MINUT 2021 (3), s. 166-195
ISSN 2719-3063

Jan Jakub LUDEW[1], Michał RÓŻAŃSKI[1], Barbara SMOLEŃ-DUDA[1], Roman WITUŁA[1], Szymon CZERNIK[2,*]

[1]Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

[2]Akademickie Liceum Ogólnokształcące w Gliwicach, ul. ks. M. Strzody 10, 44-100 Gliwice

[*]Szymon Czernik podczas pisania tego artykułu był uczniem klasy maturalnej

Iteracje odwzorowań, orbity, twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Streszczenie. Praca stanowi zbiór zadań i problemów poświęconych wprowadzeniu w teorię punktów stałych, która realizowana jest jedynie w zarysie na drugim semestrze studiów na kierunku matematyka. Stanowi niezależny byt, ale w gruncie rzeczy jest uzupełnieniem finalizowanego opracowania teoretycznego, które również zamierzamy opublikować w tym czasopiśmie.
Słowa kluczowe: iteracje odwzorowań, orbity, punkty stałe, kontrakcje, stała zwężająca, twierdzenie Banacha o punkcie stałym, twierdzenie Szarkowskiego.

1. Podstawowe pojęcia i oznaczenia (zob. [2], [7], [9], [10])

Niech para (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną, gdzie $X \neq \emptyset$.

Definicja 1. *Odwzorowanie $f\colon X \to X$ nazywamy kontrakcją, jeśli istnieje $k \in [0,1)$ takie, że dla dowolnych $x, y \in X$ mamy:*

$$\varrho\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k\varrho(x,y).$$

Każdą taką stałą k nazywamy stałą zwężającą dla odwzorowania f.

Definicja 2. *Odwzorowanie $f\colon X \to X$ nazywamy kontrakcyjnym, jeśli dla dowolnych $x, y \in X$, $x \neq y$, zachodzi:*

$$\varrho\big(f(x), f(y)\big) < \varrho(x,y).$$

Definicja 3. *Niech $f\colon X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem. Punkt $x \in X$ nazywamy punktem stałym odwzorowania f, gdy $f(x) = x$.*

Autor korespondencyjny: M. Różański (Michal.Rozanski@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 10.05.2021.

Definicja 4. *Niech $f\colon X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem. Odwzorowanie $f^n\colon X \to X$, gdzie $n \in \mathbb{N}_0$, nazywamy n-tą iteracją i definiujemy rekurencyjnie w następujący sposób:*

$$f^0(x) = x, \qquad f^n(x) = f^{n-1}\big(f(x)\big), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in X,$$

czyli równoważnie jako:

$$f^0 = \mathrm{id}_X, \qquad f^n = f^{n-1} \circ f, \qquad n \in \mathbb{N},$$

a stąd $f^1 = f$.

Definicja 5. *Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $f\colon X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem. Orbitą n-elementową odwzorowania f nazwiemy dowolny n-elementowy zbiór $\mathcal{O} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, taki że:*

$$f(x_1) = x_2, \qquad f(x_2) = x_3, \qquad \ldots, \qquad f(x_n) = x_1.$$

Definicja 6. *Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $f\colon X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem. Punkt $x \in X$ jest n-okresowy dla f, jeśli $f^n(x) = x$ i jednocześnie $f^k(x) \neq x$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$.*

Definicja 7. *Mówimy, że funkcja $f\colon I \to I$, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem niepustym i niezdegenerowanym, ma własność Darboux, jeśli dla dowolnego przedziału $J \subset I$ jego f-obraz, to jest zbiór $f(J)$, także jest przedziałem.*

Twierdzenie 1 (Banacha o punkcie stałym). *Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Jeśli odwzorowanie $f\colon X \to X$ jest kontrakcją, to f ma dokładnie jeden punkt stały.*

Uwaga 1. W dalszej części artykułu będziemy po prostu pisać twierdzenie Banacha.

Uwaga 2. Wybrane z prezentowanych tutaj zadań mają charakter projektów. To znaczy na ich podstawie, po stosownym rozszerzeniu treści i uzgodnieniu z prowadzącym zajęcia, można, po rozliczeniu projektu na konsultacjach, zdobyć dodatkowe porcje punktów z aktywności i zrealizować odpowiednie efekty nauczania (nawet więcej niż jeden efekt).

2. Zadania (zob. [4], [12], [13], [14])

Zadanie 1. Niech $f(x) = 2x(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że n-ta iteracja f^n odwzorowania f ma postać:

$$f^n(x) = \frac{1}{2} - 2^{2^n - 1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Niech $n = 1$. Wówczas mamy:

$$f(x) = \frac{1}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2x(1-x).$$

Załóżmy teraz, że wzór jest prawdziwy dla n-tej iteracji odwzorowania f, czyli:

$$f^n(x) = \frac{1}{2} - 2^{2^n-1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

Wówczas znajdujemy:

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) = f^n\big(f(x)\big) &= \frac{1}{2} - 2^{2^n-1}\left(\left(\frac{1}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\right)^{2^n} = \\ &= \frac{1}{2} - 2^{2^n-1}\left(-2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{2^n} = \frac{1}{2} - 2^{2^{n+1}-1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

co na mocy zasady indukcji matematycznej kończy dowód.

Zadanie 2. Niech $F(x) = x^2 - 2$, $x \geqslant 2$. Udowodnić, że n-ta iteracja F^n odwzorowania F ma postać:

$$F^n(x) = \left(\frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Wskazówka. Przyjąć $x = y + \frac{1}{y}$ i zauważyć, że:

$$F^n(x) = y^{2^n} + y^{-2^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 3. Określić liczbę punktów stałych każdej iteracji funkcji f, gdzie:

a) $f(x) = 2|x-1|$, $x \in [0,2]$,

b) $f(x) = \pi|\cos x|$, $x \in [0,\pi]$.

Wskazówka. W celu wstępnego zorientowania się w zagadnieniu proponujemy narysować wykresy funkcji f, f^2 oraz f^3.

Zadanie 4.

a) Rozstrzygnąć dla jakich wartości $a > 0$, $a \neq 1$, funkcja $f_a(x) := \log_a x$, $x > 0$, posiada punkt stały.
Wskazówka. Skorzystać z faktu, że funkcja $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ jest rosnąca w przedziale $(0,e]$ oraz malejąca na półosi $[e,\infty)$.

b) Rozważyć też problem istnienia punktów stałych złożeń $f_a \circ f_b$, $f_a \circ f_b \circ f_c$, itd. w zależności od wartości $a,b,c > 0$. Przykładowo zauważyć, że dla każdego $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ złożenie $f_a \circ f_{\frac{1}{e}}$ posiada punkt stały.

c) Udowodnić, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$ istnieje rosnąca funkcja $g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posiadająca dokładnie k punktów stałych i taka, że:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g_k(x)}{f_e^n(x)} = 0$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Istnieje też rosnąca funkcja $g_\infty\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posiadająca przeliczenie wiele punktów stałych i taka, że:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g_\infty(x)}{f_e^n(x)} = 0$$

Uwaga 3. Fakt z podpunktu c) zadania 4 można znacząco uogólnić. Niech $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niemalejących funkcji $\varphi_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, spełniających warunek:

$$\big(\forall x \in \mathbb{N}\big)\colon \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} = \infty.$$

Wówczas dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\omega\}$ istnieje rosnąca funkcja $\psi_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posiadająca dokładnie k punktów stałych i taka, że:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi_k(x)}{\varphi_n(x)} = 0$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Twierdzenie to stanowi uogólnienie klasycznego wyniku du Bois-Reymonda z 1875 roku (zob. [3]), gdzie w miejsce funkcji ψ_k, $k \in \mathbb{N}$, rozważano jedynie rosnącą funkcję $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Niech $X \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $f\colon X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem. Udowodnić, że odwzorowanie f posiada punkt n-okresowy wtedy i tylko wtedy, gdy posiada n-elementową orbitę. Co więcej, wszystkie elementy n-elementowej orbity są n-okresowe.

Rozwiązanie. Załóżmy, że odwzorowanie f posiada n-elementową orbitę $\mathcal{O} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Wtedy z definicji jest:

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_3, \quad \ldots, \quad f(x_n) = x_1,$$

więc mamy $f^n(x_1) = x_1$. Jeśli dla pewnego $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ zachodziłoby $f^k(x_1) = x_1$, to mielibyśmy $x_1 = x_{k+1}$, co prowadziłoby do sprzeczności z założeniem dotyczącym mocy orbity $\mathcal{O}$. Stąd x_1 jest punktem n-okresowym. Teraz załóżmy, że odwzorowanie f posiada n-okresowy punkt $z \in X$. Wtedy, jak łatwo można sprawdzić, zbiór:

$$\mathcal{O} = \{z, f(z), f^2(z), \ldots, f^{n-1}(z)\}$$

jest n-elementową orbitą odwzorowania f. Dodatkowo widzimy, że wszystkie elementy orbity są punktami n-okresowymi, ponieważ definicja orbity jest niezmiennicza ze względu na cykliczne przestawienie punktów, tzn:

$$\mathcal{O} = \{f(z), f^2(z), \ldots, f^{n-1}(z), z\} = \{f^2(z), \ldots, f^{n-1}(z), z, f(z)\} = \ldots.$$

Zadanie 6. Niech $c \in (0, 1)$ oraz:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} & \text{dla } x \in [0, c], \\ \frac{1-x}{1-c} & \text{dla } x \in [c, 1]. \end{cases}$$

Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja f posiada n-elementową orbitę.

Szkic rozwiązania. Zauważmy, że n-krotne złożenie odwzorowania f z sobą, tj. odwzorowanie f^n, jest funkcją kawałkami monotoniczną oraz jej wykres jest łamaną składającą się z 2^n odcinków. Każdy z odcinków tworzących wykres odwzorowania f^n posiada jeden z końców na osi OX a drugi na prostej $y = 1$ oraz leży w kwadracie $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ i } 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Stąd wykres funkcji identycznościowej $\mathrm{id}(x) = x$ przecina każdy odcinek wykresu funkcji f^n dokładnie jeden raz. Zatem mamy 2^n punktów, dla których

$f^n(x) = x$. Ponieważ wykres funkcji f^k posiada 2^k punktów wspólnych z wykresem funkcji id, więc istnieje co najwyżej $2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 2$ punktów $x \in [0,1]$ o tej własności, że $f^k(x) = x$ dla co najmniej jednego $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Zatem co najmniej dwa z 2^n punktów stałych funkcji f^n są punktami n-okresowymi funkcji f, a więc na mocy zadania 5 funkcja f posiada n-elementową orbitę.

Zadanie 7.

a) Niech $f\colon [a,b] \to [a,b]$. Załóżmy, że istnieje punkt $c \in [a,b]$ taki, że $f|_{[a,c]}$ jest funkcją rosnącą, $f|_{[c,b]}$ jest funkcją malejącą, $f(a) = f(b) = a$ oraz $f(c) = b$. Wyznaczyć ilość punktów stałych wszystkich iteracji funkcji f przy założeniu, że f jest funkcją ciągłą. Czy funkcja f posiada wówczas n-elementową orbitę dla każdego $n \in \mathbb{N}$?

b) Dla każdego $c \in (a,b)$ podaj przykład funkcji $f_c\colon [a,b] \to [a,b]$, dla której istnieje przeliczalny zbiór $W_c \subset (a,b)$ taki, że f_c jest rosnąca w zbiorze $[a,c] \setminus W_c$ i jest malejąca w zbiorze $[c,b] \setminus W_c$ oraz spełnia równości:
$$f_c(a) = f_c(b) = a \qquad \text{oraz} \qquad f_c(c) = b$$
i której wszystkie iteracje posiadają dokładnie jeden punkt stały $x = a$.
Rozwiązanie. Niech $c \in (a,b)$. Rozważmy dowolną funkcję ciągłą $f\colon [a,b] \to [a,b]$, która jest rosnąca w $[a,c]$, malejąca w $[c,b]$ i która spełnia równości:
$$f(a) = f(b) = a \qquad \text{oraz} \qquad f(c) = b.$$
Niech:
$$\mathcal{F} := \big\{x \in [a,b]\colon (\exists n \in \mathbb{N})\big(f^n(x) = x\big)\big\}.$$
Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ n-ta iteracja funkcji f posiada 2^n punktów stałych, więc zbiór $\mathcal{F}$ jest przeliczalny. Przyjmijmy:
$$f_c(x) = \begin{cases} a, & \text{gdy } x \in \mathcal{F}, \\ f(x), & \text{gdy } x \in [a,b] \setminus \mathcal{F}. \end{cases}$$
Wtedy dla dowolnego $x \in [a,b]$ oraz $n \in \mathbb{N}$, jeśli $f_c^n(x) = f^n(x) = x$, to $x \in \mathcal{F}$, czyli $f_c^n(x) = a = x$. Jeśli $f_c^n(x) = x$ i $f_c^n(x) \neq f^n(x)$, to istnieje $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, takie że $f_c^k(x) = a$, czyli $f_c^n(x) = a = x$.

Zadanie 8. Niech $X \neq \emptyset$ i niech $f\colon X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem. Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ odwzorowanie f^n posiada dokładnie jeden punkt stały. Udowodnić, że wówczas odwzorowanie f również posiada dokładnie jeden punkt stały.
Rozwiązanie. Przypomnijmy, że jeśli $z \in X$ jest punktem stałym odwzorowania f, to również jest punktem stałym każdego złożenia f z sobą. Zatem, na podstawie założenia zadania, f może posiadać co najwyżej jeden punkt stały. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $z \in X$ jest jedynym punktem stałym iteracji f^n. W takim razie:
$$f^n\big(f(z)\big) = f^{n+1}(z) = f\big(f^n(z)\big) = f(z),$$
co oznacza, że $f(z)$ jest punktem stałym złożenia f^n i z jednoznaczności punktu stałego mamy:
$$f(z) = z.$$

Uwaga 4. Pojawia się naturalne pytanie o uogólnienie stwierdzenia stanowiącego treść powyższego zadania. Okazuje się, że w pewnych przypadkach jest możliwe znaczne osłabienie założeń, co pokazuje zadanie 9.

Zadanie 9. Niech odwzorowanie $f\colon I \to I$ będzie ciągłe, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem niepustym. Udowodnić, że jeśli dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, złożenie f^n posiada punkt stały, to f również posiada punkt stały.
Rozwiązanie. Przypuśćmy, że funkcja f nie ma punktów stałych. Możemy wtedy rozważyć trzy różne przypadki.

a) Jeśli dla każdego $x \in I$ zachodzi $f(x) > x$, to wtedy indukcyjnie wykazujemy, że:

$$f^n(x) = f\big(f^{n-1}(x)\big) > f^{n-1}(x) > \ldots > x.$$

Zatem w tym przypadku żadna iteracja nie ma punktu stałego.

b) Jeśli natomiast dla każdego $x \in I$, mamy $f(x) < x$, to analogicznie jak poprzednio pokazujemy, że:

$$f^n(x) = f\big(f^{n-1}(x)\big) < f^{n-1}(x) < \ldots < x,$$

a więc żadna iteracja nie ma punktu stałego.

c) Jeżeli jednak istnieją punkty $x_1, x_2 \in I$ takie, że $f(x_1) < x_1$ oraz $f(x_2) > x_2$, to zdefiniujmy funkcję $g\colon I \to I$ określoną wzorem:

$$g(x) = f(x) - x.$$

Oczywiście funkcja g jest ciągła w przedziale I. Wtedy:

$$g(x_1) = f(x_1) - x_1 < 0 \qquad \text{oraz} \qquad g(x_2) = f(x_2) - x_2 > 0$$

i z własności Darboux, istnieje $x_0 \in \big(\min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\}\big)$ takie, że $g(x_0) = 0$, to jest:

$$f(x_0) = x_0$$

co stoi w sprzeczności z założeniem.

Uwaga 5. W szczególności każda ciągła inwolucja, tj. odwzorowanie ciągłe $f\colon I \to I$ takie, że $f \circ f = \mathrm{id}_I$ (przykładowo odwzorowanie $f(x) = \big(1 - x^{2/3}\big)^{3/2}$, $x \in [0,1]$), jak też odwzorowanie ciągłe $F\colon I \to I$ takie, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $F^n = \mathrm{id}_I$ posiada punkt stały. Dla zainteresowanego Czytelnika istotna może być informacja, że jeśli I jest przedziałem symetrycznym względem zera, a funkcja $f\colon I \to I$ jest nieparzystą inwolucją ciągłą, to $f = \mathrm{id}_I$ lub $f = -\mathrm{id}_I$.

Zadanie 10. (uogólnienie zadania 9) Niech odwzorowanie $f\colon I \to I$ będzie ciągłe, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym przedziałem niepustym. Udowodnić, że jeśli dla pewnego skończonego podzbioru $Z \subset I$ zachodzi $f(Z) \subset Z$, to odwzorowanie f posiada punkt stały.
Rozwiązanie. Niech $|Z| = n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, oraz $z \in Z$. Rozważmy zbiór $A = \{f(z), f^2(z), \ldots f^{n+1}(z)\} \subset Z$. Ponieważ $|A| \leqslant n$, więc na podstawie zasady szufladkowej Dirichleta istnieją $i, j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $i < j$,

takie, że $f^j(z) = f^i(z)$. Jeśli oznaczymy $x := f^i(z)$, to wtedy:

$$f^{j-i}(x) = f^{j-i}\big(f^i(z)\big) = f^j(z) = f^i(z) = x,$$

gdzie $j - i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, czyli punkt x jest punktem stałym iteracji f^{j-i}. Odwołanie się do zadania 9 kończy dowód.

Zadanie 11. (funkcja uregulowana a punkty stałe) Rozpocznijmy od podania definicji funkcji uregulowanej.

Definicja 8. *(Nicolas Bourbaki, 1949) Funkcję $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją uregulowaną, jeśli dla każdego $\xi \in (a,b]$ istnieje właściwa granica lewostronna $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)$ oraz dla każdego $\xi \in [a,b)$ istnieje właściwa granica prawostronna $\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x)$.*

Podać przykład różnowartościowej funkcji uregulowanej $f\colon [a,b] \to [a,b]$, która nie posiada punktu stałego. Udowodnić, że:

a) jeśli $f\colon [a,b] \to [a,b]$ jest funkcją uregulowaną taką, że zbiór $[\inf f(I), \sup f(I)] \setminus f(I)$ jest przeliczalny dla każdego przedziału niepustego $I \subset [a,b]$, to albo f posiada punkt stały, albo istnieje punkt $\xi \in [a,b]$ taki, że:

$$\xi = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\xi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi^-} f(x), & \text{gdy } \xi \in (a,b),\\ \lim\limits_{x\to\xi^+} f(x), & \text{gdy } \xi = a,\\ \lim\limits_{x\to\xi^-} f(x), & \text{gdy } \xi = b. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Najpierw zauważmy, że dla każdego $\xi \in (a,b)$ mamy $\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)$. Ponadto istnieją skończone granice jednostronne $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. Wprowadźmy pomocniczą funkcję $g\colon [a,b] \to [a,b]$ przyjmując:

$$g(\xi) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\xi^+} f(x) & \text{dla } \xi \in [a,b),\\ \lim\limits_{x\to\xi^-} f(x) & \text{dla } \xi = b. \end{cases}$$

Oczywiście g jest funkcją ciągłą, czyli posiada punkt stały, a to implikuje tezę zadania.

b) jeśli $f\colon [a,b] \to [a,b]$ jest funkcją uregulowaną posiadającą własność Darboux, to f posiada punkt stały. Natomiast jeśli $f\colon [a,b] \to [a,b]$ posiada własność Darboux oraz istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że f^n jest funkcją uregulowaną, to f^n posiada punkt stały.
Wskazówka. Funkcja uregulowana może posiadać jedynie punkty nieciągłości I rodzaju. Zauważmy, że jeżeli funkcja uregulowana posiada punkt nieciągłości, to nie może posiadać własności Darboux. W uogólnieniu należy skorzystać z faktu, że każda iteracja funkcji mającej własność Darboux również ma własność Darboux.

c) (projekt, dobrą bazą merytoryczną tego projektu może być praca [1]) zachodzą następujące twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Jeśli ciąg funkcji uregulowanych $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jest zbieżny jednostajnie w $[a,b]$ do funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, to funkcja f również jest funkcją uregulowaną.*

Twierdzenie 3 (charakteryzacja funkcji uregulowanych). *Funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest uregulowana wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg funkcji schodkowych $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, który jest zbieżny jednostajnie do f w przedziale $[a,b]$.*

Uwaga 6. Warunek z punktu a) powyższego zadania: *„zbiór $[\inf f(I), \sup f(I)] \setminus f(I)$ jest przeliczalny dla każdego przedziału niepustego $I \subset [a,b]$"* ma charakter lokalny, właściwy dla funkcji uregulowanej, i nie może być zastąpiony przez następujący warunek globalny: *„zbiór $[a,b] \setminus f([a,b])$ jest przeliczalny"*, o czym świadczy następujący przykład:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in [0,1), \\ x-1 & \text{dla } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Zadanie 12. Niech $a \in (1,\infty)$. Zdefiniujmy funkcję $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ wzorem:

$$f(x) = a^x.$$

Uzasadnić, że ciąg $\{f^n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in (1, \sqrt[e]{e}]$. Wtedy też:

$$\lim_{n\to\infty} f^n(a) = b,$$

gdzie $b \in (1,e]$ jest takie, że $\sqrt[b]{b} = a$.
Rozwiązanie. Zdefiniujmy funkcję $\xi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ następująco:

$$\xi(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}.$$

Znajdując jej pochodną:

$$\xi'(x) = x^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x}\ln x\right]' = x^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1-\ln x}{x^2}\right],$$

widzimy, że funkcja ξ jest rosnąca w przedziale $(0,e)$, jest malejąca w przedziale (e,∞) oraz osiąga maksimum globalne w punkcie e o wartości $\xi(e) = \sqrt[e]{e}$. Jeśli założymy, że dla $a \in (1,\infty)$ ciąg $\{f^n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do pewnej liczby $g \in [1,\infty)$, to z ciągłości funkcji f wynika równość $f(g) = g$, czyli:

$$\xi(g) = \sqrt[g]{g} = a, \tag{1}$$

co z własności funkcji ξ daje nam, że $a \notin (\sqrt[e]{e}, \infty)$. Niech więc teraz $a \in (1, \sqrt[e]{e}]$. Z własności Darboux funkcji $\xi|_{[1,e]}$ wynika istnienie punktu $b \in (1,e]$ takiego, że:

$$\xi(b) = \sqrt[b]{b} = a. \tag{2}$$

Zauważmy, że b jest punktem stałym wszystkich iteracji funkcji f. Ponadto funkcja f jest rosnąca, co powoduje, że również każda z iteracji funkcji f jest rosnąca. W takim razie dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$b = f^{n+1}(b) > f^{n+1}(a) = f^n\big(f(a)\big) > f^n(a),$$

ponieważ $b > \sqrt[b]{b} = a$ oraz $f(a) = a^a > a$. Stąd ciąg $\{f^n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ jako ciąg rosnący i ograniczony jest zbieżny oraz musi być spełnione $g \leqslant b$, skąd $g \in [1, e]$. Jednak z równości (1) i (2) mamy:

$$\xi(g) = \xi(b),$$

co na mocy różnowartościowości funkcji $\xi|_{[1,e]}$ prowadzi do równości $g = b$.

Uwaga 7. Rozstrzygnięcie problemu zbieżności ciągu $\{f^n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ w przypadku, gdy $a \in (0, 1)$, można znaleźć w pracy [8].

Zadanie 13. (M. Edelstein) Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną zwartą. Niech $f\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem kontrakcyjnym (zob. definicja 2). Udowodnić, że odwzorowanie f posiada dokładnie jeden punkt stały.
Rozwiązanie. Zdefiniujmy funkcję $F(x) = \varrho(x, f(x))$, $x \in X$. Łatwo sprawdzamy, że F jest funkcją ciągłą. Istotnie, niech $x, y \in X$, $x \neq y$, oraz $F(x) \leqslant F(y)$. Wówczas:

$$\begin{aligned}0 \leqslant F(y) - F(x) &= \varrho\big(y, f(y)\big) - \varrho\big(x, f(x)\big) \leqslant \varrho(y, x) + \varrho\big(x, f(x)\big) + \varrho\big(f(x), f(y)\big) - \varrho\big(x, f(x)\big) = \\ &= \varrho(y, x) + \varrho\big(f(x), f(y)\big) < 2\varrho(x, y),\end{aligned}$$

co implikuje ciągłość funkcji F. W konsekwencji funkcja F osiąga na X swoje kresy (stosujemy twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów). W szczególności istnieje $x_0 \in X$ takie, że:

$$F(x_0) = \inf_{x \in X} F(x).$$

Gdyby $F(x_0) > 0$, to $x_0 \neq f(x_0)$, a wówczas:

$$F\big(f(x_0)\big) = \varrho\big(f(x_0), f^2(x_0)\big) < \varrho\big(x_0, f(x_0)\big) = F(x_0)$$

i mamy sprzeczność z definicją x_0. Zatem $x_0 = f(x_0)$. Jednoznaczność punktu stałego wynika z założonej nierówności:

$$\varrho\big(f(x), f(y)\big) < \varrho(x, y) \qquad \text{dla } x, y \in X \text{ o ile } x \neq y.$$

Uwaga 8. Kolejne zadanie nawiązuje istotnie do zadania 13.

Zadanie 14.

a) Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną zwartą. Udowodnić, że jeśli $f\colon X \to X$ jest odwzorowaniem o własności:

$$\varrho\big(f(x), f(y)\big) \geqslant \varrho(x, y) \qquad \text{dla dowolnych } x, y \in X,$$

to f jest izometrią. W szczególności jeśli f posiada punkt stały $x_0 \in X$, to przestrzeń (X, ϱ) „przypomina” kulę $\overline{K}(x_0, r)$, gdzie $r := \max\{\varrho(x_0, x)\colon x \in X\}$, złożoną ze sfer postaci:

$$S_\varepsilon := \{z \in X\colon \varrho(x_0, z) = \varepsilon\}$$

dla każdego $\varepsilon \in [0, r]$, gdzie $S_0 := \{x_0\}$, spełniających warunek $f(S_\varepsilon) = S_\varepsilon$ dla każdego $\varepsilon \in [0, r]$.
Rozwiązanie. Weźmy dowolne $x, y \in X$, $x \neq y$. Ze zwartości przestrzeni X istnieje rosnący ciąg

liczb naturalnych $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ taki, że ciągi $\{f^{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ oraz $\{f^{k_n}(y)\}_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne. Stąd, na podstawie warunku Cauchy'ego, wnioskujemy, że:

$$\lim_{n\to\infty} \varrho\big(f^{k_n}(x), f^{k_{n+1}}(x)\big) = 0.$$

Jednakże, na podstawie nierówności z założeń zadania, mamy:

$$0 \leqslant \varrho\big(x, f^{k_{n+1}-k_n}(x)\big) \leqslant \varrho\big(f^{k_n}(x), f^{k_{n+1}}(x)\big),$$

co po przejściu do granicy implikuje:

$$\lim_{n\to\infty} \varrho\big(x, f^{k_{n+1}-k_n}(x)\big) = 0. \tag{3}$$

Analogicznie pokazujemy, że:

$$\lim_{n\to\infty} \varrho\big(y, f^{k_{n+1}-k_n}(y)\big) = 0. \tag{4}$$

Następnie, korzystając ponownie z założeń zadania i nierówności trójkąta, dostajemy:

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \varrho\big(f(x), f(y)\big) - \varrho(x,y) \leqslant \varrho\big(f^{k_{n+1}-k_n}(x), f^{k_{n+1}-k_n}(y)\big) - \varrho(x,y) \leqslant \\ &\leqslant \varrho\big(x, f^{k_{n+1}-k_n}(x)\big) + \varrho(x,y) + \varrho\big(y, f^{k_{n+1}-k_n}(y)\big) - \varrho(x,y) = \\ &= \varrho\big(x, f^{k_{n+1}-k_n}(x)\big) + \varrho\big(y, f^{k_{n+1}-k_n}(y)\big).\end{aligned}$$

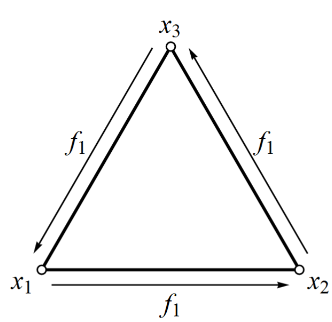
Stąd, po przejściu granicznym i skorzystaniu z równości (3) i (4), otrzymujemy:

$$\varrho\big(f(x), f(y)\big) = \varrho(x,y),$$

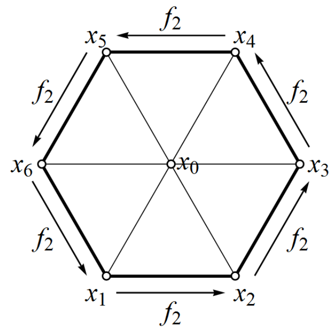
co należało pokazać.

b) Podać przykład przestrzeni metrycznej (X, ϱ) oraz izometrii $f\colon X \to X$ odpowiednio posiadającej punkt stały i nie posiadającej punktu stałego.
Przykłady.

- $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$; x_1, x_2, x_3 są wierzchołkami trójkąta równobocznego na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$;



- $X_2 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$; $f_2(x_0) = x_0$; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 są wierzchołkami sześciokąta foremnego na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$;



- $X_3 = K(0,r) \subset \mathbb{C}$, gdzie $r > 0$; $f_3(z) = e^{i\varphi}z$, $z \in K(0,r)$; f_3 jest obrotem koła $K(0,r)$ na płaszczyźnie Gaussa wokół punktu 0 o kąt φ.

Zadanie 15. (projekt – twierdzenie Abiana, zob. [11]) Udowodnić, że jeśli X jest zbiorem skończonym oraz $f\colon X \to X$, to f posiada punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje rozkład zbioru X na trzy podzbiory X_k, $k = 1,2,3$, takie że:

$$X_k \cap f(X_k) = \emptyset$$

dla każdego $k = 1,2,3$. Przypomnijmy, że rozkład danego zbioru różni się od podziału tego zbioru tym, że dopuszczamy, by składowe rozkładu były zbiorami pustymi.

Przykład. Niech $f\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Oczywiście f nie ma punktu stałego, a przyjmując $X_1 = \{0\}$, $X_2 = \{1\}$, $X_3 = \emptyset$ stwierdzamy, że zbiory X_1, X_2, X_3 stanowią rozkład zbioru $\{0,1\}$ taki, że:

$$X_k \cap f(X_k) = \emptyset$$

dla każdego $k = 1,2,3$.

Uwaga 9. Jak udowodnili polscy matematycy Mąkowski i Wiśniewski w pracy [11], twierdzenie Abiana zachodzi dla dowolnego zbioru X (innymi słowy założenie o skończoności zbioru X jest w tym twierdzeniu zbyteczne). Zilustrujemy działanie tego uogólnienia twierdzenia Abiana na przykładzie funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Przyjmijmy:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_k = x_{k-1}^2 + 1, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście mamy:

$$f\big([x_{k-1}, x_k)\big) = [x_k, x_{k+1})$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Niech:

$$E_1 = (-\infty, 0), \qquad E_2 = \bigcup_{k=0}^{\infty} [x_{2k}, x_{2k+1}) \qquad \text{oraz} \qquad E_3 = \bigcup_{k=1}^{\infty} [x_{2k-1}, x_{2k}).$$

Wówczas dostajemy równości:

$$f(E_1) = (0,\infty), \qquad f(E_2) = E_3, \qquad f(E_3) = E_2 \setminus [x_0, x_1),$$

przy czym zbiory E_1, E_2, E_3 tworzą podział $\mathbb{R}$. Ponieważ $f(E_k) \cap E_k = \emptyset$ dla każdego $k = 1,2,3$, więc f na mocy uogólnionego twierdzenia Abiana nie posiada punktu stałego, co swoją drogą trywialnie weryfikujemy wprost (wykresy funkcji f oraz funkcji $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ są rozłączne).

Uzupełnienie. Dany jest zbiór X oraz ciąg $\{X_k\}_{k=1}^{k<K}$ podzbiorów X. Udowodnij, że jeśli $K \geqslant 4$ lub ciąg ten jest przeliczalny nieskończony, czyli $K = \omega$, oraz tworzy on rozbicie X, to żadna funkcja $f\colon X \to X$, dla której $f(X_k) = X_{k+1}$ dla $k \in \mathbb{N}$, $k+1 < K$, a ponadto $f(X_{K-1}) = X_1$ gdy $K < \omega$, nie posiada punktu stałego.

Zadanie 16. Niech $\alpha > 0$, $\delta \geqslant 0$, $k, l \in \mathbb{N}$ oraz $l > k \geqslant 2$. Przyjmijmy:

$$f(x) := x - \alpha x^k + \delta x^l + x^l \varepsilon(x),$$

gdzie $\varepsilon(x)$ jest funkcją ciągłą w pewnym przedziale postaci $[0, \xi)$ oraz $\varepsilon(0) = 0$. Dodatkowo, gdy $\delta = 0$, przyjmijmy, że $\varepsilon(x) \geqslant 0$ dla $x \in [0, \xi)$. Ustalmy $x_0 \in (0, \xi)$ tak, by spełnione były warunki:

a) $0 < f(x) < x$ dla $x \in (0, x_0)$,

b) f jest funkcją rosnącą w przedziale $[0, x_0)$.

Udowodnić, że dla każdego $x \in (0, x_0)$, ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ określony następująco:

$$a_1 = x, \qquad a_{n+1} = f(a_n), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

jest zbieżny do zera, przy czym:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sqrt[k-1]{n} = \sqrt[1-k]{\alpha(k-1)}.$$

„Prawdziwy urok” tego warunku polega na niezależności tej relacji asymptotycznej od przyjętego warunku początkowego $x \in (0, x_0)$. W szczególności dla $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, dostajemy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, \underbrace{\sin\big(\sin(\ldots \sin x)\big)}_{n\text{-krotnie}} = \sqrt{3}.$$

Zadanie 17.

a) Udowodnić, że określona następująco funkcja:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left|x^2 - \frac{1}{9}\right| - \frac{1}{2}\left|x^2 - \frac{1}{16}\right|, \qquad x \in \mathbb{R},$$

jest kontrakcją.

Rozwiązanie. Funkcję f możemy przedstawić w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right), & |x| < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) - x^2, & \frac{1}{4} \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right), & \frac{1}{3} < |x|. \end{cases}$$

W takim razie prawdziwe są następujące oszacowania dowodzące tezy:

i) $|f(x) - f(y)| = \left|y^2 - x^2\right| = |-(x-y)(x+y)| \leqslant \frac{2}{3}|x-y|$, gdy $\frac{1}{4} \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{3}$ oraz $\frac{1}{4} \leqslant |y| \leqslant \frac{1}{3}$,

ii) $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) + y^2\right| = \left|y^2 - \frac{1}{16}\right| = \left|\left(y - \frac{1}{4}\right)\left(y + \frac{1}{4}\right)\right| \leqslant$
$\leqslant \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right| |x-y| \leqslant \frac{7}{12}|x-y|$, gdy $\frac{1}{4} \leqslant |y| \leqslant \frac{1}{3}$ oraz $|x| < \frac{1}{4}$,

iii) $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right| = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \leqslant \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)|x-y| = \frac{7}{12}|x-y|$, gdy $|x| < \frac{1}{4}$ oraz $\frac{1}{3} < |y|$,

iv) $|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right) - x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)\right| = \left|\frac{1}{9}-x^2\right| = \left|\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{1}{3}+x\right)\right| \leqslant \frac{2}{3}|x-y|$, gdy $\frac{1}{4} \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{3}$ oraz $\frac{1}{3} < |y|$.

b) Niech $0 < a < b$, $2b < 1$. Udowodnić, że określona następująco funkcja:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left|x^2 - b^2\right| - \frac{1}{2}\left|x^2 - a^2\right|, \qquad x \in \mathbb{R},$$

jest kontrakcją. Pokazać, że w istocie zachodzi nierówność $|f(x)-f(y)| \leqslant 2b|x-y|$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 18. Niech $\alpha > 0$, $2\alpha < 1$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. Udowodnić, że określona następująco funkcja:

$$g(x) = \alpha\left(|x-a| - |x-b|\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

jest kontrakcją.
Rozwiązanie. Funkcję g możemy przedstawić następująco:

$$g(x) = \begin{cases} \alpha(a-b), & \text{dla } x < a, \\ \alpha(b-a), & \text{dla } x > b, \\ \alpha(2x-a-b), & \text{dla } a \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Mamy następujące oszacowania:

a) $g(x) - g(y) = 2\alpha(b-y) \leqslant 2\alpha(x-y)$, gdy $x > b$ oraz $a \leqslant y \leqslant b$,

b) $g(x) - g(y) = 2\alpha(b-a)$, gdy $x > b$ oraz $y < a$,

c) $g(x) - g(y) = 2\alpha(a-y) \leqslant 2\alpha(x-y)$, gdy $y < a$ oraz $a \leqslant x \leqslant b$,

d) $g(x) - g(y) = 2\alpha(x-y)$, gdy $a \leqslant x \leqslant b$ oraz $a \leqslant y \leqslant b$.

Podsumowując, zachodzi:

$$|g(x)-g(y)| \leqslant 2\alpha|x-y|, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

czyli odwzorowanie g jest kontrakcją.

Zadanie 19. Pokazać, że operator T zdefiniowany następująco:

$$T(x) = e - (1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{dla } x \geqslant \sqrt{e} - 1$$

jest kontrakcją ze stałą zwężającą $k = 0{,}7$.
Rozwiązanie. Niech $x, y \geqslant \sqrt{e}-1$, $y > x$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dostajemy następujące oszacowanie:

$$|T(x) - T(y)| \leqslant |x-y| \sup_{t \geqslant \sqrt{e}-1} |T'(t)|,$$

przy czym:

$$T'(x) = -\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' = -(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)' = -(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right)$$

oraz:

$$T''(x) = -(1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2\big(-1-3x+2(1+x)\ln(1+x)\big)+(1+x)^2\ln^2(1+x)}{x^4(1+x)^2} \right).$$

O znaku $T''(x)$ decyduje licznik odpowiedniego ułamka. Rozbijemy go na sumę dwóch funkcji:

$$h(x) := (1+x)^2\ln^2(1+x) - x^2$$

oraz:

$$g(x) := x^2\big(2(1+x)\ln(1+x) - 3x\big).$$

Oczywiście o znaku tych funkcji dla $x > 0$ decydują funkcje pomocnicze:

$$h_1(x) := (1+x)\ln(1+x) - x$$

oraz:

$$g_1(x) := 2(1+x)\ln(1+x) - 3x.$$

Ponieważ $h_1'(x) = \ln(1+x)$ i $h_1'(0) = 0$, więc $h_1'(x) > 0$ dla $x > 0$. Z kolei:

$$g_1'(x) = 2\ln(1+x) - 1 = 2\big(\ln(1+x) - \ln\sqrt{e}\big),$$

skąd $g_1'(x) > 0$ dla $x > \sqrt{e} - 1 \simeq 0{,}6487$. Natomiast

$$g_1(\sqrt{e}-1) = \sqrt{e} - 3(\sqrt{e}-1) = 3 - 2\sqrt{e} \simeq -0{,}2974,$$

ale już:

$$g_1(1{,}4) = 4{,}8\cdot\ln 2{,}4 - 4{,}2 \simeq 0{,}002249 > 0.$$

Tym samym $T'(x)$ jest funkcją malejącą na półosi $\big[\frac{14}{10}, +\infty\big)$ przy czym:

$$\lim_{x\to+\infty} T'(x) = 0$$

oraz:

$$T'(1{,}4) \leqslant (2{,}4)^{\frac{1}{1,4}} \left(\frac{2{,}4\cdot\ln 2{,}4 - 1,4}{(1{,}4)^2\cdot 2{,}4} \right) \simeq 0{,}2785 < 0{,}3.$$

Zatem:

$$|T(x) - T(y)| \leqslant 0{,}3|x-y|, \qquad x, y \geqslant 1{,}4,$$

czyli operator T jest kontrakcją ze stałą zwężającą $k = 0{,}3$. Zauważmy jeszcze, że funkcja:

$$h(x) = h_1(x)\big((1+x)\ln(1+x) + x\big)$$

jako iloczyn funkcji rosnących, dodatnich na półosi $(0, +\infty)$, jest funkcją rosnącą na tej półosi. Z kolei:

$$g(x) = x^2 g_1(x)$$

jest funkcją rosnącą na półosi $[\sqrt{e}-1,+\infty)$. Zatem dla $x \in \left[\sqrt{e}-1, \frac{14}{10}\right]$, mamy oszacowanie:

$$\begin{aligned}h(x)+g(x) \geqslant h(\sqrt{e}-1)+g(\sqrt{e}-1) &= \\ &= \frac{e}{4}-(\sqrt{e}-1)^2+(\sqrt{e}-1)^2\big(\sqrt{e}-3(\sqrt{e}-1)\big) = \\ &= \frac{e}{4}-2(\sqrt{e}-1)^3 \simeq 0{,}1335.\end{aligned}$$

Stąd $T'(x)$ jest funkcją malejącą na półosi $[\sqrt{e}-1,+\infty)$, przy czym:

$$T'(\sqrt{e}-1) \leqslant (\sqrt{e})^{\frac{1}{\sqrt{e}-1}}\left(\frac{\sqrt{e}\ln\sqrt{e}-\sqrt{e}+1}{(\sqrt{e}-1)^2\sqrt{e}}\right) \leqslant (1{,}7)^{\frac{1}{0{,}6}}\left(\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{e}+1}{(\sqrt{e}-1)^2\sqrt{e}}\right) \simeq 0{,}6129 < 0{,}7.$$

Zatem operator T jest kontrakcją na półosi $[\sqrt{e}-1,+\infty)$.

Hipoteza.

Operator $T\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ zdefiniowany następująco:

$$T(x) = \begin{cases} e-(1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{dla } x \in (-1,0)\cup(0,\infty),\\ 0, & \text{dla } x = 0,\end{cases}$$

jest kontrakcją.

Zadanie 20. Niech $\varphi \in [0,2\pi)$ i rozważmy odwzorowanie f przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową ϱ w siebie dane wzorem:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1,x_2) \overset{f}{\mapsto} (x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi, x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi).$$

Udowodnić, że f posiada punkt stały, ale nie jest kontrakcją.
Wskazówka. Punktem stałym odwzorowania f jest punkt $(0,0)$ i jest to jedyny punkt stały odwzorowania f albowiem:

$$f(x_1,x_2) = (x_1,x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(\cos\varphi-1) - x_2\sin\varphi = 0,\\ x_1\sin\varphi + x_2(\cos\varphi-1) = 0,\end{cases}$$

a wyznacznik macierzy tego układu jest równy:

$$(\cos\varphi-1)^2+\sin^2\varphi = 2(1-\cos\varphi).$$

Ponadto mamy:

$$\begin{aligned}\Big(\varrho\big(f(x_1,x_2), f(x_1^*,x_2^*)\big)\Big)^2 &= \big((x_1-x_1^*)\cos\varphi-(x_2-x_2^*)\sin\varphi\big)^2+\big((x_1-x_1^*)\sin\varphi+(x_2-x_2^*)\cos\varphi\big)^2 = \\ &= \Big(\varrho\big((x_1,x_2),(x_1^*,x_2^*)\big)\Big)^2,\end{aligned}$$

co oznacza, że f nie jest kontrakcją. Wskazane własności odwzorowania f są od strony geometrycznej oczywiste, ponieważ f jest w istocie obrotem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ o kąt φ.

Zadanie 21. Udowodnić, że funkcja:

$$f(x) = \frac{1}{4+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

jest kontrakcją. Uzasadnić, że f posiada dokładnie jeden punkt stały.
Rozwiązanie. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $y > x$. Mamy następujące oszacowanie:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{4+x^2} - \frac{1}{4+y^2}\right| = \left|\frac{x^2-y^2}{(4+x^2)(4+y^2)}\right| = \frac{|x+y|}{(4+x^2)(4+y^2)}|x-y|.$$

Korzystając z tego, że $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, przyjmujemy $a = 4$ i $b = x^2$. Otrzymujemy nierówność:

$$|x| = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2} \leqslant \frac{4+x^2}{4}.$$

Zatem:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \frac{4+x^2+4+y^2}{4} \leqslant 2 + \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2y^2}{8} = \frac{1}{8}(4+x^2)(4+y^2),$$

czyli:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{8}|x-y|. \tag{5}$$

Równanie $\frac{1}{4+x^2} = x$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x \in \mathbb{R}$, albowiem wielomian $w(x) = x^3 + 4x - 1$ posiada dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty (pochodna $w(x)$ jest dodatnia na $\mathbb{R}$, czyli wielomian $w(x)$ jest funkcją rosnącą na $\mathbb{R}$, przy tym $w(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$).

Zadanie 22. Posługując się twierdzeniem Banacha, udowodnić, że równanie:

$$x^n - (n+1)(1-x) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,$$

ma w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$ dokładnie jeden pierwiastek.
Rozwiązanie. Wykonujemy następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned} x^n - (n+1)(1-x) &= 0, \\ x^n + (n+1)x &= n+1, \\ x &= \frac{n+1}{x^{n-1}+n+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Przyjmijmy $f(x) = \frac{n+1}{x^{n-1}+n+1}$ dla $x \in [0,1]$. Udowodnimy, że f posiada punkt stały należący do przedziału $[0,1]$. Oczywiście $f([0,1]) \subset [0,1]$. Niech $x, y \in [0,1]$, $y > x$. Na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej możemy zapisać następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{(n+1)(y^{n-1} - x^{n-1})}{(x^{n-1}+n+1)(y^{n-1}+n+1)}\right| \leqslant \left|\frac{(n+1)(y^{n-1} - x^{n-1})}{(n+1)(n+1)}\right| = \\ &= \left|\frac{y^{n-1} - x^{n-1}}{n+1}\right| = \left|\frac{(n-1)\xi^{n-2}}{n+1}|y-x|\right| \leqslant \frac{(n-1)k}{n+1}|y-x| \leqslant \frac{(n-1)}{n+1}|y-x|, \end{aligned}$$

gdzie $k = \max\{y^{n-2}, x^{n-2}\}$, natomiast $\xi \in (\min\{x,y\}, \max\{x,y\})$. Stąd, na mocy twierdzenia Banacha, stwierdzamy, że f posiada dokładnie jeden punkt stały w przedziale $[0,1]$, co oznacza istnienie rozwiązania równania (6) tak jak oczekiwano.

Uwaga 10. Zaprezentowanie rozwiązanie obejmuje też funkcję z zadania 21, ściślej funkcję $4f(x) = \frac{4}{x^2+4}$. Natomiast z nierówności (5) wynika, że dla każdego $a \in (0,8)$ na podstawie twierdzenia Banacha funkcja $af(x) = \frac{a}{x^2+4}$ posiada dokładnie jeden punkt stały na $\mathbb{R}$.

Zadanie 23. Niech $a = 0{,}45$, $b = 0{,}55$. Posługując się twierdzeniem Banacha wykazać, że funkcja $f\colon [a,b] \to [a,b]$ określona wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right),$$

posiada punkt stały.

Rozwiązanie. Niech $y > x$. Przypomnijmy, że $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $x + y \leqslant 2b$ dla $x, y \in [a,b]$, stąd mamy następujące oszacowanie:

$$\left|\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}\right| = \left|-\sin\frac{x+y}{4}\sin\frac{x-y}{4}\right| \leqslant \left|\frac{x+y}{4}\right|\left|\frac{x-y}{4}\right| \leqslant \frac{b}{8}|x-y|$$

oraz:

$$\left|\left|x - \frac{1}{2}\right| - \left|y - \frac{1}{2}\right|\right| \leqslant \left|\left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{1}{2}\right)\right| = |x-y|.$$

Zatem prawdziwa jest nierówność:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|,$$

gdzie:

$$k = \frac{b}{8} + \frac{1}{2} = 0{,}57.$$

Stąd w szczególności otrzymujemy inkluzję:

$$f([a,b]) \subset [f(0{,}5) - 0{,}05k; f(0{,}5) + 0{,}05k] \subset [0{,}455; 0{,}513] \subset [a,b],$$

co na mocy twierdzenia Banacha gwarantuje, że f posiada w przedziale $[a,b]$ dokładnie jeden punkt stały.

Zadanie 24. W oparciu o twierdzenie Banacha, udowodnić, że następujące równania posiadają dokładnie jedno rozwiązanie w podanym przedziale:

a) $\cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2}, \quad x \in [-1,1]$,

b) $\cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}, \quad x \in [-2,2]$,

c) $e^x + \cos x = 2x + 2, \quad x \in [-1,1]$,

d) $\sin x = 2x - \frac{x^3}{3!}, \quad x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$,

e) $\sin x = 2x - \frac{3}{8}x^2, \quad x \in [-1,1]$,

f) $\sin x = 2x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$,

g) $\cos(3x) + \cos(2x) = 11x + \cos(5x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{10}\right]$.

Rozwiązanie. Przedstawione zostaną rozwiązania tylko wybranych przykładów. Pozostałe równania można rozwiązać w analogiczny sposób.

b) Rozważmy funkcję:

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} = -\frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots .$$

Niech $x, y \in [-2, 2]$. Po zastosowaniu nierówności trójkąta dla szeregów dostajemy:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{6!}|x^6 - y^6| + \frac{1}{8!}|x^8 - y^8| + \frac{1}{10!}|x^{10} - y^{10}| + \frac{1}{12!}|x^{12} - y^{12}| + \dots ,$$

skąd po wykorzystaniu twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej otrzymujemy:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \left(\frac{1}{5!}a^5 + \frac{1}{7!}a^7 + \frac{1}{9!}a^9 + \dots\right)|x-y| = \frac{a^5}{5!}\left(1 + \frac{a^2}{6\cdot 7} + \frac{a^4}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} + \dots\right)|x-y| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a^5}{5!}\left(1 + \frac{a^2}{42} + \left(\frac{a^2}{42}\right)^2 + \dots\right)|x-y| = \frac{a^5}{5!}\cdot\frac{|x-y|}{1-\frac{a^2}{42}} \leqslant \frac{2^5}{5!}\cdot\frac{|x-y|}{1-\frac{2}{21}} = \frac{84}{285}|x-y|,$$

gdzie $a = \max\{|x|, |y|\}$. Pokażemy jeszcze, że zachodzi inkluzja $f([-2,2]) \subset [-2,2]$. Istotnie, niech $x \in [-2, 2]$. Wówczas:

$$|f(x)| \leqslant \frac{|x|^6}{6!} + \frac{|x|^8}{8!} + \frac{|x|^{10}}{10!} + \dots \leqslant \frac{|x|^6}{6!}\left(1 + \frac{|x|^2}{56} + \left(\frac{|x|^2}{56}\right)^2 + \dots\right) =$$
$$= \frac{|x|^6}{6!}\cdot\frac{1}{1-\frac{|x|^2}{56}} \leqslant \frac{2^6}{6!}\cdot\frac{1}{1-\frac{2^2}{56}} = \frac{56}{585} < 2$$

Na mocy twierdzenia Banacha funkcja f posiada dokładnie jeden punkt stały w przedziale $[-2, 2]$.

d) Rozważmy funkcję:

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots .$$

Niech $x, y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Podobnie jak w podpunkcie b) znajdujemy oszacowanie:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{5!}|x^5 - y^5| + \frac{1}{7!}|x^7 - y^7| + \frac{1}{9!}|x^9 - y^9| + \dots ,$$

skąd, na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, mamy:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \left(\frac{1}{4!}a^4 + \frac{1}{6!}a^6 + \frac{1}{8!}a^8 + \dots\right)|x-y| = \frac{a^4}{4!}\left(1 + \frac{a^2}{5\cdot 6} + \frac{a^4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \dots\right)|x-y| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a^4}{4!}\left(1 + \frac{a^2}{30} + \left(\frac{a^2}{30}\right)^2 + \dots\right)|x-y| = \frac{a^4}{4!}\cdot\frac{|x-y|}{1-\frac{a^2}{30}} \leqslant \frac{9}{4!}\cdot\frac{|x-y|}{1-\frac{3}{30}} = \frac{5}{12}|x-y|,$$

gdzie $a = \max\{|x|, |y|\}$. Pokażemy jeszcze, że $f([-\sqrt{3}, \sqrt{3}]) \subset [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Otóż dla $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ mamy oszacowanie:

$$|f(x)| \leqslant \frac{|x|^5}{5!} + \frac{|x|^7}{7!} + \frac{|x|^9}{9!} + \dots \leqslant \frac{|x|^5}{5!}\left(1 + \frac{|x|^2}{6\cdot 7} + \frac{|x|^4}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} + \dots\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|x|^5}{5!}\left(1 + \frac{|x|^2}{42} + \left(\frac{|x|^2}{42}\right)^2 + \dots\right) = \frac{|x|^5}{5!}\cdot\frac{1}{1-\frac{|x|^2}{42}} \leqslant \frac{(\sqrt{3})^5}{5!}\cdot\frac{1}{1-\frac{(\sqrt{3})^2}{42}} = \frac{21\sqrt{3}}{260} < \sqrt{3}.$$

Na mocy twierdzenia Banacha funkcja f posiada dokładnie jeden punkt stały należący do przedziału $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

g) Rozważmy funkcję:

$$f(x) = \frac{1}{11}\big(\cos(3x) + \cos(2x) - \cos(5x)\big).$$

Wówczas, po zastosowaniu nierówności trójkąta i twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, dostajemy:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leqslant \frac{1}{11}\big(|\cos(3x) - \cos(3y)| + |\cos(2x) - \cos(2y)| + |\cos(5x) - \cos(5y)|\big) = \\ &= \frac{1}{11}|x-y|\big(3|\sin(3\xi_1)| + 2|\sin(2\xi_2)| + 5|\sin(5\xi_3)|\big) \leqslant \frac{10}{11}|x-y|,\end{aligned}$$

gdzie $\xi_k \in (\min\{x,y\}, \max\{x,y\})$ dla każdego $k = 1,2,3$. Zauważmy jeszcze, że dla $x \in \left[0, \frac{\pi}{10}\right]$ zachodzą nierówności:

$$\begin{aligned}\cos 2x &\geqslant 0,\\ \cos 3x - \cos 5x &\geqslant 0,\end{aligned}$$

skąd wynika, że $f(x) > 0$. Ponadto mamy oszacowanie:

$$f(x) \leqslant \frac{1}{11}(1+1) = \frac{2}{11} \leqslant \frac{\pi}{10}.$$

Tym samym wykazaliśmy, że:

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{10}\right]\right) \subset \left[0, \frac{\pi}{10}\right].$$

Podsumowując, z twierdzenia Banacha wynika, że funkcja f posiada dokładnie jeden punkt stały w przedziale $\left[0, \frac{\pi}{10}\right]$.

Zadanie 25. Posługując się twierdzeniem Banacha, udowodnić, że równanie:

$$\frac{1}{5}x^4 + \frac{13}{12}x + a = 0$$

dla parametru $a \in \left[-\frac{13}{12}, \frac{53}{60}\right]$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $[-1,1]$.
Rozwiązanie. Wykonujemy następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}x^4 + \frac{13}{12}x + a &= 0,\\ \frac{13}{12}x &= -a - \frac{1}{5}x^4,\\ x &= -\frac{12}{13}a - \frac{12}{5\cdot 13}x^4.\end{aligned}$$

Niech $f(x) = -\frac{12}{13}a - \frac{12}{5\cdot 13}x^4$. Pokażemy, że dla parametru $a \in \left[-\frac{13}{12}, \frac{53}{60}\right]$ zachodzi inkluzja $f([-1,1]) \subset [-1,1]$. Mamy:

$$f(1) = f(-1) = -\frac{12}{13}a - \frac{12}{5\cdot 13} \geqslant -\frac{12}{13}\cdot\frac{53}{60} - \frac{12}{5\cdot 13} = -1.$$

Z kolei:

$$f(-1) = f(1) = -\frac{12}{13}a - \frac{12}{5\cdot 13} < -\frac{12}{13}a \leqslant \left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\left(-\frac{13}{12}\right) = 1.$$

Ponadto, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, mamy następujące oszacowanie:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| \sup_{t \in [-1,1]} |f'(t)| = \frac{12 \cdot 4}{13 \cdot 5}|x - y|.$$

Zatem, na mocy twierdzenia Banacha, f posiada dokładnie jeden punkt stały w przedziale $[-1, 1]$.

Zadanie 26. Znaleźć punkty stałe funkcji f zdefiniowanej następująco:

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + (x - 2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Rozstrzygnąć w otoczeniu którego z tych punktów stałych, funkcja f jest kontrakcją?
Rozwiązanie. Należy rozwiązać równanie:

$$f(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

czyli:

$$\frac{1 + x^2}{1 + (x - 2)^2} = x.$$

Przekształcamy je następująco:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= x + x(x^2 - 4x + 4), \\ x^3 - 5x^2 + 5x - 1 &= 0, \\ (x - 1)(x^2 + x + 1) - 5x(x - 1) &= 0, \\ (x - 1)(x^2 - 4x + 1) &= 0, \end{aligned}$$

zatem:

$$x = 1 \qquad \text{lub} \qquad x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Otrzymujemy trzy punkty stałe funkcji f:

$$x = 1, \qquad x = 2 + \sqrt{3}, \qquad x = 2 - \sqrt{3}.$$

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej mamy:

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y),$$

przy czym:

$$f'(x) = \frac{4\big(2 - (x - 1)^2\big)}{\big(1 + (x - 2)^2\big)^2}$$

oraz:

$$f'(1) = 2, \qquad f'(2 - \sqrt{3}) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \qquad f'(2 + \sqrt{3}) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Jak widać z powyższego, ze względu na ciągłość f, tylko w otoczeniu punktu stałego $x = 2 - \sqrt{3}$ odwzorowanie f jest kontrakcją (albowiem $0 \leqslant f'(2 - \sqrt{3}) < 1$).

Zadanie 27. Udowodnić, że dla każdego $\alpha \in [0,1]$ funkcja $f_\alpha(x) = \cos^\alpha x$ jest kontrakcją. Uzasadnić, że f_α posiada punkt stały $x_\alpha \in [0,1]$.
Rozwiązanie. W oparciu o twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej otrzymujemy:

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| = |\cos^\alpha x - \cos^\alpha y| \leqslant |-\alpha \sin x^* \cos^{\alpha-1} x^*||x-y|,$$

gdzie $x^* = x^*(x,y) \in [\min\{x,y\}, \max\{x,y\}]$ oraz $x, y \in [0,1]$. Rozważmy funkcję:

$$g(x) = \frac{\sin x}{\cos^{1-\alpha} x}, \qquad x \in [0,1].$$

Znajdujemy:

$$g'(x) = \frac{\cos^{2-\alpha} x + (1-\alpha)\sin^2 x \cos^{-\alpha} x}{\cos^{2(1-\alpha)} x} = \cos^{-\alpha} x \frac{\cos^2 x + (1-\alpha)\sin^2 x}{\cos^{2(1-\alpha)} x},$$

skąd wynika, że $g(x)$ jest funkcją rosnącą na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pojawia się tutaj naturalne pytanie, a mianowicie, czy spełniona jest następująca nierówność:

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha \sin 1 \cos^{\alpha-1} 1 < 1?$$

Mamy:

$$\alpha \sin 1 \cos^{\alpha-1} 1 = \alpha \operatorname{tg} 1 \cos^\alpha 1.$$

Rozważmy więc funkcję:

$$h(\alpha) = \alpha \operatorname{tg} 1 \cos^\alpha 1, \qquad \alpha \in [0,1].$$

Znajdujemy:

$$h'(\alpha) = \operatorname{tg} 1 \cos^\alpha 1 + \alpha \operatorname{tg} 1 \cos^\alpha 1 \ln\cos 1 = \operatorname{tg} 1 \cos^\alpha 1 (1 + \alpha \ln\cos 1),$$

skąd można już łatwo wydedukować, że

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} h(\alpha) = h\left(-\frac{1}{\ln\cos 1}\right) = -\frac{\operatorname{tg} 1}{\ln\cos 1}(\cos 1)^{-\frac{1}{\ln\cos 1}} \leqslant 0{,}94.$$

Funkcja f_α jest więc kontrakcją ze stałą zwężającą równą 0,94 i na mocy twierdzenia Banacha posiada dokładnie jeden punkt stały w przedziale $[0,1]$.

Zadanie 28. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania:

a) $x - \alpha \sin \frac{x}{\alpha+\beta} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, gdzie $\alpha, \beta > 0$.
Rozwiązanie. Niech $f(x) = \alpha \sin \frac{x}{\alpha+\beta}$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz ustalamy $x, y \in \mathbb{R}$, $y > x$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a, dostajemy oszacowanie:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \sup\left\{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cos\frac{t}{\alpha+\beta} : t \in \mathbb{R}\right\} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}|x-y|.$$

Na mocy twierdzenia Banacha f ma dokładnie jeden punkt stały na osi liczbowej. Łatwo sprawdzamy, że jest to $x = 0$.

b) $x - \alpha \cos \frac{x}{\alpha+\beta} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, gdzie $\alpha, \beta > 0$.
Wskazówka. Rozwiązać analogicznie jak podpunkt a).

Zadanie 29. Niech $a > 0$. Posługując się twierdzeniem Banacha pokazać, że funkcja zdefiniowana następująco:

$$f(x) = -\operatorname{arctg}(x+a) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} a, \qquad x \in [0, \infty),$$

posiada jedyny punkt stały.

Rozwiązanie. Niech $x, y \in [0, \infty)$, $y > x$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a, dostajemy:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| \sup_{t \in [0,\infty)} |f'(t)|,$$

przy czym:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+(a+t)^2}.$$

Mamy:

$$f'(0) = 1 - \frac{1}{1+a^2}$$

oraz:

$$f'(t) < \frac{1}{1+t^2} < 1, \qquad t > 0.$$

Z ciągłości f', na mocy twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów, wynika, że:

$$m := \max_{t \in [0,1]} f'(t) < 1.$$

Z kolei dla $t \geqslant 1$ mamy oszacowanie:

$$f'(t) \leqslant \frac{1}{2},$$

czyli:

$$\sup_{t \in [0,\infty)} f'(t) < 1.$$

Odwzorowanie f jest więc kontrakcją oraz $f([0,\infty)) \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Zatem f posiada jedyny punkt stały $x = 0$.

Pokażemy dodatkowo w jaki sposób można otrzymać stałą zwężającą k dla funkcji f (ze względu na zwykłą odległość w przedziale $[0, \infty)$).

Lemat 1. *Zachodzą nierówności ($a, x \geqslant 0$):*

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(x+a)^2} \leqslant \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{8} a, & \\ 1 - \frac{1}{1+3a^2} = \frac{3a^2}{1+3a^2}, & \textit{gdy } a \geqslant 1 \textit{ i } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}, & \textit{gdy } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Dowód. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej otrzymujemy równość:

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} = \frac{-2\xi}{(1+\xi^2)^2}(x-y),$$

dla dowolnych $x, y \geqslant 0$, $x \leqslant y$, gdzie $\xi = \xi(x, y) \in (x, y)$. Rozważmy funkcję:

$$g(x) := \frac{x}{(1+x^2)^2}, \qquad x \geqslant 0.$$

Znajdujemy:

$$g'(x) = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}.$$

Funkcja g przyjmuje maksymalną wartość dla $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$:

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{16},$$

skąd:

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}|x-y|,$$

czyli:

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(x+a)^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}a.$$

Niech teraz $a \geqslant 1$ i $x \leqslant 1$. Wówczas mamy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(x+a)^2} - \left(1 - \frac{1}{1+3a^2}\right) &= \frac{(1+3a^2)\big((a+x)^2 - x^2\big) - 3a^2(1+x^2)(1+(a+x)^2\big)}{(1+x^2)\big(1+(a+x)^2\big)(1+3a^2)} = \\ &= \frac{(a+x)^2 - x^2 - 6a^2x^2 - 3a^2 - 3a^2x^2(a+x)^2}{(1+x^2)\big(1+(a+x)^2\big)(1+3a^2)} = \\ &= \frac{2ax - 2a^2 - 6a^2x^2 - 3a^2x^2(a+x)^2}{(1+x^2)\big(1+(a+x)^2\big)(1+3a^2)}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli $ax \geqslant 1$, to $2ax < 6a^2x^2$, natomiast gdy $ax < 1$, to $2ax < 2$ oraz $2 \leqslant 2a^2$, czyli $2ax < 2a^2$. Innymi słowy, mamy:

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(a+x)^2} < 1 - \frac{1}{1+3a^2}.$$

□

Zadanie 30. Niech $1 \geqslant a_0 \geqslant a_1 \geqslant 2a_2 \geqslant 3a_3 \geqslant \ldots \geqslant na_n > 0$. Udowodnić, że wówczas funkcja:

$$f(x) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i x^i$$

posiada dokładnie jeden punkt stały $x \in (0,1)$.

Rozwiązanie. Podstawą dowodu jest następujący lemat:

Lemat 2. *Niech $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$. Wówczas zachodzi nierówność:*

$$B_n := b_1 - b_2 + b_3 - \ldots + (-1)^{n+1} b_n \leqslant \begin{cases} b_1 - b_n, & \text{gdy } n \in 2\mathbb{N}, \\ b_1 - b_{n-1} + b_n, & \text{gdy } n \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

Dowód. Powyższe oszacowanie otrzymujemy poprzez grupowanie składników w sumie B_n i analizę znaków otrzymanych nowych składników:

$$B_n = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \ldots - \begin{cases} b_n, & \text{gdy } n \in 2\mathbb{N}, \\ (b_{n-1} - b_n), & \text{gdy } n \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

□

Wprost z lematu 2 wynika, że dla $x \in [0,1]$ zachodzi nierówność:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant a_0,$$

co implikuje inkluzję $f([0,1]) \subset [0,1]$. Z kolei, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej i ponownie w oparciu o lematu 2, otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \sup_{\xi \in [0,1]} |f'(\xi)| \leqslant \begin{cases} (a_1 - na_n)|x-y|, & \text{gdy } n \in 2\mathbb{N}, \\ \big(a_1 - (n-1)a_{n-1} + na_n\big)|x-y|, & \text{gdy } n \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

Stąd tezę zadania dostajemy przez wzgląd na twierdzenie Banacha.

Zadanie 31. Wykazać, że funkcja:

$$f(x) = \cos^{\gamma} x \sin x, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

gdzie $\gamma > 0$, posiada jedyny punkt stały.
Rozwiązanie. Niech $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $y > x$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a, mamy następujące oszacowanie:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \sup_{t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f'(t)|,$$

przy czym:

$$f'(x) = -\gamma \cos^{\gamma-1} x \sin^2 x + \cos^{\gamma+1} x = \cos^{\gamma-1} x(\cos^2 x - \gamma \sin^2 x) = \cos^{\gamma-1} x\big(1 - (1+\gamma)\sin^2 x\big).$$

Stąd można wywnioskować, że minimalna i maksymalna wartość funkcji f w przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, odpowiada sytuacji, gdy:

$$\cos x = 0$$

lub:

$$\sin x = \sqrt{\frac{1}{1+\gamma}} \qquad \left(\text{wtedy } \cos x = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\right)$$

i jest równa, odpowiednio, 0 oraz $\sqrt{\frac{\gamma^\gamma}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}} < 1$. Zachodzi inkluzja $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset [0,1]$ oraz nierówność:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \frac{\gamma^\gamma}{(1+\gamma)^{1+\gamma}},$$

czyli f jest kontrakcją i na mocy twierdzenia Banacha posiada w przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dokładnie jeden punkt stały.

Uwaga 11. Rozważmy funkcję:

$$g(\gamma) = \frac{\gamma^\gamma}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}.$$

Mamy:

$$g'(\gamma) = \frac{\gamma^\gamma \ln \frac{\gamma}{1+\gamma}}{(1+\gamma)^{1+\gamma}},$$

skąd wynika, że g jest funkcją malejącą, przy czym:

$$\lim_{\gamma \to 0^+} g(\gamma) = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{\gamma \to \infty} g(\gamma) = 0.$$

Zadanie 32. Niech $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f \in C^1([0,1])$.

a) Udowodnić, że odwzorowanie f jest kontrakcją wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| < 1.$$

Rozwiązanie. Niech $M := \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$. Na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla dowolnych $x, y \in [0,1]$, $x < y$, istnieje $t \in (x,y)$ takie, że:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(t)|(y-x) \leqslant M(y-x).$$

Stąd, jeśli $M < 1$, to f jest kontrakcją. Z kolei, gdy f jest kontrakcją, to istnieje $0 < m < 1$, takie że dla dowolnych $x, y \in [0,1]$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant m|x-y|. \tag{7}$$

Stąd, jeśli $x, y \in [0,1]$, $x < y$, to istnieje $t \in (x,y)$ takie, że:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(t)|(y-x)$$

i wobec (7):

$$|f'(t)| \leqslant m.$$

Zatem wobec ciągłości funkcji f', na mocy twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów, mamy $M \leqslant m < 1$.

b) Udowodnić, że jeśli f jest kontrakcją, to dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje granica:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} f^i(x)}{n},$$

równa jedynemu punktowi stałemu funkcji f.

Rozwiązanie. Ponieważ odwzorowanie f jest kontrakcją, więc posiada dokładnie jeden punkt stały $z \in [0,1]$. Niech $y \in [0,1]$. Mamy:

$$\sum_{i=0}^{n} f^i(y) = \sum_{i=0}^{n} \big(f^i(y) - f^i(z)\big) + \sum_{i=0}^{n} f^i(z) = \sum_{i=0}^{n} \big(f^i(y) - f^i(z)\big) + (n+1)z,$$

ale:

$$|f^i(y) - f^i(z)| = |f'(\xi)||f^{i-1}(y) - f^{i-1}(z)| \leqslant M|f^{i-1}(y) - f^{i-1}(z)|,$$

gdzie ξ leży pomiędzy liczbami $f^{i-1}(y)$ oraz $f^{i-1}(z)$, natomiast:

$$M := \sup_{y\in[0,1]} |f'(y)|.$$

Na podstawie a) mamy $M < 1$. Dla i-tej iteracji zachodzi nierówność:

$$|f^i(y) - f^i(z)| \leqslant M^i|y - z|.$$

Stąd otrzymujemy bezwzględną zbieżność szeregu:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\big(f^i(y) - f^i(z)\big).$$

Zatem:

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{n} f^i(y)}{n} = \left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\big(f^i(y) - f^i(z)\big)}{n} + \frac{n+1}{n}z\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z.$$

c) Udowodnić, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje granica:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} p^i(x)}{n^2},$$

gdzie $p^0(x) = x$, $p(x) = x + f(x)$ oraz $p^i(x) = p\big(p^{i-1}(x)\big)$, $i = 1, 2, \ldots$ Dodatkowo zakładamy tu, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie 1 oraz $|f'(x)| < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 33. Funkcja $F \in C([a, b] \times \mathbb{R})$ spełnia następujący warunek:

$$\big(\exists m > 0\big)\big(\exists M > 0\big)\big(\forall x \in [a, b]\big)\big(\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}\big)\colon y_1 \neq y_2 \Rightarrow m \leqslant \frac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{y_1 - y_2} \leqslant M.$$

Udowodnić, że:

$$\big(\exists! f \in C([a, b])\big)\big(\forall x \in [a, b]\big)\colon F\big(x, f(x)\big) = 0.$$

Rozwiązanie. Rozważmy odwzorowanie:

$$C([a, b]) \ni g \mapsto A(g),$$

gdzie:

$$A(g)(x) := g(x) - \frac{1}{m+M}F\big(x, g(x)\big), \qquad x \in [a, b].$$

Wówczas, dla dowolnych $g, h \in C[(a, b)]$, $x \in [a, b]$, dostajemy:

$$A(g)(x) - A(h)(x) = g(x) - h(x) - \frac{1}{m+M}\Big(F\big(x, g(x)\big) - F\big(x, h(x)\big)\Big).$$

Stąd, jeśli $g(x) \neq h(x)$, to:

$$|A(g)(x) - A(h)(x)| \leqslant |g(x) - h(x)| \max_{x\in[a,b]} \left| 1 - \frac{1}{m+M} \cdot \frac{F\big(x, g(x)\big) - F\big(x, h(x)\big)}{g(x) - h(x)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{m+M} |g(x) - h(x)|,$$

skąd:

$$\|A(g) - A(h)\| \leqslant \frac{M}{m+M} \|g - h\|$$

i na mocy twierdzenia Banacha (korzystamy z zupełności przestrzeni $C[(a,b)]$ z normą supremum) odwzorowanie A posiada dokładnie jeden punkt stały, co implikuje tezę zadania.

Zadanie 34. (M. Krych, projekt) Niech h będzie homeomorfizmem przestrzeni metrycznej na siebie. Udowodnić, że jeśli dla pewnego ustalonego punktu x_0 zbiór:

$$A = \{h^n(x_0) \colon n \in \mathbb{Z}\}$$

jest zwarty, to jest on również zbiorem skończonym.

Zadanie 35. (projekt) Pokazać, że istnieje ciągła funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że następujący ciąg iteracji $\{f^k(0)\}_{k=1}^{\infty}$ jest gęsty na $\mathbb{R}$.

Zadanie 36. (projekt) Rozważmy następujące wielomiany (wszystkie są wielomianami minimalnymi swoich pierwiastków, to jest dla każdego z tych pierwiastków nie istnieje wielomian o współczynnikach wymiernych stopnia mniejszego, którego byłyby pierwiastkiem):

$$\theta_7(z) = \prod_{k=1}^{3} \left(z - 2\cos\frac{2^k\pi}{7} \right) = z^3 + z^2 - 2z - 1, \tag{8}$$

$$\theta_9(z) = \prod_{k=1}^{3} \left(z - 2\cos\frac{2^k\pi}{9} \right) = z^3 - 3z + 1, \tag{9}$$

$$\theta_{11}(z) = \prod_{k=1}^{5} \left(z - 2\cos\frac{2k\pi}{11} \right) = \prod_{k=1}^{5} \left(z - 2\cos\frac{2^k\pi}{11} \right) = z^5 + z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 3z + 1, \tag{10}$$

$$\theta_{15}(z) = \prod_{k=1}^{4} \left(z - 2\cos\frac{2^k\pi}{15} \right) = z^4 - z^3 - 4z^2 + 4z + 1, \tag{11}$$

$$\theta_{21}(z) = \prod_{k=1}^{6} \left(z - 2\cos\frac{2^k\pi}{21} \right) = z^6 - z^5 - 6z^4 + 6z^3 + 8z^2 - 8z + 1. \tag{12}$$

a) Udowodnić następujące tożsamości:

$$\theta_7(z) = \theta_9(z) + z^2 + z - 2, \tag{13}$$
$$\theta_{15}(z) = (z-1)\theta_9(z) - z^2 + 2, \tag{14}$$
$$\theta_{15}(z) = (z-2)\theta_7(z) + z - 1, \tag{15}$$
$$\theta_{11}(z) = (z^2-2)\theta_7(z) - z - 1, \tag{16}$$
$$z\theta_{11}(z) = \big(z + \theta_7(z)\big)\theta_9(z) - z^2 - z + 1, \tag{17}$$
$$\theta_{21}(z) = (z^2-2)\theta_{15}(z) - z^2 + 3, \tag{18}$$

b) Udowodnić, na podstawie tożsamości (9) i (13), że zbiór $A_9 := \left\{2\cos\frac{2^k\pi}{9} : k = 1,2,3\right\}$ nie jest 3-elementową orbitą wielomianu θ_7 (zob. definicję 5).
Wskazówka. Mamy $\theta_7\left(2\cos\frac{2k\pi}{9}\right) = (-1)^k 2\cos\frac{8k\pi}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$, $3 \nmid k$. Stąd dostajemy:

$$\theta_7\left(2\cos\frac{8\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{4\pi}{9}, \quad \theta_7\left(2\cos\frac{4\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{9}, \quad \text{ale} \quad \theta_7\left(2\cos\frac{2\pi}{9}\right) = -2\cos\frac{8\pi}{9}.$$

c) Udowodnić, że zbiór A_9 jest 3-elementową orbitą następujących wielomianów:

i) na podstawie (9):
$$H_9(z) := \theta_9(z) + z^2 - 2 = z^3 + z^2 - 3z - 1,$$

ii) na podstawie (9) i (17):
$$H_{11}(z) := -z\theta_{11}(z) - z - 1 = -z^6 - z^5 + 4z^4 + 3z^3 - 3z^2 - 2z - 1,$$

iii) na podstawie (9) i (14):
$$H_{15}(z) := -\theta_{15}(z) = -z^4 + z^3 + 4z^2 - 4z - 1.$$

d) Udowodnić, że elementy zbioru A_9 są punktami stałymi następujących wielomianów:

i) na podstawie (9):
$$L_9(z) := \theta_9(z) + z = z^3 - 2z + 1,$$

ii) na podstawie (9) i (17):
$$L_{11}(z) := -z\theta_{11}(z) - z^2 + 1 = -z^6 - z^5 + 4z^4 + 3z^3 - 4z^2 - z + 1,$$

iii) na podstawie (9) i (14):
$$L_{15}(z) := \theta_{15}(z) + z^2 + z - 2 = z^4 - z^3 - 3z^2 + 5z - 1.$$

e) Udowodnić, że zbiór $A_7 := \left\{2\cos\frac{2^k\pi}{7} : k = 1,2,3\right\}$ jest 3-elementową orbitą następujących wielomianów:

i) na podstawie (8):
$$G_7(z) := -\theta_7(z) + z^2 - 2 = -z^3 + 2z - 1,$$

ii) na podstawie (8) i (16):

$$G_{11}(z) := \theta_{11}(z) + z^2 + z - 1 = z^5 + z^4 - 4z^3 - 2z^2 + 4z,$$

iii) na podstawie (8) i (15):

$$G_{15}(z) := \theta_{15}(z) + z^2 - z - 1 = z^4 - z^3 - 3z^2 + 3z.$$

f) Udowodnić, na podstawie tożsamości (18), że zbiór $A_{15} = \left\{2\cos\frac{2^k\pi}{15} : k = 1,2,3,4\right\}$ jest 4-elementową orbitą wielomianu $1 - \theta_{21}$.

g) Udowodnić, że elementy zbioru A_7 są punktami stałymi następujących wielomianów:

i) na podstawie (8):

$$K_7(z) := \theta_7(z) + z = z^3 + z^2 - z - 1,$$

ii) na podstawie (8) i (16):

$$K_{11}(z) := \theta_{11}(z) + 2z + 1 = z^5 + z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 5z + 2,$$

iii) na podstawie (8) i (15):

$$K_{15}(z) := \theta_{15}(z) + 1 = z^4 - z^3 - 4z^2 + 4z + 2.$$

Uwaga 12. Na podstawie poniższego twierdzenia Szarkowskiego wszystkie wielomiany z podpunktów c) i e) zadania 36 mają n-elementowe orbity dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 4 (Szarkowski, 1964). *Niech $f\colon I \to I$, gdzie $I = \mathbb{R}$ lub $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem zwartym w standardowej metryce. Niech $m \in \mathbb{N}$. Jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym oraz posiada orbitę m-elementową, to f posiada też orbitę n-elementową dla każdej liczby naturalnej n, która występuje po liczbie m w następującym porządku $\succ$ liczb naturalnych:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 3 & \succ & 5 & \succ & 7 & \succ & 9 & \succ & \ldots \\
\ldots & \succ & 2\cdot 3 & \succ & 2\cdot 5 & \succ & 2\cdot 7 & \succ & 2\cdot 9 & \succ & \ldots \\
\ldots & \succ & 2^2\cdot 3 & \succ & 2^2\cdot 5 & \succ & 2^2\cdot 7 & \succ & 2^2\cdot 9 & \succ & \ldots \\
\ldots & \succ & 2^3\cdot 3 & \succ & 2^3\cdot 5 & \succ & 2^3\cdot 7 & \succ & 2^3\cdot 9 & \succ & \ldots \\
 & & & & & & & & & & \\
\ldots & \succ & 2^n & \succ & 2^{n-1} & \succ & \ldots & \succ & 2^2 & \succ & 2 \succ 1.
\end{array}$$

Innymi słowy, liczba 3 jest największa w tym uporządkowaniu i ogólnie, jeśli $k,l \in \mathbb{N}_0$, $r,s \in 2\mathbb{N}+1$, to $2^k r \succ 2^l s$ o ile $k < l$ lub $k = l$ i $r < s$.

Niezwykle ciekawy rys historyczny dotyczący tego twierdzenia jak i różne dowody znaleźć można w pracach [5, 10, 12].

Literatura

1. J. Banaś, M. Kot, *On regulated functions*, J. Math. Appl. 40 (2017), 21-36.
2. J.J. Benedetto, W. Czaja, *Integration and Modern Analysis*, Birkhäuser, Boston 2009.
3. P. du Bois-Reymond, *Über asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen*, Math. Ann. 8 (1875), 363-414.
4. V. Brayman, A. Kukush, *Undergraduate Mathematics Competitions (1955-2016)*, Springer, 2017.
5. K. Ciesielski, Z. Pogoda, *On ordering the natural numbers or the Sharkovski Theorem*, Amer. Math. Monthly 115 (2008), 159-165.
6. A. Dorogowcew, *Analiza matematyczna: zbiór zadań*, Wydawnictwo Szkoła Wyższa, Kijów 1987 (po rosyjsku).
7. K. Goebel, *Concise Course on Fixed Point Theorems*, Yokohama Publishers, Yokohama 2002.
8. R.A. Knoebel, *Exponentials reiterated*, Amer. Math. Monthly 88 (1981), 235-252.
9. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1979.
10. J.J. Ludew, M. Różański, B. Smoleń-Duda, R. Wituła, S. Czernik, *Iteracje odwzorowań, orbity, twierdzenie Banacha o punkcie stałym i jego ogólniejsze warianty* (w przygotowaniu).
11. A. Mąkowski, K. Wiśniewski, *Generalization of Abian's fixed point theorem*, Roczniki PTM, Seria I: Prace Matematyczne 13 (1969), 63-65.
12. M. Misiurewicz, *Remarks on Sharkovsky's theorem*, Amer. Math. Monthly 104 (1997), 846-847.
13. W.A. Sadowniczyj, A.S. Podkolzin, *Zadania z olimpiad studenckich z matematyki*, Wydawnictwo Nauka, Moskwa 1978 (po rosyjsku).
14. R. Wituła, D. Słota, *Fixed and periodic points of polynomials generated by minimal polynomials of* $2\cos(2\pi/n)$, Internat. J. Bifur. Chaos 19 (2009), 3005-3016.