V_{C(D)} = V_{C(E)} + \left(\psi(v_D^+ - v_D^-) + (1 - \psi)(v_E^+ - v_E^-) \right) \cdot A \cdot \Delta t, \quad (19)$$

gdzie: ψ — współczynnik wagi (w tej pracy przyjęto $\psi = 0,5$).

Wartość tej objętości V_c podczas symulacji najpierw wzrasta, co świadczy o rozwoju kawitacji, a następnie maleje, gdy kawitacja zanika. Osiągnięcie wartości $V_c = 0$ oznacza zniknięcie obszaru kawitacji i tym samym powrót do ciągłego przepływu cieczy.

W literaturze wyróżnić można dwa rodzaje podejść w numerycznej analizie zjawiska dyskretnego kawitacyjnego naruszenia przepływu cieczy.

W pierwszym z nich zakłada się możliwość tworzenia obszarów objętych kawitacją we wszystkich przekrojach obliczeniowych przewodu [3, 4, 10, 14] (rys. 4).



Rys. 4. Przekroje przewodu z kawitacją

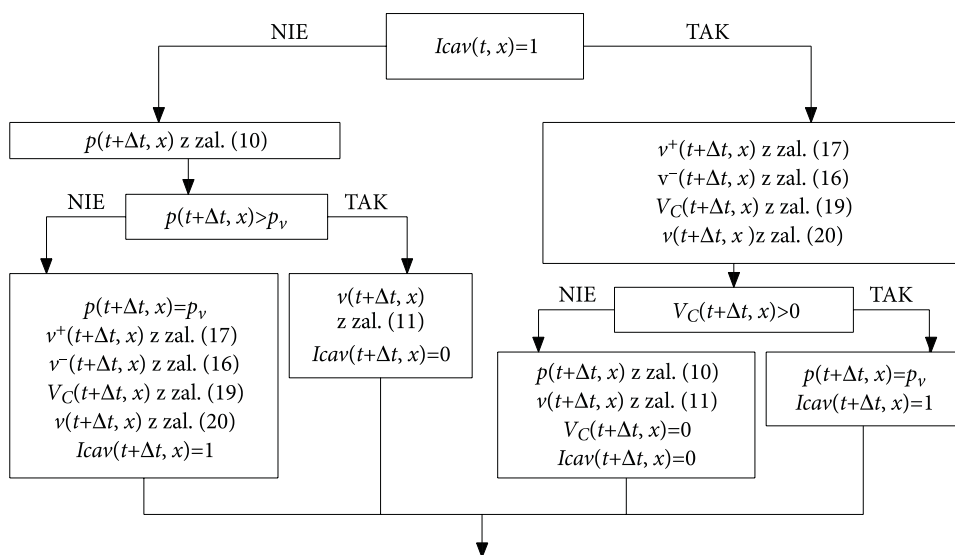
Podejście to skutkuje jednak wynikami znacznie odbiegającymi od rzeczywistości. Powstają bowiem tzw. „numeryczne piki” ciśnienia, które nie mają potwierdzenia w rzeczywistości i często są przyczyną przerwania procesu obliczeniowego. Streeter [10], aby unikać wspomnianych „pików” opracował tzw. „metodę konsolidacji”, która zakłada przywracanie ciągłości strumienia cieczy poprzez odpowiednie łączenie (konsolidację) obszarów kawitacyjnych. W rezultacie stosowanie tej modyfikacji pozwala częściowo zredukować charakterystyczne „piki” ciśnienia. Jednak procedura obliczeniowa, do której prowadzi metoda konsolidacji, jest zbyt złożona, o czym wspomina sam autor, i przez to nie jest wykorzystywana w praktyce.

W drugim podejściu zakłada się natomiast, że obszar nieciągłości tworzy się tylko w jednym zadanym przekroju obliczeniowym. Podejście to zostało zaproponowane przez Safwata i Poldera [8]. Najczęściej zakłada się, że jest to przekrój przy elemencie regulującym przepływ lub przekrój najwyższej położonego odcinka przewodu. W pozostałych przekrojach, gdy ciśnienie spada poniżej ciśnienia pary nasyconej $p \leq p_v$, oblicza się średnią wartość prędkości przepływu ze wzoru:

$$v = \frac{(v_D^+ + v_D^-)}{2} \quad (20)$$

Jak wykazały badania z wykorzystaniem tego modelu [3, 5, 16], nie otrzymuje się nierealistycznych „pików” ciśnienia. Główną wadą tego modelu jest jednak konieczność określenia przed numeryczną analizą miejsca tworzenia się kawitacji.

Schemat postępowania numerycznego w węzłach wewnętrznych siatki charakterystyk dla modelu CSM przedstawiony jest na poniższym schemacie (rys. 5).



Rys. 5. Schemat blokowy algorytmu obliczeniowego w wewnętrznych węzłach siatki charakterystyk — model CSM

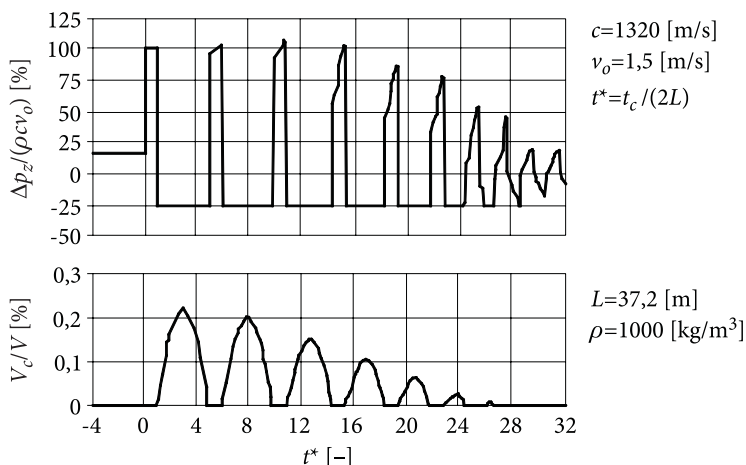
Adamkowski w swoich pracach [1, 2, 4] zauważył, że występuje sztuczne zaniżanie (tłumienie) impulsów (amplitud) ciśnienia w klasycznym modelu rozerwania strumienia cieczy CSM przy założeniu braku strat tarcia. Po głębszej analizie stwierdził, że ten sposób obliczeń nie spełnia warunków wynikających z zasady zachowania masy i ilości ruchu. Potwierdza to bowiem fakt, że nie uwzględnia się w nim obszarów nieciągłości przepływu cieczy wynikających z założenia $p = p_v$ w przekrojach obliczeniowych poza przekrojem, w którym formułuje się główny obszar kawitacji. Z tego też powodu w kolejnych cyklach naruszenia ciągłości zmniejsza się objętość obszaru kawitacyjnego oraz następuje zanikanie impulsowych zmian ciśnienia (rys. 6).

W celu przedstawienia istoty proponowanego nowego modelu, Adamkowski rozważał wyidealizowany odcinek przewodu, nachylony do poziomu pod kątem γ , wypełniony cieczą z rozmieszczonym w sposób dyskretny gazem (parą) w wielu jego obszarach. Wychodząc z zasady zachowania masy cieczy i ilości ruchu, zastąpił wszystkie obszary gazowe jednym. Przy założeniu stałego ciśnienia p_v powyższe rozważania wymagały, aby objętość obszaru gazowego zastępczego była równa sumie objętości wszystkich obszarów dyskretnych (rys. 7).

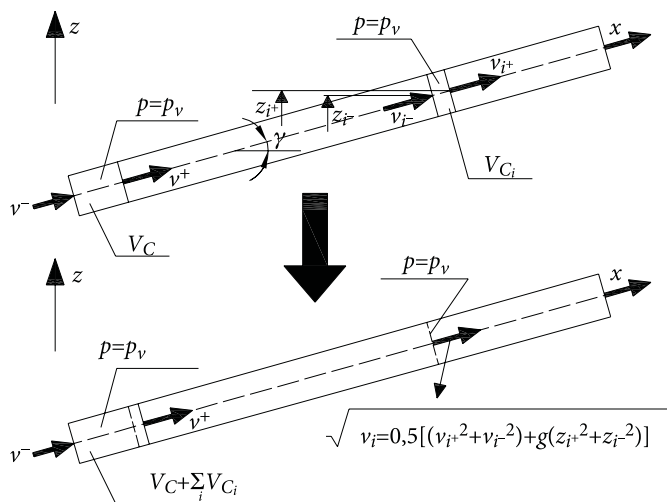
Przedstawił alternatywny wzór służący do zastępowania dwóch strumieni cieczy płynącymi z prędkościami v_+ i v_- w przewodzie jednym strumieniem o prędkości v :

$$v = \sqrt{0,5(v_+^2 + v_-^2) + g(z_+ - z_-)}, \quad (21)$$

gdzie: z_+ i z_- oznaczają współrzędne pionowego położenia przekroju obliczeniowego przewodu, odpowiednio z prawej i lewej strony obliczanej objętości V_C nieciągłości.



Rys. 6. Przykładowe obliczenia przebiegu ciśnienia w przewodzie (przekrój przy zaworze) oraz objętości obszaru kawitacji (V_C) odniesionej do objętości całego przewodu (V) [4] — wg modelu klasycznego Safwata i Poldera



Rys. 7. Model przepływu z kawitacją wg Adamkowskiego [4] — tok postępowania

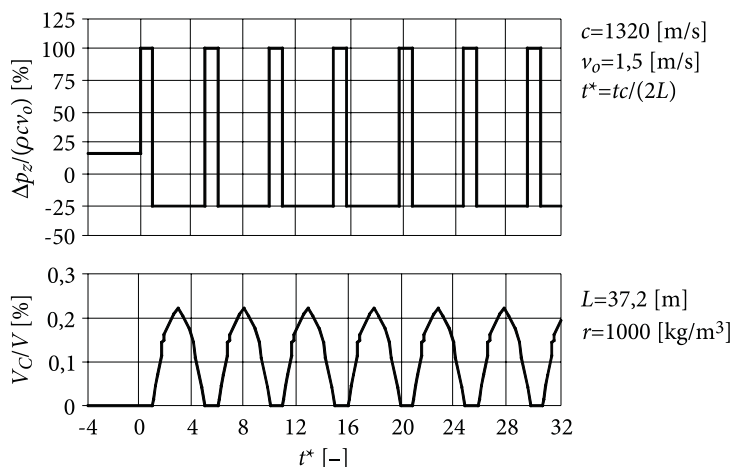
W przewodach ciśnieniowych poziomych różnica poziomów wynosi zero. Natomiast w ogólnym przypadku można ją wyznaczyć z obliczanej objętości obszaru kawitacji: $(z_+ - z_-) = V_C \sin \alpha / A$. Zważywszy na to:

$$v = \sqrt{0,5(v_+^2 + v_-^2) + g \frac{V_C}{A} \sin \gamma}. \quad (22)$$

Uwzględniając wszystkie powstałe w danej chwili nieciągłości oraz możliwość występowania przepływu w różnych kierunkach, ostatecznie zapisano:

$$v_j = \text{sign} \left[(v_j^+ |v_j^+| + v_j^- |v_j^-|) + g \sum_{i=1}^j \frac{V_{Ci}}{A} \sin \gamma \right] \sqrt{0,5(v_j^+ |v_j^+| + v_j^- |v_j^-|) + g \sum_{i=1}^j \frac{V_{Ci}}{A} \sin \gamma}. \quad (23)$$

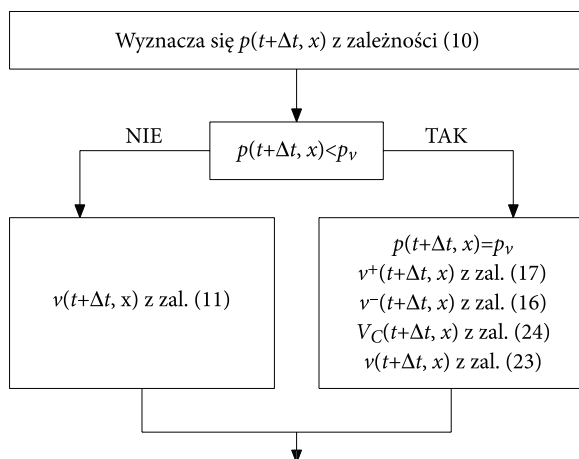
Zależność powyższa jest słuszna dla przewodów prostoosiowych o stałej średnicy. Adamkowski przedstawił również podobną zależność służącą do obliczeń przewodów złożonych z odcinków o różnych średnicach i kątach pochylenia [4]. Wyniki obliczeń z wykorzystaniem tego modelu charakteryzują się w przypadku pomijania oporów tarcia stałością objętości szacowanych obszarów kawitacyjnych (rys. 8).



Rys. 8. Przykładowe obliczenia przebiegu ciśnienia w przewodzie (przekrój przy zaworze) oraz objętości obszaru kawitacji (V_C) odniesionej do objętości całego przewodu (V) [4] — wg modelu Adamkowskiego

W modelu CSMA objętości lokalnych obszarów kawitacji grupowane zostają w jednym przekroju poprzecznym. W tej pracy założono, że jest to przekrój przy zaworze odcinającym przepływ. Objętości obszarów kawitacyjnych w węzłach wewnętrznych siatki charakterystyk wyliczane są wg wzoru:

$$V_{C(t+\Delta t, x)} = (\psi(v_{(t+\Delta t, x)}^+ - v_{(t+\Delta t, x)}^-) + (1 - \psi)(v_{(t, x)}^+ - v_{(t, x)}^-)) \cdot A \cdot \Delta t. \quad (24)$$

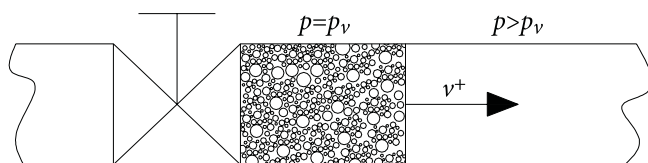


Rys. 9. Schemat blokowy algorytmu obliczeniowego w wewnętrznych węzłach siatki charakterystyk — model CSMA

Sumowanie pojawiających się obszarów kawitacyjnych odbywa się od najdalej oddalonego węzła obliczeniowego, poprzez wszystkie węzły wewnętrzne, aż do miejsca głównego rozerwania strumienia. Średnią prędkość przepływu w węzłach wewnętrznych wyznacza się ze wzoru (23). Schemat postępowania numerycznego w węzłach wewnętrznych siatki charakterystyk dla modelu CSMA przedstawiony jest na rysunku 9.

Warunek brzegowy od strony zbiornika ciśnieniowego w modelach CSM oraz CSMA jest taki sam. Zakłada się, że ciśnienie w zbiorniku jest stałe oraz większe od ciśnienia paręności pary nasyconej $p(t, L) = \text{const} > p_v$. Oznacza to, że obszary kawitacyjne nie mogą powstawać w przekroju przy zbiorniku ciśnieniowym, tym samym prędkość przepływu w tym miejscu wyznacza się w procedurze numerycznej ze wzoru (13).

Przy zaworze w momencie powstania rozerwania strumienia cieczy jedynie prawy brzeg rozerwania ma możliwość zmiany swojego położenia (rys. 10). Stąd zakłada się, że $v^-(t + \Delta t, 0) = 0$ i $v^-(t, 0) = 0$.



Rys. 10. Główny obszar kawitacji przy zaworze odcinającym przepływ

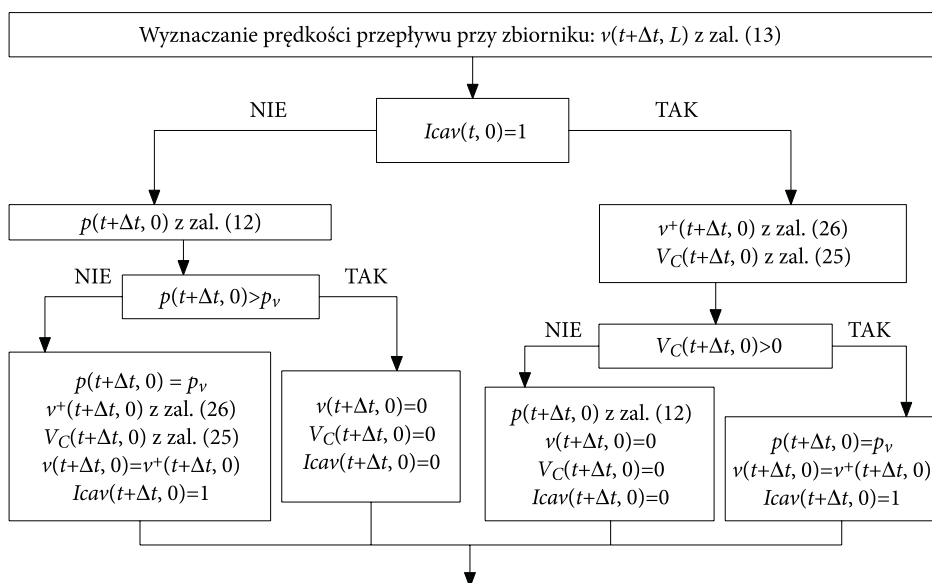
Zważywszy na te założenia, wzór na objętość obszaru kawitacyjnego w przekroju przy zaworze prezentuje się następująco dla modelu CSM:

$$V_{C(t+\Delta t,0)} = V_{C(t,0)} + \left(\psi \cdot v_{(t+\Delta t,0)}^+ + (1-\psi) \cdot v_{(t,0)}^+ \right) \cdot A \cdot \Delta t, \quad (25)$$

gdzie:

$$v_{(t+\Delta t,0)}^+ = v_{(t,\Delta x)} + \frac{1}{c\rho} (p_v - p_{(t,\Delta x)}) - g\Delta t \sin \gamma - \frac{2\Delta t}{\rho R} \tau_{(t,\Delta x)}. \quad (26)$$

Szczegółowy tok obliczania parametrów przepływu w węzłach brzegowych dla modelu CSM przedstawia rysunek 11.



Rys. 11. Wyznaczanie parametrów brzegowych — model CSM

W przypadku modelu CSMA na objętość kawitacyjną składa się suma wszystkich obszarów kawitacyjnych obliczona w pozostałych węzłach siatki charakterystyk w rozpatrywanym chwilowym kroku obliczeniowym:

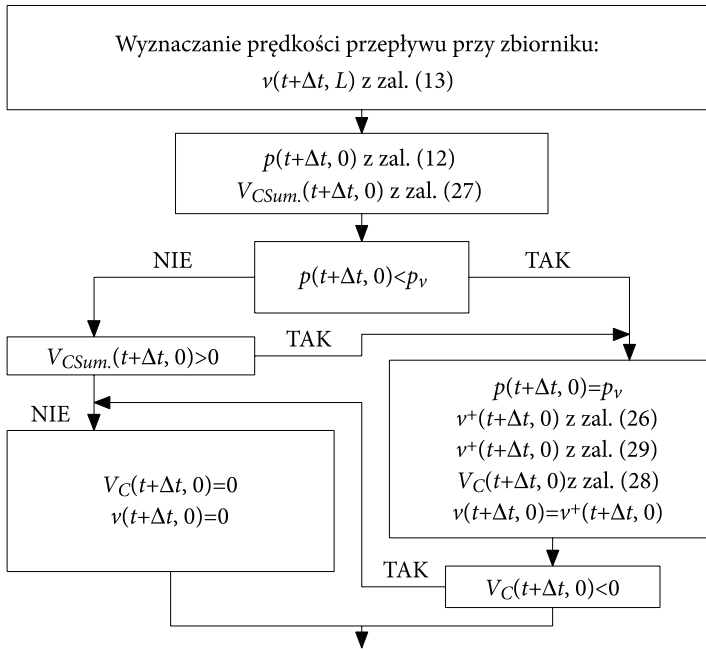
$$V_{CSum.} = V_{C(t,0)} + \sum_{i=1}^{f-1} V_{C(t+\Delta t,i \cdot \Delta x)}, \quad (27)$$

$$V_{C(t+\Delta t,0)} = V_{CSum.} + \left(\psi \cdot v_{(t+\Delta t,0)}^+ + (1-\psi) \cdot v_{(t,0)}^+ \right) \cdot A \cdot \Delta t. \quad (28)$$

W powyższym wzorze (28) prędkość $v^+_{(t+\Delta t,0)}$ wyznacza się dwuetapowo, tzn. najpierw wyznacza się jej wartość dla rzeczywistego obszaru kawitacyjnego powstałego w przekroju przy zaworze (26), a następnie wartość dla „rozerwania sumacyjnego” w danym kroku czasowym:

$$v_{(t+\Delta t,0)}^+ = \text{sign} \left[\left(v_{(t+\Delta t,0)}^+ \left| v_{(t+\Delta t,0)}^+ \right| \right) + 2g \sum_{i=1}^{f-1} \frac{V_{C(t+\Delta t,i,\Delta x)}}{A} \sin \gamma \right] \cdot \sqrt{\left(v_{(t+\Delta t,0)}^+ \right)^2 + 2g \sum_{i=1}^{f-1} \frac{V_{C(t+\Delta t,i,\Delta x)}}{A} \sin \gamma}. \quad (29)$$

Szczegółowy tok obliczania parametrów przepływu w węzłach brzegowych dla modelu CSMA przedstawiono na rysunku 12.



Rys. 12. Wyznaczanie parametrów brzegowych — model CSMA

2.2. Model CSMG

Szczególnym przypadkiem modelu dyskretnego jest podany przez Streetera i Wylięego [14] i opisany w pracy [5] tzw. model wydzielonego powietrza i kawitacji parowej. Model ten oparty jest na głównych równaniach opisujących uderzenie hydrauliczne (1) i (2) — z jedną różnicą, ciśnienie p zastąpiono w nim wysokością ciśnienia H . Dodatkowo w równaniu ciągłości (2) w miejsce prędkości propagacji fali ciśnienia w cieczy ' c_1 ' wprowadzono prędkość dla mieszaniny dwufazowej ' c_m '. Układ równań (1) i (2) rozwiązano metodą charakterystyk, co umożliwiło obliczanie szukanych funkcji $v(x, t)$ i $H(x, t)$ na płaszczyźnie (x, t) i tym samym objętości

przestrzeni kawitacyjnej rozerwania strumienia cieczy V_c . Otrzymany układ równań różniczkowych zwyczajnych dla tego modelu prezentuje się następująco:

$$\frac{g}{c_l \cdot H} \cdot \sqrt{\frac{R_g \cdot T \cdot K_l}{1 + \frac{K_l \cdot D}{E \cdot e}} \cdot \frac{m}{(\rho \cdot g)^2} + H^2} \cdot \frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + g \cdot \sin \gamma + \frac{\lambda_{ch} \cdot v \cdot |v|}{2 \cdot D} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{dx}{dt} = c_l \cdot H \cdot \left(\sqrt{\frac{R_g \cdot T \cdot K_l}{1 + \frac{K_l \cdot D}{E \cdot e}} \cdot \frac{m}{(\rho \cdot g)^2} + H^2} \right)^{-1}, \quad (31)$$

$$-\frac{g}{c_l \cdot H} \cdot \sqrt{\frac{R_g \cdot T \cdot K_l}{1 + \frac{K_l \cdot D}{E \cdot e}} \cdot \frac{m}{(\rho \cdot g)^2} + H^2} \cdot \frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + g \cdot \sin \gamma + \frac{\lambda_{ch} \cdot v \cdot |v|}{2 \cdot D} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{dx}{dt} = -c_l \cdot H \cdot \left(\sqrt{\frac{R_g \cdot T \cdot K_l}{1 + \frac{K_l \cdot D}{E \cdot e}} \cdot \frac{m}{(\rho \cdot g)^2} + H^2} \right)^{-1}. \quad (33)$$

Chwilową absolutną wysokość ciśnienia H wyznacza się z zależności:

$$H = H_w - z + \bar{H}, \quad (34)$$

gdzie: H_w — wysokość ciśnienia od poziomu porównawczego do linii ciśnień;
 z — odległość od poziomu porównawczego do rozważanego przekroju;
 \bar{H} — wysokość ciśnienia barometrycznego;
 λ_{ch} — chwilowa wartość współczynnika oporu.

Iloczyn współczynników z prawej strony równania charakterystyki (31) jest prędkością propagacji fali ciśnienia dla mieszaniny dwufazowej [14]:

$$c_m = c_l \cdot H \cdot \left(\sqrt{\frac{R_g \cdot T \cdot K_l}{1 + \frac{K_l \cdot D}{E \cdot e}} \cdot \frac{m}{(\rho \cdot g)^2} + H^2} \right)^{-1} = c_l \cdot \left(\sqrt{\frac{R_g \cdot T \cdot K_l}{1 + \frac{K_l \cdot D}{E \cdot e}} \cdot \frac{m}{\rho^2}} \right)^{-1}, \quad (35)$$

gdzie: R_g — uniwersalna stała gazowa;
 T — temperatura bezwzględna (K);
 K_1 — moduł ściśliwości cieczy;
 e — grubość ścianki przewodu;
 m — masa wolnego gazu na jednostkę objętości mieszaniny;
 E — moduł sprężystości materiału rurociągu;
 D — średnica wewnętrzna przewodu.

W związku z tym, że w równaniach opisujących przepływ nieustalony (30)-(33) uwzględniono zmienną (zależną od ciśnienia) prędkość propagacji fali ciśnienia, numeryczna procedura obliczeniowa funkcjonująca na prostokątnej siatce charakterystyk opiera się na interpolacji i pomocniczych procedurach iteracyjnych. Jak zauważyli sami autorzy tego modelu [14], interpolacja znacząco komplikuje całą procedurę i często odpowiada również za błędne symulowanie. Dlatego parę lat po przedstawieniu podstawowej wersji tego modelu E.B. Wylie [15] zaproponował, żeby wydzielający się gaz skupić w dyskretnych obszarach nieciągłości i tym samym prędkość propagacji fali ciśnienia pomiędzy nimi traktować jako stałą równą prędkości w cieczy. Szczegółowy tok postępowania przy wykorzystaniu tego modelu został przedstawiony w pracy Liou [6]. Wynika z niego, że w każdym analizowanym przekroju poprzecznym przewodu przy spadku ciśnienia poniżej wartości ciśnienia nasycenia cieczy rozpuszczonym gazem (najczęściej powietrzem) powstają obszary nieciągłości wypełnione gazem. Dodatkowo, gdy ciśnienie spadnie poniżej ciśnienia prężności pary, obszary te powiększają się o powstałe obszary odparowanej cieczy.

Procedura służąca do wyznaczenia bieżącego ciśnienia p_D oraz średniej prędkości przepływu v_D (rys. 1) wymaga rozwiązania następującego nieliniowego układu równań [6]:

$$v_D^+ = v_B + \frac{1}{c_1 \rho} [p_D - p_B] - g \sin \gamma \Delta t - \frac{2 \Delta t}{R \rho} \tau_B, \quad (36)$$

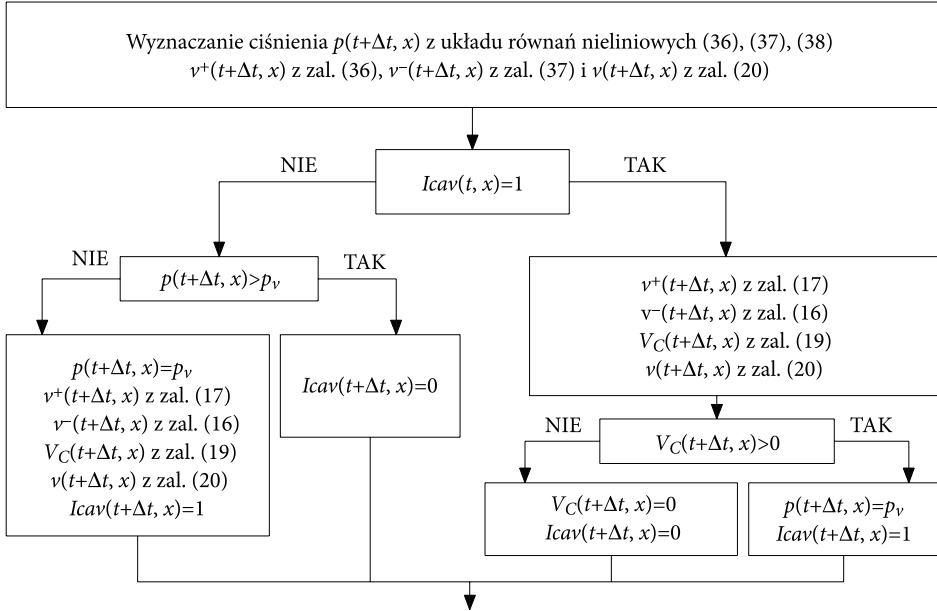
$$v_D^- = v_A + \frac{1}{c_1 \rho} [p_A - p_D] - g \sin \gamma \Delta t - \frac{2 \Delta t}{R \rho} \tau_A, \quad (37)$$

$$-\frac{p_o \alpha_o \Delta x}{(p_D - p_v)^2} \cdot \frac{p_D - p_E}{\Delta t} = \psi (v_D^+ - v_D^-) + (1 - \psi) \cdot (v_E^+ - v_E^-), \quad (38)$$

gdzie: p_o — ciśnienie odniesienia;
 α_o — udział przestrzeni gazowej przy ciśnieniu p_o ;
 ψ — współczynnik wagowy (dla $\psi < 0,5$ rozwiązanie jest niestabilne, przy $\psi = 0,5$ rozwiązanie jest stabilne, lecz zawiera oscylacje, natomiast gdy $\psi > 0,5$ rozwiązanie jest tłumione [15]);

v^+ — prędkość cieczy z prawej strony rozerwania;
 v^- — prędkość cieczy z lewej strony rozerwania.

Schemat postępowania numerycznego w węzłach wewnętrznych siatki charakterystyk dla modelu CSMG przedstawiony jest na rysunku 13.



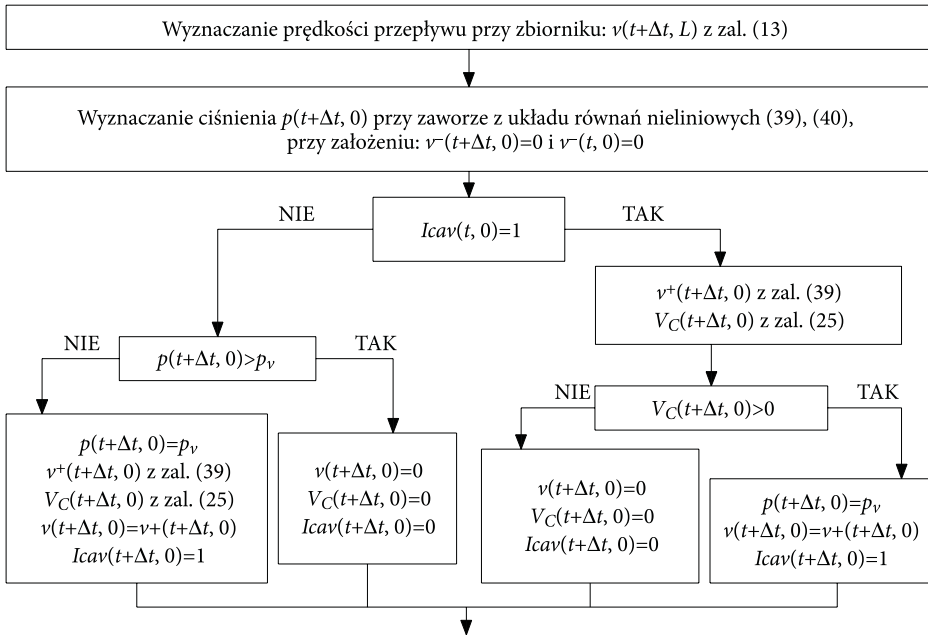
Rys. 13. Schemat blokowy algorytmu obliczeniowego w wewnętrznych węzłach siatki charakterystyk — model CSMG

Średnia prędkość przepływu w przekroju zlokalizowanym tuż przy zbiorniku ciśnieniowym $v(t + \Delta t, L)$ w tym modelu liczona jest z identycznego wzoru jak w modelach CSM oraz CSMA, tzn. ze wzoru (13). Ciśnienie przy zaworze wyznacza się natomiast z układu dwóch równań nieliniowych:

$$v_M^+ = v_R + \frac{1}{c_l \rho} [p_M - p_R] - g \sin \gamma \Delta t - \frac{2 \Delta t}{R \rho} \tau_R, \quad (39)$$

$$-\frac{p_o \alpha_o \Delta x}{(p_M - p_v)^2} \cdot \frac{p_M - p_o}{\Delta t} = \psi \cdot v_M^+ + (1 - \psi) \cdot v_o^+. \quad (40)$$

Poniżej przedstawiono schemat ideowy działań realizowanych w programie komputerowym dla brzegowych węzłów siatki charakterystyk (rys. 14).



Rys. 14. Wyznaczanie parametrów brzegowych — model CSMG

2.3. Model BCM

Podczas kawitacji parowej pęcherze mogą być jednorodnie rozmieszczone w przekroju poprzecznym rurociągu albo połączone w większy obszar nieciągłości (czasami wypełniający cały przekrój). Często na długości rurociągu w pewnym określonym czasie mogą występować obie powyższe formy. Ich zachowanie może być opisane za pomocą teorii przepływu dwufazowego. Pojedyncza faza staje się wówczas szczególnym przypadkiem i zachodzi, gdy na całej długości rozpatrywanego rurociągu nie występują nieciągłości przepływu spowodowane kawitacją parową.

Model parowego przepływu dwufazowego jest alternatywnym wyrażeniem matematycznym przewyżającym niektóre ograniczenia modeli rozerwania strumienia cieczy.

Różnice prędkości pomiędzy fazą ciekłą a fazą gazową (para) powodują wzajemną wymianę pędu. Często jednak te procesy zachodzą bardzo szybko i można zakładać, że dominuje stan równowagi, tzn. że pęcherzyki parowe dysponują tą samą prędkością i ciśnieniem co ciecz. Na podstawie powyższego założenia bazuje model jednorodnej kawitacji parowej.

Podstawowy układ równań opisujący przepływ nieustalony z kawitacją (równania ciągłości i ruchu) dla tego modelu wygląda następująco [9]:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + (\rho_l - \rho_v) \cdot \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + \rho_m \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{\alpha_l} \right) = 0 \\ \rho_m \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{\alpha_l} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{R} \tau \left(\frac{v}{\alpha_l}, \alpha_l \right) + \rho_m \cdot g \cdot \sin \gamma = 0, \end{cases} \quad (41)$$

gdzie: α_l — współczynnik stężenia fazy ciekłej;
 γ — kąt pochylenia przewodu ciśnieniowego;
 ρ_l — gęstość cieczy;
 ρ_v — gęstość pary cieczy.

W równaniu powyższym ρ_m jest gęstością mieszaniny wyznaczaną z liniowej zależności:

$$\rho_m = \alpha_l \cdot \rho_l + (1 - \alpha_l) \cdot \rho_v. \quad (42)$$

Drugie wyrażenie w równaniu ciągłości (41) opisuje wielkość międzyfazowego przenikania masy, natomiast wyrażenie v/α_l w równaniu ciągłości i ruchu ukazuje różnicę pomiędzy prędkością przepływu fazy ciekłej a prędkością przepływu fazy parowej. Opisany powyżej model należy do grupy modeli dwufazowych.

W wyniku wykorzystania metody charakterystyk (MOC) układ równań różniczkowych cząstkowych opisujących model BCM (41) sprowadzony został do dwóch następujących układów równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\alpha_l} \right) \pm \frac{1}{\rho_l \cdot c} \cdot \frac{d}{dt} (p - p_v) \pm c \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\rho_m}{\rho_l} \right) + g \cdot \sin \gamma + \frac{2 \cdot \tau}{R \cdot \rho_m} = 0, \quad (43)$$

$$\text{gdymy:} \quad dx = \pm c \cdot dt. \quad (44)$$

Następnie, dokonując całkowania, otrzymano:

$$C^+ : \frac{v_D}{\alpha_{lD}} + \frac{1}{\rho_l \cdot c} \cdot (p_D - p_v) + \frac{c}{2} \cdot \ln \frac{\rho_{mD}}{\rho_l} = Z1, \quad (45)$$

$$C^- : \frac{v_D}{\alpha_{lD}} - \frac{1}{\rho_l \cdot c} \cdot (p_D - p_v) - \frac{c}{2} \cdot \ln \frac{\rho_{mD}}{\rho_l} = Z2. \quad (46)$$

gdzie poprzez Z1 i Z2 zapisano wartości stałe wyliczane na podstawie danych z poprzedniego kroku czasowego:

$$Z1 = \frac{v_A}{\alpha_{lA}} + \frac{1}{\rho_l \cdot c} \cdot (p_A - p_v) + \frac{c}{2} \cdot \ln \frac{\rho_{mE} \cdot \rho_{mF}}{\rho_l \cdot \rho_{mA}} - \frac{2 \cdot \Delta t}{R \cdot \rho_{mA}} \cdot \tau_A - \Delta t \cdot g \cdot \sin \gamma, \quad (47)$$

$$Z2 = \frac{v_B}{\alpha_{lB}} - \frac{1}{\rho_l \cdot c} \cdot (p_B - p_v) - \frac{c}{2} \cdot \ln \frac{\rho_{mE} \cdot \rho_{mG}}{\rho_l \cdot \rho_{mB}} - \frac{2 \cdot \Delta t}{R \cdot \rho_{mB}} \cdot \tau_B - \Delta t \cdot g \cdot \sin \gamma. \quad (48)$$

Gdy dla analizowanego w procesie numerycznym węzła numerycznego zachodzi nierówność $Z1 \geq Z2$, wówczas kawitacja nie występuje. W danym rozpatrywanym przekroju wyznacza się wówczas średnią prędkość przepływu v oraz ciśnienie p , przy założeniu $\alpha_1 = 1$ z następujących wzorów:

$$p_D = \frac{\rho_l \cdot c}{2} \cdot (Z1 - Z2) + p_v, \quad (49)$$

$$v_D = \frac{\alpha_{lD}}{2} \cdot (Z1 + Z2). \quad (50)$$

Natomiast gdy $Z1 < Z2$, to ciecz paruje i tym samym kawitacja ma miejsce. Wyznacza się wówczas w rozpatrywanym przekroju średnią prędkość przepływu ze wzoru (50) oraz współczynnik stężenia fazy ciekłej, zakładając $p_D = p_v$:

$$\alpha_{lD} = \frac{\rho_l \cdot \exp\left(\frac{Z1 - Z2}{c}\right) - \rho_v}{\rho_l - \rho_v}. \quad (51)$$

Powyższe równanie na współczynnik stężenia fazy ciekłej wynika z przekształcenia wzoru (42) do postaci:

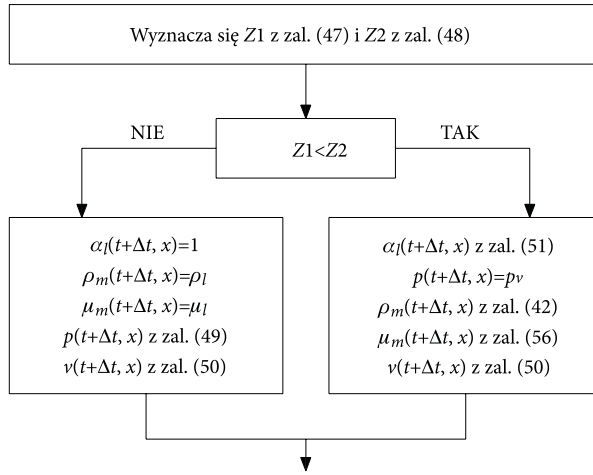
$$\alpha_{lD} = (\rho_{mD} - \rho_v) / (\rho_l - \rho_v), \quad (52)$$

w której gęstość mieszaniny ρ_{mD} wyznacza się z równań (45)-(48) przy założeniu $p_D = p_v$.

Schemat postępowania numerycznego w węzłach wewnętrznych siatki charakterystyk dla modelu BCM przedstawiony jest na poniższym rysunku 15.

Warunki brzegowe, które założono w niniejszej pracy, są następujące: z prawej strony przewodu znajduje się zbiornik ciśnieniowy z cieczą, z lewej zawór odcinający przepływ. Przy zbiorniku znane są następujące parametry (rys. 2): $p_N = p_z$, $\alpha_N = \alpha_1 = 1$ i $\rho_{mN} = \rho_l$. Parametry te umożliwiają wyznaczenie prędkości przepływu w przekroju przy zbiorniku ciśnieniowym z charakterystyki C^+ z równań (45) i (47):

$$v_N = \frac{v_S}{\alpha_{lS}} + \frac{1}{c\rho} (p_S - p_z) + \frac{c}{2} \cdot \ln \frac{\rho_{mW}}{\rho_{mS}} - \frac{2\Delta t}{\rho_{mS}R} \tau_S - g\Delta t \sin \gamma. \quad (53)$$



Rys. 15. Schemat blokowy algorytmu obliczeniowego w wewnętrznych węzłach siatki charakterystyk — model BCM

Ciśnienie przy zaworze wyznacza się przy założeniu $v_M = 0$ i $\rho_{mM} = \rho_l$ ze wzoru:

$$p_M = p_R - \rho_l c \left(\frac{v_R}{\alpha_{lR}} \right) + \frac{\rho_l c^2}{2} \left(\ln \frac{\rho_{mO} \rho_{mT}}{\rho_l \cdot \rho_{mR}} - \ln \frac{\rho_{mM}}{\rho_l} \right) + \frac{2\Delta t \rho_l c}{R \rho_{mR}} \cdot \tau_R + \rho_l c g \Delta t \sin \gamma. \quad (54)$$

Jednak w momencie wystąpienia kawitacji, tzn. gdy $p_M < p_v$, zakłada się $p_M = p_v$ i wyznacza się zmianę gęstości mieszaniny spowodowaną powstaniem fazy parowej:

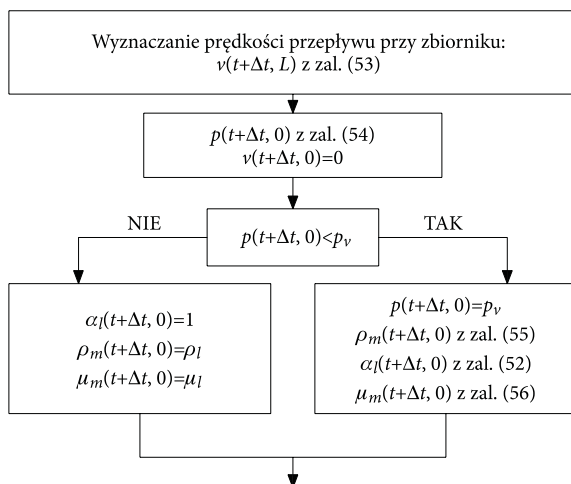
$$\rho_{mM} = \rho_l \cdot \exp \left[\frac{2}{\rho_l c^2} (p_R - p_v) - \frac{2}{c} \left(\frac{v_R}{\alpha_{lR}} \right) + \ln \frac{\rho_{mO} \rho_{mT}}{\rho_l \cdot \rho_{mR}} + \frac{4\Delta t}{c R \rho_{mR}} \cdot \tau_R + \frac{2g\Delta t \sin \gamma}{c} \right]. \quad (55)$$

Znajomość ρ_{mM} umożliwi wyznaczenie chwilowej wartości współczynnika stężenia fazy ciekłej α_{lM} w wzoru (52). Lepkość dynamiczną mieszaniny w powyższym modelu wyznacza się z zależności:

$$\mu_m = \mu_l \cdot \alpha_l + (1 - \alpha_l) \cdot \mu_g, \quad (56)$$

gdzie: μ_l — lepkość dynamiczna fazy ciekłej;
 μ_g — lepkość dynamiczna fazy gazowej;
 α_l — współczynnik stężenia fazy ciekłej.

Szczegółowy schemat obrazujący obliczanie parametrów przepływu w węzłach brzegowych dla modelu BCM przedstawia rysunek 16.



Rys. 16. Wyznaczanie parametrów brzegowych — model BCM

Uproszczony schemat blokowy uniwersalnego algorytmu obliczeniowego na podstawie zaprezentowanych w niniejszej pierwszej części pracy schematów przedstawiony jest w załączniku na rysunku Z1.

3. Podsumowanie

W pierwszej części pracy zaprezentowane zostały kluczowe modele przepływu nieustalonego z kawitacją. Dla każdego z nich pokazano szczegółowe schematy blokowe, na bazie których powstały własne programy komputerowe umożliwiające symulację stanów nieustalonych z kawitacją w przewodach ciśnieniowych. Weryfikacja symulacyjna zmodyfikowanych modeli obliczeniowych zostanie ukazana w drugiej części niniejszej pracy, gdzie szczegółowo omówiony zostanie również temat modelowania zmiennych oporów hydraulicznych zarówno przy przepływach laminarnych, jak i turbulentnych.

Artykuł wpłynął do redakcji 1.07.2014 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 19.06.2015 r.

Praca niniejsza była częściowo realizowana w ramach projektu badawczego nr: N50402931/2026 nt. „Modele i metody obliczeniowe przebiegu uderzenia hydraulicznego z uwzględnieniem kawitacji oraz tarcia cieczy”, koordynowanego przez IMP PAN w Gdańsku.

LITERATURA

- [1] ADAMKOWSKI A., LEWANDOWSKI M., *A new method for numerical prediction of liquid column separation accompanying hydraulic transients in pipelines*, 5th Joint ASME/JSME Fluids Engineering Conference, FEDSM2007-37617, San Diego, California, July 30-August 2, 2007, USA.
- [2] ADAMKOWSKI A., LEWANDOWSKI M., *Improvement of the method for calculation of liquid transient pipe flow with column separation*, Proceedings of the 10th International Conference on Pressure Surges, BHRA Group Conf. Series Publ., UK 2008, 14-16 May, Edinburgh, 83-98.
- [3] ADAMKOWSKI A., *Badania teoretyczne i doświadczalne łagodzenia uderzenia hydraulicznego zaworami odcinającymi i obejściowymi wirowych maszyn wodnych*, Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych PAN, Zeszyt 461/1423, Gdańsk, 1996.
- [4] ADAMKOWSKI A., *Stany przejściowe w układach wirowych maszyn wodnych*, Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych PAN, Zeszyt 534/1493, Gdańsk, 2004.
- [5] BAGIEŃSKI J., NIEŁACNY M., *Modele obliczeniowe uderzenia hydraulicznego z uwzględnieniem wydzielonego powietrza i kawitacji*, Archiwum Hydrotechniki, t. 33, z. 3, 1986, 259-266.
- [6] LIOU C.P., *Numerical properties of the discrete gas cavity model for transients*, Journal of Fluids Engineering, American Society of Mechanical Engineers, vol. 122, no. 3, September 2000, 636-639.
- [7] NIEŁACNY M., *Uderzenia hydrauliczne*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2002.
- [8] SAFWAT H.H., VAN DEN POLDER J., *Experimental and analytic data correlation study of water column separation*, Journal of Fluids Engineering, March 1973, 91-97.
- [9] SHU J.J., *Modelling vaporous cavitation on fluid transients*, Intern. Journal of Pressure Vessels and Piping, vol. 80, 2003, 187-195.
- [10] STREETER V.L., *Transient cavitating pipe flow*, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 109, no. 11, November, 1983, 1408-1423.
- [11] VARDY A.E., BROWN J.M.B., *Efficient Approximation of Unsteady Friction Weighting Functions*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 130, 11, 2004, 1097-1107.
- [12] VARDY A.E., BROWN J.M.B., *Transient turbulent friction in smooth pipe flows*, Journal of Sound and Vibration, vol. 259, Issue 5, 30 January 2003, 1011-1036.
- [13] VARDY A.E., BROWN J.M.B., *Transient, turbulent, smooth pipe friction*, J. Hydraul. Res., 33, 1995, 435-456.
- [14] WYLIE E.B., STREETER V.L., *Fluid transients*, Mc Graw — Hill, New York, 1978.
- [15] WYLIE E.B., *Simulation of vaporous and gaseous cavitation*, Journal of Fluid Engineering, vol. 106, September 1984, 307-311.
- [16] ZARZYCKI Z., URBANOWICZ K., *Modelowanie stanów nieustalonych podczas uderzenia hydraulicznego z uwzględnieniem kawitacji przejściowej w przewodach ciśnieniowych*, Chemical and Process Engineering PAN, t. 27, z. 3/1, Wrocław, 2006, 915-933.
- [17] ZARZYCKI Z., *On Weighting Function for Wall Shear Stress During Unsteady Turbulent Flow*, Proc. of 8th International Conference on Pressure Surges, BHR Group Conference Series, no. 39, 12-14 April, The Hague 2000, The Netherlands, 529-534.
- [18] ZARZYCKI Z., *Opory niestacjonarnego ruchu cieczy w przewodach zamkniętych*, Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej, nr 516, Szczecin, 1994.
- [19] ZIELKE W., *Frequency-Dependent Friction in Transient Pipe Flow*, Journ., ASME, 90, March 1968, 109-115.

K. URBANOWICZ

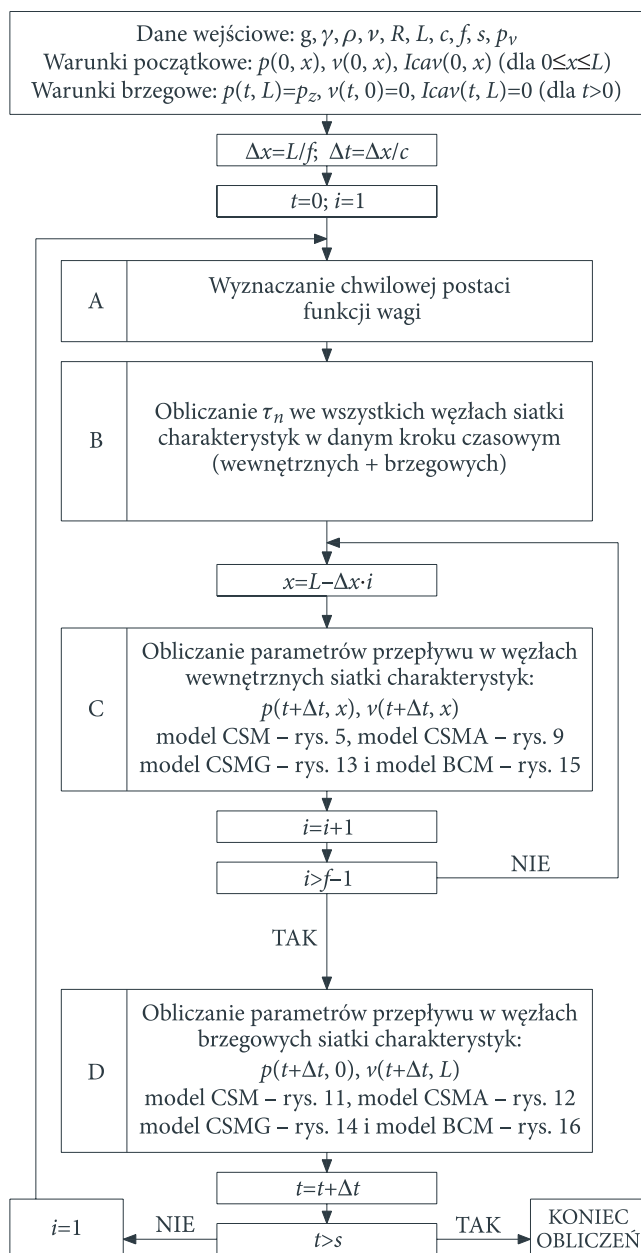
**Modelling transient pipe flow with cavitation and frequency dependent friction
— part I (cavitation models)**

Abstract. The paper presents four key mathematical models of transient cavitating pipe flow, i.e. column separation model (*Column Separation Model* — CSM), gas cavitation model (*Gas Column Separation Model* — CSMG), Adamkowski model (*Adamkowski's Column Separation Model* — CSMA) and bubbly cavitation model (*Bubble Cavitation Model* — BCM). In the all investigated models, frequency-dependent frictional losses were taken into account. The equations describing all models have been solved using the method of characteristics. In this work, the wall shear stress (defined as an effect of unsteady fluid friction) is presented as a sum of quasi-steady and unsteady components. The unsteady component of the wall shear stress is modelled as an convolution of local fluid acceleration and a weighting function $w(t)$.

Keywords: numerical fluid mechanics, transient flow, cavitation, frequency-dependent friction losses, pipeline, waterhammer

DOI: 10.5604/12345865.1168704

Załącznik



Rys. Z1. Uproszczony schemat blokowy algorytmu obliczeniowego

Uwaga: Bloki A i B zostaną szczegółowo omówione w drugiej części niniejszej pracy.

