

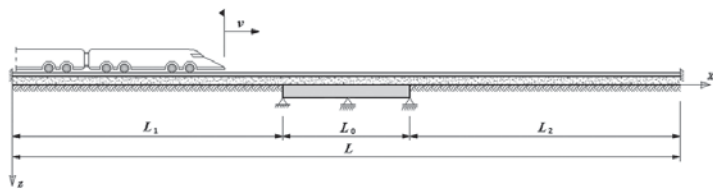
Danuta Bryja, Igor Gisterek, Ryszard Hołubowski

Stochastyczny model podsypki w analizie drgań toru kolejowego

Wybrane ośrodki badawczo-rozwojowe na świecie prowadzą badania mające na celu zwiększenie skuteczności modelowania zagadnień związanych z nawierzchnią i podtorzem kolejowym. Celem tych prac jest możliwie dobre przybliżenie wyników symulacji komputerowych do rezultatów pochodzących z badań laboratoryjnych i terenowych. Stosunkowo daleko posunięte uproszczenia w klasycznych modelach dynamicznych, gdzie cały układ pojazd–tor sprowadza się do trzech mas drgających, powodują bardzo znaczny rozrzut wyników w zależności od przyjętej metody i założonych wartości parametrów, co ogranicza ich przydatność do rozwiązywania konkretnych zagadnień.

Jedną z istotnych trudności w modelowaniu nawierzchni i podtorza jest ziarnisty charakter ośrodka gruntowego, który nie daje ująć się dobrym modelem ośrodka jednorodnego, zaś charakterystyka współpracy między poszczególnymi ziarnami determinuje szeroko pojętą nośność całego układu. W artykule przedstawiono alternatywne podejście do modelowania cech podsypki, jako ośrodka o losowo zmiennych parametrach. Zaproponowano stochastyczny model matematyczny opisujący sztywność i tłumienie podsypki oraz pokazano jego zastosowanie do oceny wpływu zmian sztywności podsypki na drgania toru położonego na moście kolejowym. Charakterystyki probabilistyczne drgań wyznaczono metodą Monte Carlo, przy czym do symulacji drgań wykorzystano efektywny algorytm obliczeniowy sformułowany przez autorów w pracy [1], w celu modelowania drgań mostów o dużych rozpiętościach na liniach kolei dużych prędkości. Algorytm jest oparty na metodzie elementów skończonych sformułowanej w ujęciu Galerkin, gdzie podsypka jest przedstawiana jako ciągłe, sprężysto-tłumiące podłoże. Model dynamiczny badanej konstrukcji, przedstawiony schematycznie na rysunku 1, składa się z trzech podsystemów:

- ciągłych szyn,
- ciągłej konstrukcji mostowej,
- zdyskretyzowanego pociągu.



Rys. 1. Schematyczny model toru kolejowego

Podstawową cechą zastosowanego algorytmu obliczeniowego jest połączenie ciągłego modelu podsypki kolejowej z podziałem na elementy skończone szyn i konstrukcji mostu. Algorytm pozwala na efektywną analizę losowych drgań za pomocą metody

Monte Carlo. Zagadnienie rozwiązywane jest jako płaskie, stąd do rozważań przyjmuje się jedynie drgania pionowe. Dla zamodelowania nieskończonych długości toru, do obliczeń włącza się, oprócz środkowego odcinka toru leżącego na obiekcie, dwa odcinki przyległe – przed i za przeprawą, położone na sztywnym podtorzu. Obiekt mostowy i szyny są traktowane jako ciągłe belki Eulera, połączone za pośrednictwem układu więzi sprężystych typu Winklera i wiskotycznych więzi tłumiących, tworzących razem sprężysto-tłumiące podłoże. Pociąg modelowany jest za pomocą mas punktowych, co prowadzi do pominięcia wzajemnych wpływów mostu i pojazdu. To uproszczenie zostało przyjęte celowo, aby zmniejszyć czas trwania procesu obliczeniowego na wstępnym (testowym) etapie badań. W dalszych badaniach będzie zastosowany bardziej szczegółowy model obciążenia ruchomego, uwzględniający własne stopnie swobody sztywnych mas modelujących pociąg, przykładowo jak w [2, 3]. Wyniki obliczeń dotyczą skrzynkowego mostu żelbetowego, jednoprzęsłowego o rozpiętości 30 m, obciążonego przejazdem pociągu typu Shinkansen, złożonego z 8 wagonów o długości 25 m każdy, nacisku osiowym wynoszącym 140 kN, rozstawie osi w wózkach 2,5 m oraz rozstawie czopów skrętu wynoszącym 17,5 m [4].

Losowy model podsypki kolejowej

Przyjęto, że sztywność i tłumienie podsypki są parametrami zmiennymi losowo wzdłuż długości toru kolejowego, a ich zmiany mają charakter niewielkich odchyśleń od stałych wartości średnich, oznaczonych odpowiednio przez \bar{k} i \bar{c} . Przy takich założeniach uzasadnione jest przedstawienie parametrów podsypki w następującej postaci:

$$k(x) = \bar{k} + \tilde{k}(x), \quad c(x) = \bar{c} + \tilde{c}(x) \quad (1)$$

czyli jako sumy stałej wartości średniej i funkcji losowej zmiennej przestrzennej x , która opisuje losową fluktuację o zerowej wartości oczekiwanej.

Ponieważ losowość właściwości podsypki zależy od wielu niepowiązanych ze sobą czynników, losowe fluktuacje $\tilde{k}(x)$ i $\tilde{c}(x)$ mogą być traktowane jako stacjonarne procesy Gaussa (centralne twierdzenie graniczne). W celu ułatwienia obliczeń są one traktowane jako wzajemnie niezależne. Ich funkcje gęstości widmowej powinny zostać uzyskane z badań eksperymentalnych. Przedstawiono alternatywne podejście, w którym funkcja gęstości widmowej jest otrzymywana z założonej *a priori* postaci funkcji korelacyjnej.

Rozpatrzmy stacjonarną fluktuację $\tilde{k}(x)$ sztywności podsypki. Jej funkcja autokorelacji $K_{\tilde{k}\tilde{k}}(x_1, x_2) = K_{\tilde{k}\tilde{k}}(x_1 - x_2) = K_{\tilde{k}\tilde{k}}(\delta)$ zależy wyłącznie od odległości $\delta = x_1 - x_2$ między dwoma punktami x_1 i x_2 na osi toru. Na podstawie twierdzenia Wienera-Chinczyzna [5], funkcję gęstości widmowej $S_{\tilde{k}\tilde{k}}(\omega)$ wyznacza się na podstawie funkcji autokorelacji za pomocą całkowej transformaty Fouriera, według zależności:

$$S_{\tilde{k}\tilde{k}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\tilde{k}\tilde{k}}(\delta) e^{-i\omega\delta} d\delta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\tilde{k}\tilde{k}}(\delta) \cos(\omega\delta) d\delta \quad (2)$$

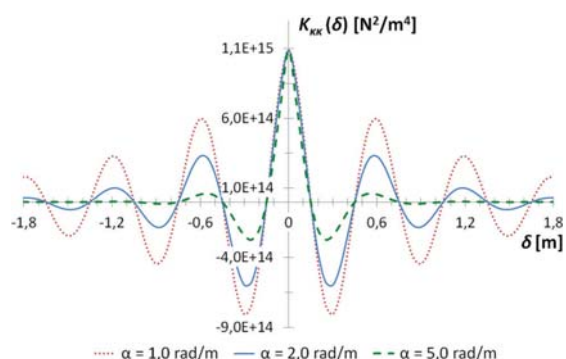
Przyjęto, że funkcja autokorelacji musi spełniać następujące założenia:

- a) powinna być malejąca, ponieważ korelacja sztywności podsyпки w dwóch punktach toru zanika ze zwiększeniem odległości δ ,
- b) stowarzyszona z nią funkcja gęstości widmowej powinna osiągać największe wartości w otoczeniu pewnej częstotliwości $\omega = \theta = 2\pi/T_\theta$ [rad/m], gdzie T_θ jest dominującą długością fali zmian sztywności.

Na podstawie tych założeń przyjęto następującą postać funkcji korelacji, zależną od dwóch parametrów α i θ :

$$K_{\tilde{k}\tilde{k}}(\delta) = \sigma_{\tilde{k}}^2 \exp(-\alpha |\delta|) \cos(\theta\delta) \quad (3)$$

gdzie $\sigma_{\tilde{k}}^2 = K_{\tilde{k}\tilde{k}}(0)$ jest znaną wariancją procesu $\tilde{k}(x)$. Założono ponadto, że największe i najczęstsze zmiany sztywności podsyпки są obserwowane w odstępach równym osiowemu rozstawowi podkładów, przyjęto zatem, że $T\theta = 0,6$ m, a stąd $\theta = 10\pi/3$. Na rysunku 2 pokazano przykładowe wykresy założonej funkcji korelacyjnej, odpowiadające danym: $\sigma_{\tilde{k}} = 0,3\bar{k}$, $\bar{k} = 1,1 \cdot 10^8$ N/m².



Rys. 2. Funkcja korelacyjna

Odpowiednia funkcja gęstości widmowej, wyprowadzona według zależności (2) po podstawieniu (3), ma postać

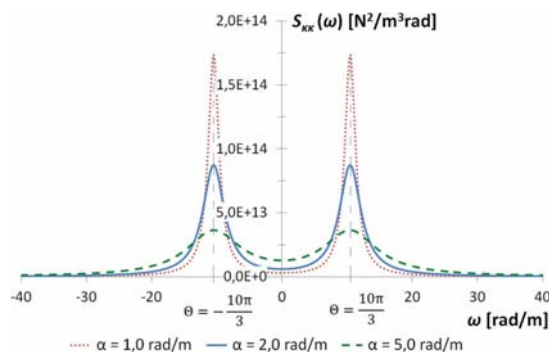
$$S_{\tilde{k}\tilde{k}}(\omega) = \frac{\sigma_{\tilde{k}}^2 \alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \omega^2 + \theta^2}{(\alpha^2 - \omega^2 + \theta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2} \quad (4)$$

Przykładowe wykresy funkcji pokazano na rysunku 3. Jak wynika z analizy wykresów przedstawionych na rysunkach 2 i 3, współczynnik α ma wpływ na wartość piku funkcji gęstości widmowej, ale przede wszystkim wpływa na szybkość zanikania korelacji. Im większa jest wartość współczynnika α , tym szybciej zanika korelacja (rys. 2), co oznacza, że proces zmian sztywności podsyпки staje się bardziej chaotyczny, a funkcja gęstości widmowej staje się bardziej płaska (rys. 3). W przypadku granicznym funkcja gęstości widmowej byłaby stała, co odpowiada procesowi najbardziej chaotycznemu, o korelacji typu „biały szum”.

Losowa zmienność charakterystyki tłumienia podsyпки kolejowej może być przedstawiona w analogiczny sposób.

Metoda Monte Carlo

Do wyznaczenia charakterystyk probabilistycznych drgań toru położonego na moście zastosowano metodę symulacyjną Monte Carlo. Symulację numeryczną stacjonarnego procesu Gaussa, opisującego zmiany sztywności podsyпки, przeprowadzono wy-



Rys. 3. Funkcja gęstości widmowej

korzystając znaną w literaturze reprezentację spektralną [5] o postaci

$$\tilde{k}(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N_\omega} \alpha_n \cos(\omega_n x + \varphi_n), \quad \alpha_n = \sqrt{2 S_{\tilde{k}\tilde{k}}(\omega_n) \Delta\omega} \quad (5)$$

analogiczną do tej, którą stosuje się powszechnie do aproksymacji losowych nierówności szyn [6, 7]. Kąty fazowe φ_n we wzorze (5) są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie równomiernym w przedziale od 0 do 2π , z gęstością $1/2\pi$. Amplitudy α_n oraz częstotliwości $\omega_n = \omega_j + (n - 0,5)\Delta\omega$ [rad/m] składowych harmonicznego szeregu (5) są powiązane z liczbą wyrazów szeregu N_ω , która dzieli przedział częstotliwości (ω_j, ω_j) na odcinki $\Delta\omega = (\omega_j - \omega_j)/N_\omega$, gdzie ω_j, ω_j określają dolną i górną granicę przedziału częstotliwości uznanego za istotny.

Każdej numerycznej symulacji procesu zmian sztywności podsyпки odpowiada konkretna realizacja drgań konstrukcji, spowodowanych przejazdem pociągu. Po wykonaniu N takich symulacji, związanych każdorazowo z numerycznym wyznaczeniem przebiegów drgań za pomocą opisanego we wstępie algorytmu obliczeniowego, otrzymuje się zbiór realizacji drgań losowych. Na podstawie zbioru realizacji oblicza się charakterystyki probabilistyczne drgań ze znanych wzorów

$$E[R(t)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i(t), \quad \text{Var}[R_i(t)] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i(t) - E[R(t)])^2 \quad (6)$$

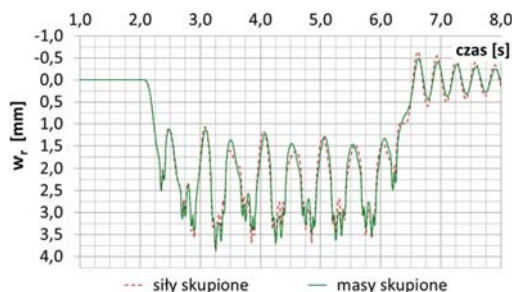
gdzie:

$E[R(t)]$ – wartość oczekiwana dowolnej odpowiedzi konstrukcji $R(t)$, a $\text{Var}[R(t)]$ jej wariancją w chwili t .

Przykład analizy drgań toru

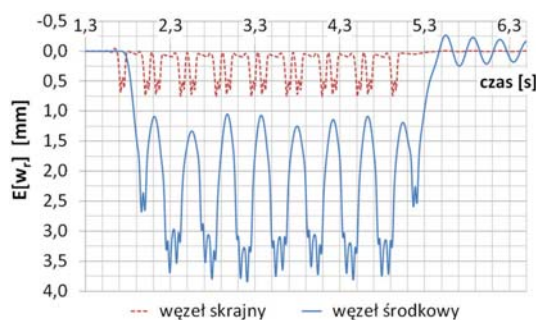
Na rysunku 4 przedstawiono przemieszczenia szyny, wygenerowane w środkowym węźle toru na moście, powstałe podczas przejazdu pociągu ze stałą prędkością $v = 50$ m/s. Skład pociągu modelowany jest jako układ sił skupionych i jako układ mas. Jak wynika z porównania wartości przemieszczeń konstrukcji, modele te mogą być stosowane zamiennie, wpływ inercji obciążenia składem pociągu na drgania toru jest bowiem nieznaczący.

Na tej podstawie do dalszych obliczeń wiążących się z wielokrotnymi, czasochłonnymi symulacjami zastosowano model obciążenia w postaci ruchomych sił skupionych. Na rysunkach 5 i 6 pokazano przebiegi wartości oczekiwanych i odchyłek standardowych drgań szyny w środkowym i lewym skrajnym węźle odcinka toru położonego na moście. Wyniki obliczeń otrzymano na podstawie 100 symulacji, przy założeniu, że współczynnik zmienności sztywności podsyпки wynosi 30% (tzn. że $\sigma_{\tilde{k}}/\bar{k} = 0,3$), współczynnik $\alpha = 2$, a prędkość przejazdu pociągu $v = 60$ m/s.

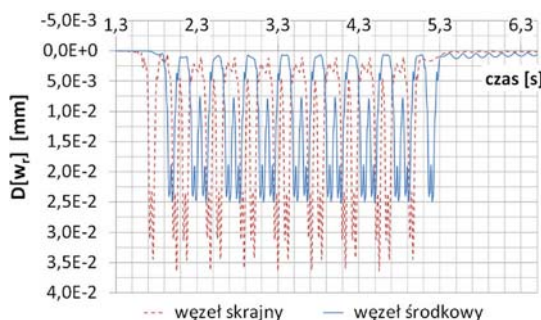


Rys. 4. Porównanie przebiegów drgań szyny spowodowanych przejazdem pociągu modelowanego jako układ sił skupionych i mas skupionych

Z przedstawionych wyników obliczeń wynika, że zmiany sztywności podsyпки zachodzące wzdłuż długości toru nie mają znaczącego wpływu na drgania szyn obserwowane podczas jednego przejazdu pociągu. Przy założonym, 30-procentowym poziomie średnich odchylen sztywności podsyпки od stałej wartości projektowej, odchylenia standardowe przemieszczeń dynamicznych szyny w środku rozpiętości toru nie przekraczają 0,025 mm, co stanowi tylko około 0,7% maksymalnej wartości średniej. Większy rozrzut wyników obserwuje się w węźle skrajnym toru, położonym nad podporą mostu. Maksymalne średnie przemieszczenia dynamiczne szyny w tym węźle są co prawda niewielkie – wynoszą około 0,75 mm, ale ich rozrzut mierzony odchyleniem standardowym sięga 0,035 mm, czyli jest rzędu 5% maksymalnej wartości średniej.



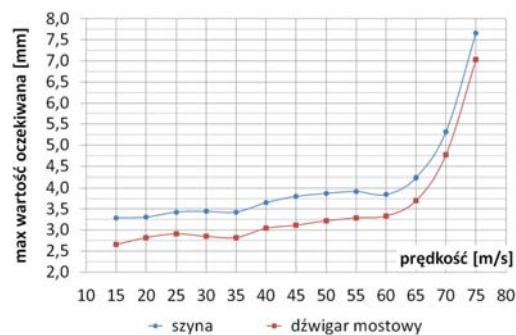
Rys. 5. Wartości oczekiwane przemieszczeń dynamicznych szyny



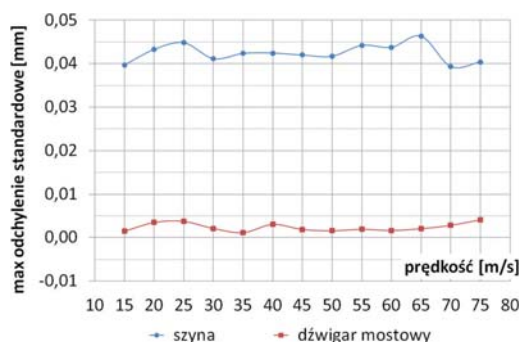
Rys. 6. Odchylenie standardowe przemieszczeń dynamicznych szyny

Na rysunkach 7 i 8 pokazano wpływ prędkości przejazdu pociągu na maksymalne wartości oczekiwane i odchylenia standardowe ugięć dynamicznych szyny i dźwigara mostowego w środku jego rozpiętości. Badane wartości maksymalne wybrano z przebiegów czasowych wygenerowanych przy prędkościach przejazdu pociągu zmieniających się od 15 do 75 m/s, co 5 m/s, każdorazowo na podstawie zbioru 100 symulacji drgań. Ugięcia szyny i dźwigara zaczynają zwiększać się zauważalnie przy prędkościach ruchu pociągu większych od 35 m/s (126 km/h). Duży wpływ

prędkości obserwuje się powyżej 60 m/s (216 km/h). Maksymalne wartości oczekiwane ugięć szyny przy prędkości 75 m/s (270 km/h) są już dwukrotnie większe niż wyznaczone przy prędkości 60 m/s (216 km/h). Prędkość ruchu pociągu nie wpływa znacząco na odchylenia standardowe przemieszczeń, spowodowane zmiennością sztywności podsyпки.



Rys. 7. Zależność maksymalnej wartości oczekiwanej od prędkości pociągu



Rys. 8. Zależność maksymalnego odchylenia standardowego od prędkości pociągu

Podsumowanie

W pracy zaproponowano efektywny sposób analizy wpływu losowej zmienności cech podsyпки kolejowej na drgania szyn spowodowanych przejazdem pociągu. Podstawowymi badanymi parametrami były sztywność i charakterystyka tłumienia tłuczni. Zastosowano model stochastyczny, w którym podsyпка jest przedstawiona jako podłoże sprężysto-tłumiące, którego sztywność i tłumienie oscylują losowo wokół stałej wartości średniej, przy czym zmiany parametrów zachodzą wzdłuż osi toru.

Do istotnych obserwacji należy fakt, że nawet przy stosunkowo dużych wartościach współczynnika opisującego zmienność sztywności podsyпки, średni rozrzut (odchylenie standardowe) ugięć dynamicznych szyny jest niewielki – o dwa rzędy mniejszy od wartości oczekiwanych. Wynika z tego wniosek, że przy obserwacjach pojedynczych przejazdów pociągu wpływ zmian sztywności podsyпки na drgania szyn jest bardzo mały i jak pokazano – nie zależy od prędkości ruchu pociągu. Należy jednocześnie podkreślić, że opisywany model nie uwzględnia zmian parametrów podsyпки w czasie, w tym kumulacji osiadań, jakie występują w rzeczywistym, eksploatowanym torze. Stanowi jednak dobry punkt wyjścia do dalszych badań, w których przewidywane jest opracowanie stochastycznego modelu kumulacyjnego, który będzie przybliżał rzeczywistość w stopniu znacznie dokładniejszym, niż dotychczas stosowane modele deterministyczne.



Dokończenie na s. 59 >