

ANALIZA PRACY ZGINANIA BELKI ZE ZBROJENIEM NIEMETALICZNYM

Streszczenie

W artykule przedstawiono analizę zginanych w jednej płaszczyźnie belek żelbetonowych zbrojonych prętami FRP. Szczegółowa analiza faz pracy belki dostarcza informacji na temat zachowania się elementów zginanych zbrojonych prętami FRP w stanie granicznym nośności. Przy zastosowaniu typowych stopni zbrojenia obserwuje się zniszczenie przekrojów przez zmiżdżenie betonu.

WSTĘP

W konstrukcjach betonowych coraz częściej, jako alternatywę zbrojenia stalowego, stosuje się pręty kompozytowe FRP. Związane jest to między innymi z takimi ich właściwościami jak wysoka wytrzymałość na rozciąganie, obojętność elektromagnetyczna oraz duża odporność na korozję. Od czasu pierwszego zastosowania jako zbrojenia prętów kompozytowych rozpoczął się proces ich weryfikacji w kontekście wykorzystania jako zbrojenie główne elementów betonowych [1,2].

W artykule omówiono analizę zachowania zginanej belki zbrojonej prętami FRP z wykorzystaniem nieliniowego zachowania betonu. Pracę zginanego przekroju zbrojonego poddawanego oddziaływaniu coraz większego obciążenia opisuje się poprzez kolejne fazy pracy [3]. Podziały na fazy pracy przekroju oparte są na modelach materiałowych betonu i stali.

Dla betonu przyjmujemy zerową wytrzymałość na rozciąganie oraz przy ściskaniu model sprężysto-plastyczny [4, 5]. W analizie pominiemy efekt wzmocnienia materiału po zarysowaniu w obecności zbrojenia oraz poślizg na styku betonu i zbrojenia. Dla prętów FRP przyjmujemy model zbliżony do rzeczywistego – model sprężysto-kruchy. Założymy także prawdziwość hipotezy o płaskich przekrojach dla zginania sprężystego i sprężysto-plastycznego.

1. CHARAKTERYSTYKA PRĘTÓW FRP

FRP (fiber-reinforced polymer) jest to materiał powstały przez połączenie ze sobą ciągłych włókien i żywicy. Włókna odpowiadają za nadanie prętom FRP odpowiedniej wytrzymałości oraz sztywności. Funkcją żywicy jest zespojenie włókien, zabezpieczenie ich powierzchni oraz przekazanie naprężeń.

Ze względu na materiał, z którego wykonane są ciągłe włókna, według [6] pręty FRP dzieli się na:

- CFRP (carbon fiber-reinforced polymer) - włókna węglowe lub grafitowe,
- BFRP (basalt fiber-reinforced polymer) - włókna bazaltowe,
- GFRP (glass fiber-reinforced polymer) - włókna szklane,
- AFRP (aramid fiber-reinforced polymer) - włókna aramidowe.

Najczęściej używanym w budownictwie materiałem kompozytowym jest GFRP [7]. Wynika to przede wszystkim ze względnie niskich kosztów produkcji tego materiału w porównaniu z innymi kompozytami. Właściwości prętów FRP w znacznej mierze zależą od materiału, z którego wykonane są włókna, oraz właściwości żywicy. Bardzo wysokie wytrzymałości na rozciąganie są dominującą cechą prętów FRP, a jej wartości mieszczą się w przedziale od 500 do 5000 MPa. Największą wartość mamy dla prętów CFRP, a najmniejszą dla GFRP. Ponieważ pręty mają mniejszą wytrzymałość na ściskanie niż na rozciąganie, w związku z tym nie zaleca się stosowania ich w strefach ściskanych przekrojów betonowych.

W przypadku modułu sprężystości, jest on inny przy rozciąganiu niż przy ściskaniu prętów FRP [8]. Przy rozciąganiu, w zależności od rodzaju pręta, wynosi on od 35 do 125 GPa dla prętów GFRP, AFRP i BFRP. Wyjątkiem są pręty CFRP, dla których moduł Younga jest z przedziału od 120 do 580 GPa. Natomiast przy ściskaniu stanowi 80% modułu sprężystości na rozciąganie GFRP i 85% dla prętów CFRP [8]. Dla prętów AFRP różnicy takiej nie zaobserwowano. Mniejszy moduł sprężystości podłużnej przy ściskaniu wpływa na większą podatność prętów FRP na wyobcowienie.

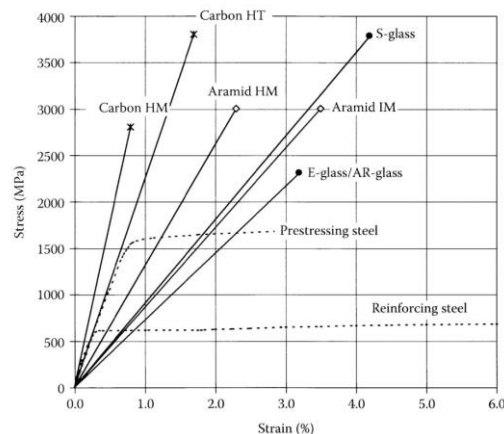
W tabelicy 1 zestawiono podstawowe właściwości prętów FRP.

Tab. 1. Właściwości prętów FRP [6]

Rodzaj prętów	Gęstość [kg/m ³]	Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	Moduł sprężystości podłużnej przy rozciąganiu [GPa]	Graniczne odkształcenie przy rozciąganiu [%]
CFRP	1500÷1600	600÷3690	120÷580	0,5÷1,7
GFRP	1250÷2100	483÷1600	35÷51	1,2÷3,1
AFRP	1250÷1400	1720÷2540	41÷125	1,9÷4,4
BFRP	1900	1100	70	2,2

1.1. Zależność naprężenie-odkształcenie dla prętów FRP

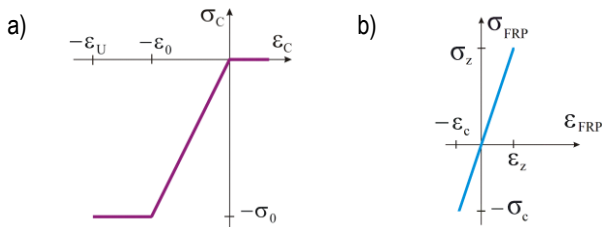
Zależność między naprężeniem a odkształceniem dla prętów FRP [7] znacznie różni się od tej zależności dla stali [9]. Wykresy σ - ϵ dla prętów FRP charakteryzują się brakiem występowania półki plastycznej. Materiał pracuje w zakresie sprężystym w całym zakresie osiągalnych odkształceń. Zniszczenie prętów FRP następuje przez osiągnięcie wytrzymałości na rozciąganie i nie jest poprzedzone nieproporcjonalnym przyrostem naprężeń. Na rysunku 1 przedstawione są charakterystyki σ - ϵ dla stali oraz dla różnych typów prętów FRP.



Rys. 1. Zależność σ - ϵ dla stali i różnych rodzajów włókien używanych w prętach FRP [7]

2. FAZY PRACY ZGINANEJ BELKI ZBROJONEJ PRĘTAMI FRP

W celu wykonania analizy pracy belki zbrojonej prętami FRP, należy przyjąć odpowiednie modele materiałowe, idealizujące zachowanie materiałów składowych przekroju poprzecznego poddanego obciążeniu momentem zginającym. Dla betonu przyjęto model liniowo sprężysty i idealnie plastyczny przy ściskaniu, przedstawiony na rysunku 2a. W tym przypadku zakłada się brak zdolności betonu do przenoszenia naprężeń rozciągających.



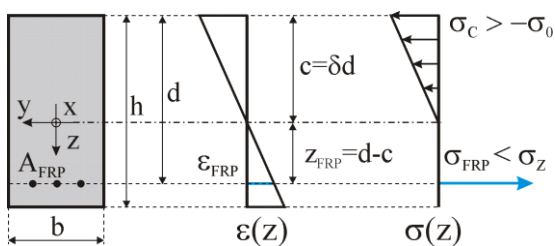
Rys. 2. Jednowymiarowe modele: a) betonu [11], b) prętów FRP

W przypadku prętów, FRP należy dokonać analizy wykresów $\sigma(\varepsilon)$ dla poszczególnych rodzajów prętów (rys. 1), ponieważ te pręty bez względu na rodzaj włókien i żywicy, zachowują się w przybliżeniu liniowo-sprężysto w całym zakresie swojej pracy. Dlatego dla prętów FRP przyjmuje się model liniowo-sprężysty i kruchy, który jest przedstawiony na rysunku 2b.

Do opisu faz pracy zginanej belki o przekroju prostokątnym zbrojonej prętami FRP zostały zmodyfikowane zależności formułowane w przypadku belek żelbetowych [10, 11].

2.1. Faza I - zginanie w zakresie sprężystym

W fazie I zginania zarówno beton, jak i pręty FRP ulegają odkształceniom sprężystym. Dla betonu nieprzekroczone pozostają graniczne odkształcenia sprężyste ε_0 oraz towarzyszące im naprężenie uplastyczniające σ_0 . Dla prętów FRP odkształcenia są mniejsze od granicznych odkształceń przy rozciąganiu, a naprężenia są mniejsze od granicy zerwania. Na rysunku 3 pokazane są rozkłady odkształceń i naprężeń po wysokości przekroju pracującego w fazie sprężystej.



Rys. 3. Rozkłady odkształceń i naprężeń w zginanym przekroju, w fazie I [11]

Zapisując wzory na zerową wypadkową siłę podłużną i wypadkowy moment występujące w przekroju mamy dwa równania. Z otrzymanego w ten sposób układu równań wyznaczamy zasięg strefy ściskanej δ :

$$\delta_l = \sqrt{\xi(\xi + 2)} - \xi, \tag{1}$$

gdzie $\xi = \rho n = \frac{A_{FRP}}{bd} \frac{E_{FRP}}{E_c}$ oznacza stopień zbrojenia przekroju

zbrojonego prętami FRP skalowany stosunkiem modułów Younga, A_{FRP} jest polem przekroju prętów FRP, E_{FRP} i E_c są odpowiednio wartościami modułu sprężystości dla prętów FRP i betonu, l oznacza, że przekrój pracuje w fazie I.

Zależność pomiędzy momentem i krzywizną w fazie I dla elementu zbrojonego prętami FRP jest taka sama jak w przypadku elementu żelbetowego [10, 11] i wynosi:

$$m_l = 4\xi \left[3 + 6\xi + 2\xi^2 - 2\sqrt{\xi(\xi + 2)} \right] k. \tag{2}$$

W zależności (2) wprowadzono odpowiednio bezwymiarową krzywiznę i bezwymiarowy moment:

$$k = \frac{\kappa}{\kappa_0}, \quad m = \frac{M}{M_0},$$

w których

$$\kappa_0 = \frac{2\varepsilon_0}{d} \quad \text{oraz} \quad M_0 = \frac{bd^2\sigma_0}{6}.$$

Jak wynika z (1) zasięg strefy ściskanej w fazie I jest stały i zależy od modułowego stopnia zbrojenia (ξ), natomiast związek między momentem i krzywizną jest liniowy.

Koniec fazy I może nastąpić przez zerwanie prętów FRP lub uplastycznienie ściskanego betonu.

Zakończenie fazy przez uplastycznienie betonu zachodzi gdy odkształcenia w skrajnych, górnych włóknach betonu osiągną granicę sprężystości ($\varepsilon_c = -\varepsilon_0$ na rys. 2a), natomiast odkształcenia w prętach FRP pozostają mniejsze od granicznych odkształceń przy rozciąganiu ($\varepsilon_{FRP} < \varepsilon_z$). Wykorzystując zależności zapisane w [10] i [11] dla zginanego przekroju żelbetowego, dla przekroju zginanego zbrojonego prętami FRP otrzymamy odpowiednio:

- graniczne odkształcenie sprężystości dla ściskanego betonu
$$\varepsilon_0 = \delta_{l0} d \kappa_{l0}, \tag{3}$$

gdzie κ_{l0} jest krzywizną określoną dla końca fazy I,

- bezwymiarową krzywiznę
$$k_{l0} = \frac{1}{2[\sqrt{\xi(\xi + 2)} - \xi]}, \tag{4}$$

- bezwymiarowy moment
$$m_{l0} = \frac{2\xi \left[3 + 6\xi + 2\xi^2 - 2\sqrt{\xi(\xi + 2)} \right]}{-\xi + \sqrt{\xi(\xi + 2)}}. \tag{5}$$

Zniszczenie przekroju przez zerwanie prętów FRP w fazie I następuje dla granicznych odkształceń zerwania ($\varepsilon_{FRP} = \varepsilon_z$ na rys. 2b). Wzory w tym przypadku mają postać [10, 11]:

- graniczne odkształcenie prętów FRP
$$\varepsilon_z = (1 - \delta_{lz}) d \kappa_{lz}, \tag{6}$$

- bezwymiarową krzywiznę
$$k_{lz} = \frac{\alpha}{2[1 - \sqrt{\xi(\xi + 2)}\xi]}, \tag{7}$$

- bezwymiarowy moment
$$m_{lz} = \frac{2\alpha\xi \left[3 + 6\xi + 2\xi^2 - 2\sqrt{\xi(\xi + 2)} \right]}{1 - \sqrt{\xi(\xi + 2)} + \xi}, \tag{8}$$

gdzie $\alpha = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0}$.

Sytuacja, w której dochodzi do zniszczenia przekroju w taki sposób nie jest zalecana przy projektowaniu przekroju zginanego. Oznacza ona, że w pełni została wykorzystana wytrzymałość prętów natomiast nośność betonu nie jest wykorzystana. Przekrój może ulec zniszczeniu przy bardzo niskim procencie zbrojenia ($\rho < \rho_{0z}$), gdzie ρ_{0z} jest granicznym procentem zbrojenia wyznaczonym poniżej.

Wartość granicznego procentu zbrojenia wyznaczamy przyrównując krzywiznę przy której jednocześnie rozpoczyna się upla-

stycznienie k_{I0} (4) i krzywiznę przy której dochodzi do zerwania prętów FRP k_{Iz} (7):

$$k_{I0} = k_{Iz}. \quad (9)$$

Stąd uzyskamy szacunkowy stopień zbrojenia:

$$\xi_{0z} = \frac{1}{2\alpha(\alpha + 1)} \quad (10)$$

albo

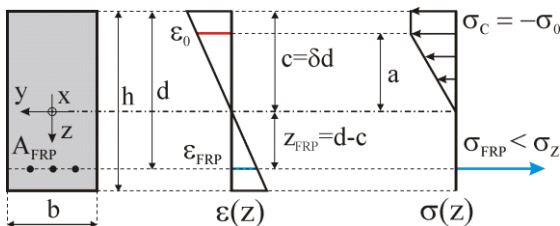
$$\rho_{0z} = \frac{1}{2\alpha n(\alpha + 1)}. \quad (11)$$

2.2. Faza IIb - praca betonu w zakresie plastycznym i prętów FRP w zakresie sprężystym

Faza IIb rozpoczyna się bezpośrednio gdy odkształcenia w betonie przekroczą graniczne odkształcenia sprężystości, nie osiągają jednak granicznych odkształceń zmiążdżenia: $\varepsilon_0 < |\varepsilon_c| < \varepsilon_u$. W skrajnych włóknach betonu osiągnięte jest graniczne naprężenie $-\sigma_0$. Odkształcenia w zbrojeniu nie przekraczają granicznych odkształceń przy rozciąganiu ε_z , w związku z czym naprężenia w prętach nie osiągają granicy σ_z . W tej fazie beton ulega odkształceniom plastycznym, natomiast zbrojenie pozostaje w zakresie pracy sprężystej.

Faza IIb następuje bezpośrednio po fazie I, jeśli stopień zbrojenia przekroju jest większy od granicznego stopnia zbrojenia ρ_{0z} ($\rho > \rho_{0z}$) określonego wzorem (11).

W fazie IIb istotną wielkością jest zasięg liniowego rozkładu naprężeń w betonie, oznaczany jako a . Rozkłady odkształceń i naprężeń w tej fazie ilustruje rysunek 4.



Rys. 4. Wykresy odkształceń i naprężeń w przekroju zginanym w fazie IIb [11]

Zasięg liniowego rozkładu naprężeń w betonie wyznacza się z odpowiednio przekształconej zależności między odkształceniem a krzywizną [10, 11]:

$$\varepsilon_0 = a\kappa \Rightarrow a = \frac{d}{2k}. \quad (12)$$

Równania wypadkowych sił podłużnych i momentów występujących w przekroju w fazie IIb, zapisane względem osi obojętnej przekroju są takie same, jak w przypadku fazy IIb w przekroju żelbetowym [10, 11]:

$$b\sigma_0(a - c) - \frac{1}{2}ba^2E_c\kappa + A_{FRP}E_{FRP}(d - c)\kappa = 0, \quad (13)$$

$$M = \frac{1}{2}b\sigma_0(c^2 - a^2) + \frac{1}{2}ba^3E_c\kappa + A_{FRP}E_{FRP}(d - c)^2\kappa. \quad (14)$$

Zakres strefy ściskanej wyraża się zależnością:

$$\delta_{IIb} = \frac{1 + 8\xi k^2}{4k + 8\xi k^2}. \quad (15)$$

Podstawiając wartość otrzymaną z (15) do równania momentu otrzymujemy zależność na moment zginający w fazie IIb [11]:

$$m_{IIb} = 3 - \frac{1}{16k^2} - \frac{3(2 + \xi)^2}{4(1 + 2\xi k)^2}. \quad (16)$$

W tej fazie pracy przekroju zasięg strefy ściskanej nie jest wielkością stałą, a zależność między momentem i krzywizną jest nieliniowa. Zakończenie fazy IIb może nastąpić gdy nośność przekroju zostanie wyczerpana, wówczas zostaną osiągnięte graniczne odkształcenia zmiążdżenia w betonie $-\varepsilon_u$ albo gdy w prętach FRP zostaną osiągnięte odkształcenia graniczne zerwania ε_z .

Do wyczerpania nośności przekroju przez zerwanie prętów FRP w fazie IIb dochodzi przy odkształceniach granicznych zerwania w zbrojeniu $\varepsilon_{FRP} = \varepsilon_z$ oraz przy odkształceniach w skrajnych ściskanych włóknach betonu większych od odkształceń granicznych sprężystości, ale mniejszych od odkształceń granicznych przy zmiążdżeniu: $\varepsilon_0 < |\varepsilon_c| < \varepsilon_u$.

Wielkość granicznej krzywizny występującej w chwili zerwania i momentu przy zerwaniu prętów FRP wyznaczamy podstawiając zależność (15) do wzoru na graniczne odkształcenia zerwania ε_z , a następnie odpowiednio je przekształcając:

$$\varepsilon_z = (1 - \delta_{IIbz})d\kappa_{IIbz}, \quad (17)$$

$$k_{IIbz} = \frac{2\alpha + 1}{4(1 - \alpha\xi)}, \quad (18)$$

$$m_{IIbz} = 3 - \left(\frac{1 - \alpha\xi}{1 + 2\alpha}\right)^2 - 3(1 - \alpha\xi)^2. \quad (19)$$

Zakończenie fazy IIb poprzez zmiążdżenie betonu następuje gdy skrajne włókna w strefie ściskanej betonu osiągają odkształcenia $-\varepsilon_u$, natomiast pręty FRP wciąż pracują w zakresie sprężystym, $\varepsilon_{FRP} < \varepsilon_z$. Odkształcenie graniczne przy zmiążdżeniu przedstawia wyrażenie:

$$\varepsilon_u = \delta\lambda\kappa, \quad (20)$$

$$k = \frac{\lambda}{2\delta}, \quad (21)$$

gdzie $\lambda = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0}$.

Wartość krzywizny w chwili zmiążdżenia betonu w fazie IIb, otrzymamy z (21) i (15):

$$k_{IIbu} = \frac{\lambda\xi + \sqrt{\Delta}}{4\xi}. \quad (22)$$

W mocy pozostaje wzór (16) na moment zginający w fazie IIb. Graniczną wartość momentu zginającego przy zmiążdżeniu betonu w fazie IIb określimy po podstawieniu (22) do (16):

$$m_{IIbu} = 3 - \frac{\xi^2}{(\lambda\xi + \sqrt{\Delta})^2} - \frac{3(2 + \xi)^2}{(2 + \lambda\xi + \sqrt{\Delta})^2}, \quad (23)$$

gdzie $\Delta = \lambda^2\xi^2 + 4\lambda\xi - 2\xi$.

Graniczny stopień zbrojenia ρ_{uz} i graniczny modułowy stopień zbrojenia $\xi_{uz} = \frac{\rho_{uz}}{n}$ wyznacza się, przyrównując do siebie krzywiznę w sytuacji zniszczenia przekroju przez zerwanie zbrojenia i w sytuacji zmiążdżenia betonu, tj.:

$$k_{IIbz} = k_{IIbu}. \quad (24)$$

Po rozwiązaniu równania (24) otrzymamy:

$$\xi_{uz} = \frac{2\lambda - 1}{2\alpha(\alpha + \lambda)}. \quad (25)$$

Dla $\xi > \xi_{uz}$ do zniszczenia dojdzie przez zmiążdżenie betonu, w przeciwnym wypadku w pierwszej kolejności zerwaniu ulegną pręty FRP.

3. ANALIZA PRACY ZGINANYCH PRZEKROJÓW

Wyniki analizy pracy przekrojów zginanych zbrojonych różnymi rodzajami prętów FRP przedstawiono na przykładzie liczbowym.

Dla poniższych obliczeń przyjęto przekrój prostokątny pojedynczo zbrojony o wymiarach $b \times h = 25 \times 40$ cm o wysokości efektywnej $d = 35$ cm. Dla wszystkich analizowanych przypadków przyjęty został beton klasy C25/30, dla którego zgodnie z [9] mamy: $f_c = 25$ MPa, $E_c = 31$ GPa, $\varepsilon_0 = 1,75$ ‰, $\varepsilon_u = 3,5$ ‰. Dodatkowo:

$$\lambda = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0} = \frac{0,0035}{0,00175} = 2, \quad \kappa_0 = \frac{2\varepsilon_0}{d} = \frac{2 \cdot 0,00175}{0,350} = 0,01 \frac{1}{m},$$

$$M_0 = \frac{bd^2}{6} f_c = \frac{0,250 \cdot 0,350^2}{6} \cdot 25 \cdot 10^3 = 2127,60 \text{ kNm}.$$

Wielkości parametrów przyjętych dla poszczególnych prętów FRP zestawiono w tabelicy 2.

Tab. 2. Charakterystyki prętów FRP [4, 5]

Rodzaj prętów	GFRP	CFRP	AFRP	BFRP
σ_z [MPa]	1400	3500	2500	4000
E_{FRP} [MPa]	45000	320000	71500	70000
ε_z	0,031	0,011	0,035	0,057
Liczba prętów	6	6	6	6
ϕ [mm]	14	14	14	14
A_{FRP} [mm ²]	923,63	923,63	923,63	923,63
$n = \frac{E_{FRP}}{E_c}$	1,45	10,26	2,30	2,26
$\alpha = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0}$	17,78	6,29	20,00	32,65
$\rho = \frac{A_{FRP}}{bd}$	0,0106	0,0106	0,0106	0,0106
$\xi = \rho n$	0,015323	0,108343	0,024322	0,023836

Obliczenia zostały wykonane z wykorzystaniem programu komputerowego Wolfram Mathematica 9 [12].

3.1. Faza I

Obliczone wielkości krzywizn i momentów granicznych w fazie I belki zginanej zbrojonej prętami FRP zestawiono w tabelicy 3.

Tab. 3. Charakterystyczne wielkości dla przekroju w fazie I

Symbol [jednostka]	Faza I			
	Wartość			
	GFRP	CFRP	AFRP	BFRP
δ_1	0,160	0,370	0,198	0,196
Przejście z fazy I do fazy IIb – uplastycznienie betonu				
k_{I0}	3,12	1,35	2,53	2,55
κ_{I0} [1/m]	0,0312	0,0135	0,0253	0,0255
m_{I0}	0,455	0,972	0,554	0,549
M_{I0} [kNm]	58,12	124,05	70,65	70,06
Zniszczenie przekroju poprzez zerwanie prętów w fazie I				
k_{Iz}	10,59	4,99	12,46	20,30
κ_{Iz} [1/m]	0,106	0,0499	0,125	0,203
m_{Iz}	1,5470	3,5827	2,7264	4,3650
M_{Iz} [kNm]	197,41	457,17	215,99	557,00
Jednoczesne zerwanie prętów i osiągnięcie granicy sprężystości w betonie				
ξ_{0z}	0,001498	0,010918	0,001190	0,000455
ρ_{0z}	0,001032	0,001064	0,000517	0,000202
ρ	0,01056			

Analizując wyniki zestawione w tab. 3 można zauważyć, że we wszystkich z wybranych przekrojów do osiągnięcia odkształceń sprężystych dojdzie przez zerwanie prętów FRP, ponieważ dla wszystkich rodzajów prętów spełniona jest nierówność $\rho > \rho_{0z}$. Pokrywa się to z otrzymanymi wartościami momentów granicznych. Dla wszystkich rodzajów zbrojenia zachodzi nierówność $m_{I0} < m_{Iz}$, co potwierdza, że we wszystkich przekrojach do zakończenia fazy I dojdzie przez uplastycznienie skrajnych ściskanych włókien betonu. Jest to prawidłowa sytuacja projektowa. W fazie I nie powinno dochodzić do zerwania prętów zbrojeniowych.

3.2. Faza IIb

Obliczone wielkości krzywizn i momentów granicznych w fazie IIb belki zginanej zbrojonej prętami FRP zestawiono w tabelicy 4.

Ze względu na to, że w fazie IIb zasięg strefy ściskanej jest zależny od krzywizny, nie jest możliwe podanie konkretnej wartości liczbowej współczynnika δ w tej fazie pracy przekroju.

Tab. 4. Charakterystyczne wielkości dla przekroju w fazie IIb

Symbol [jednostka]	Faza IIb			
	Wartość			
	GFRP	CFRP	AFRP	BFRP
Zakończenie fazy IIb – zniszczenie betonu				
k_{IIbu}	5,472	2,421	4,456	4,4978
κ_{IIbu} [1/m]	0,0547	0,0242	0,0446	0,0450
m_{IIbu}	0,7639	1,5600	0,9217	0,9140
M_{IIbu} [kNm]	97,48	199,06	117,61	116,63
Zakończenie fazy IIb - zerwanie prętów w fazie IIb				
k_{IIz}	12,500	10,768	19,978	73,939
κ_{IIz} [1/m]	0,1250	0,1077	0,1998	0,7394
m_{IIz}	1,4072	2,7016	2,2101	2,8500
M_{IIz} [kNm]	179,56	344,74	282,02	363,67
Jednoczesne zerwanie prętów i osiągnięcie granicy sprężystości w betonie				
ξ_{uc}	0,004295	0,022880	0,003409	0,001332
ρ_{uc}	0,002959	0,002790	0,001478	0,000569
ρ	0,01056			

Analiza granicznych wartości stopni zbrojenia (tab. 4) prowadzi do wniosku, że w przykładowych przekrojach wystąpią takie same schematy zniszczenia. We wszystkich przypadkach do zniszczenia przekroju dojdzie przez zmiężdżenie betonu, ponieważ przyjęty stopień zbrojenia jest większy od granicznego ($\rho > \rho_{uz}$).

4. WNIOSKI Z ANALIZY PRACY PRZEKROJU ZGINANEGO

4.1. Przekrój zbrojony prętami z włóknami szklanymi GFRP

Analizując wartości zestawione w tabelicy 3 i tabelicy 4 obserwujemy, że poddawany działaniu coraz większego momentu zginającego przekrój będzie pracował najpierw w fazie I, a następnie w fazie IIb. Do przejścia z fazy I do fazy IIb dojdzie w wyniku uplastycznienia skrajnych włókien ściskanych betonu przy działającym momencie o wartości $M_{I0} = 58,12$ kNm, wywołującym w analizowanym przekroju krzywiznę $\kappa_{I0} = 0,0312$ 1/m. Do zakończenia fazy IIb pracy przekroju i do jego zniszczenia dojdzie w wyniku zmiężdżenia betonu. Do zniszczenia przekroju dojdzie przy działającym momencie o wartości $M_{IIbu} = 97,48$ kNm, wywołującym w analizowanym przekroju krzywiznę $\kappa_{IIbu} = 0,0547$ 1/m.

4.2. Przekrój zbrojony prętami z włóknami węglowymi CFRP

Analizując wyniki uzyskane w przypadku zastosowania zbrojenia CFRP (tab. 3 i 4) obserwujemy, że przekrój zginany poddany

działaniu coraz większego momentu zginającego będzie pracował najpierw w fazie I, a następnie w fazie IIb. Do przejścia z fazy I do fazy IIb dojdzie w wyniku uplastycznienia skrajnych włókien ściskanych betonu przy działającym momencie o wartości $M_{10} = 124,05$ kNm, wywołującym w analizowanym przekroju krzywiznę $\kappa_{10} = 0,0135$ 1/m. Do zakończenia fazy IIb pracy przekroju i do jego zniszczenia dojdzie w wyniku zmiężdżenia betonu w strefie ściskanej. Do zniszczenia przekroju dojdzie przy działającym momencie o wartości $M_{IIbu} = 199,06$ kNm, wywołującym w analizowanym przekroju krzywiznę $\kappa_{IIbu} = 0,0242$ 1/m.

4.3. Przekrój zbrojony prętami z włóknami aramidowymi AFRP

Dla przekroju zbrojonego prętami AFRP zauważamy, że (tab. 3 i 4) przekrój będzie pracował najpierw w fazie I, a następnie w fazie IIb. Do przejścia z fazy I do fazy IIb dojdzie w wyniku uplastycznienia skrajnych włókien ściskanych betonu przy działającym momencie o wartości $M_{10} = 70,65$ kNm, wywołującym w analizowanym przekroju krzywiznę $\kappa_{10} = 0,0253$ 1/m. Do zakończenia fazy IIb pracy przekroju i do jego zniszczenia dojdzie w wyniku zmiężdżenia betonu w strefie ściskanej. Do zniszczenia przekroju dojdzie przy działającym momencie o wartości $M_{IIbu} = 117,61$ kNm, wywołującym w analizowanym przekroju krzywiznę $\kappa_{IIbu} = 0,0446$ 1/m.

4.4. Przekrój zbrojony prętami z włóknami bazaltowymi BFRP

Analizując wartości zestawione w tablicy 3 i tablicy 4 obserwujemy, że poddawany działaniu coraz większego momentu zginającego będzie pracował najpierw w fazie I, a następnie w fazie IIb. Do przejścia z fazy I do fazy IIb dojdzie w wyniku uplastycznienia skrajnych włókien ściskanych betonu przy działającym momencie o wartości $M_{10} = 70,06$ kNm, wywołującym w analizowanym przekroju krzywiznę $\kappa_{10} = 0,0255$ 1/m. Do zakończenia fazy IIb pracy przekroju i do jego zniszczenia dojdzie w wyniku zmiężdżenia betonu w strefie ściskanej. Do zniszczenia przekroju dojdzie przy działającym momencie o wartości $M_{IIbu} = 116,63$ kNm, wywołującym w analizowanym przekroju krzywiznę $\kappa_{IIbu} = 0,0450$ 1/m.

4.5. Porównanie nośności przekrojów zbrojonych prętami FRP

W tablicy 5 zestawione zostały wartości maksymalnych momentów i krzywizn dla poszczególnych prętów FRP.

Tab. 5. Maksymalne wartości krzywizn i momentów w zginanych przekrojach zbrojonych prętami FRP

Rodzaj prętów	GFRP	CFRP	AFRP	BFRP
Maksymalna krzywizna [1/m]				
κ_{max}	0,0547	0,0242	0,0446	0,0450
Nośność przekroju ze względu na moment zginający [kNm]				
Liczba prętów	6	6	6	6
M_{max}	97,48	199,06	117,61	116,63

W założeniach do obliczeń przyjęto, że wytrzymałość na rozciąganie prętów z włóknami bazaltowymi jest większa niż prętów z włóknami węglowymi (tab. 2). W przypadku prętów FRP na nośność ma również wpływ moduł sprężystości podłużnej E_{FRP} . Dla prętów CFRP w przedstawionej analizie przyjęto moduł Younga ponad 4-krotnie większy od modułu prętów BFRP.

Porównując wyniki zestawione w tablicy 5 zaobserwowano, że największą nośność na zginanie wykazał przekrój zbrojony prętami CFRP natomiast najmniejszą przekrój zbrojony prętami GFRP. Jest to materiał o najmniejszej granicy zerwania oraz najmniejszym module sprężystości podłużnej.

Maksymalne wartości krzywizn osiągalnych w analizowanych przekrojach są podobne dla przekrojów zbrojonych prętami GFRP, AFRP i BFRP, przy czym największą wartość przyjmuje maksymalna krzywizna dla przekroju zbrojonego prętami GFRP. Natomiast najmniejszą krzywiznę osiągają przekroje zbrojone prętami CFRP i jest ona ponad 2-krotnie mniejsza od krzywizn osiąganych w pozostałych przypadkach. Różnica ta wynika ze znacznie większego modułu Younga prętów CFRP od pozostałych prętów.

Duża wytrzymałość prętów bazaltowych na rozciąganie oraz ich stosunkowo niewielki moduł Younga może być przyczyną osiągnięcia najmniejszych wartości ξ_{0z} i ξ_{uz} przez przekrój zbrojony prętami BFRP. Oznacza to, że w belkach zbrojonych prętami bazaltowymi do zniszczenia przez zerwanie prętów jedynie przy bardzo niskich stopniach zbrojenia.

PODSUMOWANIE

Celem pracy było przeprowadzenie analizy pracy zginanej belki zbrojonej prętami FRP. Analizę tę przeprowadzono, wykorzystując liniowo-sprężysty i idealnie plastyczny model betonu oraz liniowo-sprężysty i kruchy model prętów FRP. Z przyjętych modeli materiałów wynikają otrzymane fazy pracy przekroju zbrojonego prętami kompozytowymi. Zachowując nazewnictwo znanych faz pracy przekroju żelbetowego, fazy występujące dla przekroju zbrojonego prętami FRP to I i IIb

Korzystając z równań wypadkowych sił i momentów występujących w przekroju, wyprowadzono wyrażenia uzależniające od siebie krzywiznę i moment w poszczególnych fazach. Wyznaczono także wzory na graniczne wartości krzywizn i momentów oraz charakterystyczne stopnie zbrojenia. Ze względu na liniowo sprężyste zachowanie prętów FRP, rozpatrzono możliwość zniszczenia przekroju przez zerwanie prętów już w fazie I, przy bardzo niskich stopniach zbrojenia.

Na podstawie wykonanego przykładu obliczeniowego wywnioskowano, że nośność przekroju zbrojonego prętami kompozytowymi zależy przede wszystkim od modułu sprężystości zbrojenia. Największą nośność na zginanie wykazał przekrój zbrojony prętami CFRP. Pręty te charakteryzują się kilkukrotnie większym modułem Younga od pozostałych rodzajów prętów, natomiast nośność przekładowego przekroju była większa od pozostałych 1,4÷1,7-krotnie. Przy mniejszych stopniach zbrojenia duży wpływ na nośność przekroju miałyby również wytrzymałość na rozciąganie prętów FRP. Ze względu na właściwości prętów, i fakt że ulegają one zerwaniu bez przejścia przez odcinek półki plastycznej, zaleca się projektowanie na zniszczenie przekroju przez zmiężdżenie betonu.

Stosowanie zbrojenia wykonanego z prętów FRP jako alternatywy do zbrojenia stalowego wymaga indywidualnego podejścia oraz doświadczenia w praktyce inżynierskiej.

BIBLIOGRAFIA

1. Drzazga M., Kamiński M., Pręty zbrojeniowe FRP jako główne zbrojenie zginanych elementów betonowych - przegląd zaleceń i efektywność projektowania. Przegląd Budowlany 3/2015, str. 22-28.
2. Urbański M., Implementacja prętów BFRP do zbrojenia konstrukcji z betonu. Rozdział X w monografii: Beton i konstrukcje z betonu-badania, Seria Monografie Zakładu Konstrukcji Betonowych i Zakładu Inżynierii Materiałów Budowlanych, Szmigiera E., Łukowski P., Jemiolo S. [red.]. Warszawa 2015, str. 129--140.
3. Kuczyński W., Konstrukcje betonowe. Kontynualna teoria zginania żelbetu. PWN, Warszawa 1971.

4. Gawęcki A., Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1998.
5. Szerszeń M., Szwed A., Li V.C., Flexural response of reinforced beam with high ductility concrete material. Proc. Of Inter. Symp. On Brittle Matrix Composites 8, A.M. Brandt, V.C. Li, I.H. Marshall, eds., ZTUREK RSI and Woodhead Publishing, Warsaw 2006, pp. 262-274.
6. Szumigala M., Pawłowski D., Zastosowanie kompozytowych prętów zbrojonych w konstrukcjach budowlanych. Przegląd Budowlany 3/2014, str. 47-50.
7. Zoghi M., The International Handbook of FRP Composites in Civil Engineering. CRC Press, 2014.
8. Nanni A., de Luca A., Jawaheri Zadeh H., Reinforced Concrete with FRP Bars: Mechanics and Design.
9. PN-EN 1992-1-1:2008, Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu - Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
10. Szwed A., Włodarczyk M., Analiza zginania belki żelbetowej w zakresie nieliniowym. Logistyka, grudzień 2010, str. 3419-3429.
11. Szwed A., Stany graniczne konstrukcji: Belka żelbetowa - analiza zginania. Materiały pomocnicze do wykładu „Stany graniczne konstrukcji”. W rękopisie, Warszawa 2014.
12. Wolfram Mathematica 9, <http://www.wolfram.com>.

ANALYSIS OF BENDING OF BEAMS REINFORCED WITH NON-METALLIC BARS

Abstract

Plane flexure of beams reinforced with non-metallic bars is discussed in the paper. Beam's response is divided into phases. In case of typical reinforcement ratios crushing of concrete is the determining limit capacity of beams, as a failure mode.

Autorzy:

dr inż. **Maria Włodarczyk** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Łądowej, Instytut Inżynierii Budowlanej, al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa, e-mail: maria.wlodarczyk@il.pw.edu.pl
inż. **Hubert Markowski** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Łądowej, Instytut Inżynierii Budowlanej, Koło Naukowe ŻEL-BETNIK, al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa, e-mail: h.markowski@il.pw.edu.pl