

Wacław SZCZEŚNIAK, Magdalena ATAMAN

DRGANIA BELKI EULERA Z DUŻĄ SIŁĄ OSIOWĄ, SPOCZYWAJĄCEJ NA PODŁOŻU WINKLERA, OBCIĄŻONEJ IMPULSEM SIŁY

Streszczenie

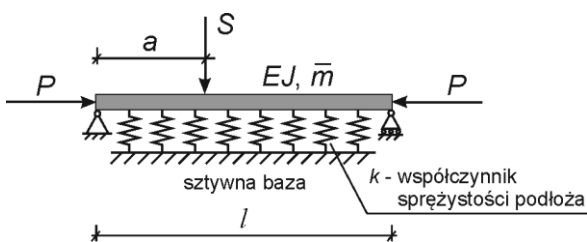
W pracy podano rozwiązanie analityczne zadania sprężystej belki Bernoulliego-Eulera z dużą siłą osiową, spoczywającej na podłożu Winklera, obciążonej impulsem siły. Rozwiązanie analityczne podano w postaci nieskończonego szeregu funkcji własnej zadania brzegowego. W przykładzie obliczeniowym przeanalizowano wpływ siły osiowej na ugięcia belki wymuszone impulsem siły. Wyniki obliczeń przedstawiono w formie graficznej. Wykresy ugięć belki podano w postaci bezwymiarowej. Na podstawie wykresów można stwierdzić, że przemieszczenia spowodowane obciążeniami impulsowymi w belkach mają falowy charakter. Rozwiązane zadanie ma zastosowanie praktyczne w dynamice konstrukcji inżynierskich, na przykład przy uderzeniu koła o szynę kolejową, a także w przypadku nawierzchni drogowych i lotniskowych, gdzie obciążenia impulsowe mają znaczący wpływ na trwałość nawierzchni, a także na komfort pasażerów.

WSTĘP

Obciążenia udarowe i impulsowe były przedmiotem analiz już w okresie początkowym mechaniki teoretycznej i technicznej. Zadania rozwiązywano klasyczną teorią uderzenia i rachunku impulsów sił, która bazuje na zasadniczych prawach i zasadach mechaniki, takich jak prawo zachowania pędu, momentu pędu oraz na definicji współczynnika restytucji Newtona. W teorii klasycznej wyróżnia się trzy typy zderzenia: sprężyste, plastyczne i sprężysto-plastyczne [21-23], [28]. Inne teorie, np. Hertza i teoria falowa poszerzyły grupę zadań mechaniki stosowanej możliwych do rozwiązania. Pomimo licznych opracowań dotyczących uderzenia, m.in. [12-28], niewiele prac w literaturze przedmiotu dotyczy belek na podłożach odkształcalnych obciążonych impulsami sił, np. [1-3]. Zagadnienie stateczności belek spoczywających na podłożu ma istotne znaczenie w nawierzchniach kolejowych i było przedmiotem rozważań wielu autorów, np. w pracach [4-11]. Natomiast niewielka liczba opracowań obejmuje zagadnienia belek na podłożu z dużą siłą osiową pod obciążeniem udarowym, chociaż zadanie to ma zastosowanie praktyczne, na przykład przy uderzeniu koła o szynę kolejową. W niniejszej pracy rozwiązano zadanie belki z dużą siłą osiową, spoczywającej na podłożu Winklera, obciążonej impulsem siły.

1. SFORMUŁOWANIE I ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE ZADANIA

W niniejszym opracowaniu przedstawimy analityczne rozwiązanie zadania belki sprężystej swobodnie podpartej, z dużą siłą osiową P , leżącej na podłożu sprężystym Winklera i obciążonej impulsem siły S (rysunek 1).



Rys. 1. Schemat dynamiczny analizowanego zadania, belka na podłożu Winklera z dużą siłą osiową obciążona impulsem

2. WYZNACZENIE SIŁY KRYTYCZNEJ W BELCE NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM WINKLERA

Równanie różniczkowe ruchu określające przemieszczenie pionowe sprężystej belki swobodnie podpartej na końcach zapisujemy w następujący sposób:

$$EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + kw(x,t) = q(x,t). \quad (1)$$

W przypadku zagadnienia własnego stateczności dynamicznej równanie (1) uprościmy do jednorodnego równania statycznego z dużą siłą osiową w postaci:

$$EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + kw(x,t) = 0. \quad (2)$$

Zakładając rozwiązanie równania jednorodnego w postaci szeregu funkcji własnych i ruchu harmonicznego drgań własnych mamy:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{i\omega_n t}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l},$$

$$EJ \frac{d^4 W_n}{dx^4} + P \frac{d^2 W_n}{dx^2} - (\bar{m} \omega_n^2 - k) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega_n^2 = \frac{1}{\bar{m}} \left(\frac{n^4 \pi^4}{l^4} EJ - P \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + k \right),$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{\bar{m}} (\alpha_n^4 EJ - P \alpha_n^2 + k).$$

Częstość kołowa drgań własnych będzie równa zero, gdy duża siła osiowa P osiągnie minimum właściwe i stanie się siłą krytyczną powodującą wyboczenie belki. Mamy zatem:

$$\alpha_n^4 - \frac{P}{EJ} \alpha_n^2 + \frac{k}{EJ} = 0,$$

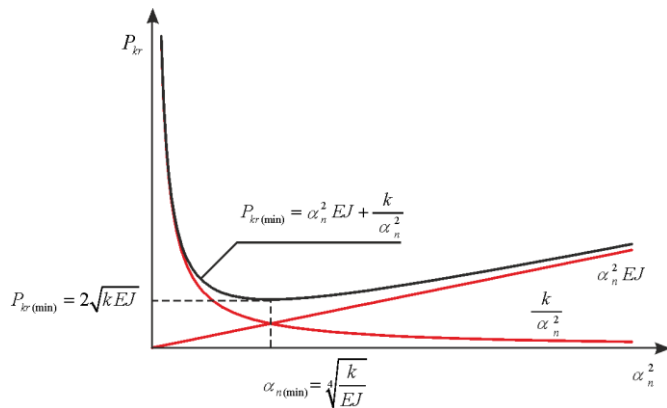
$$P = EJ \alpha_n^2 + \frac{k}{\alpha_n^2}, \quad (4)$$

$$\frac{dP}{d\alpha_n} = 0 \rightarrow \alpha_n = \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}, \quad \alpha_n^2 = \sqrt{\frac{k}{EJ}}.$$

Wstawiając teraz ostatni ze wzorów (4) do (4)₂ otrzymujemy wzór na minimalną wyoboczeniową siłę krytyczną P_{kr} .

$$P_{kr} = EJ \alpha_n^2 + \frac{k}{\alpha_n^2} = EJ \sqrt{\frac{k}{EJ}} + \frac{k}{\sqrt{\frac{k}{EJ}}} = 2\sqrt{kEJ}. \quad (5)$$

Ze wzoru (5) wynika, że w przypadku belki na podłożu sprężystym Winklera siła krytyczna wyoboczenia nie zależy od długości belki i jest taka sama zarówno w przypadkach belek o skończonej długości jak w belkach o nieskończonej długości. Na rysunku 2 pokazano wykres zależności siły osiowej P w funkcji α_n^2 .



Rys. 2. Zależność dużej siły osiowej P od współczynnika α_n^2

3. IMPULS SIŁY NA BELCE

Dynamiczne, impulsowe obciążenie belki przyjmujemy w następujący sposób:

$$q(x, t) = S \delta(x - x_0, t - t_0) = S \delta(x - x_0) \delta(t - t_0). \quad (6)$$

Będziemy poszukiwali rozwiązania analitycznego spełniającego warunki brzegowe przegubowego podparcia belki na końcach. Rozwiązanie zadania przyjmujemy w postaci pojedynczego szeregu funkcji własnej:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (7)$$

gdzie l jest rozpiętością belki.

Delta-funkcję Diraca rozłożymy w pojedynczy szereg sinusowy Fouriera

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8)$$

Stosując do rozwiązania zadania metodę rozdzielonych zmiennych Fouriera otrzymujemy liniowe niejednorodne równanie różniczkowe na wyznaczenie nieznanych funkcji $f_n(t)$

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = \frac{2S}{ml} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \delta(t - t_0), \quad (9)$$

gdzie $\omega_n^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{n^4 \pi^4}{l^4} EJ - P \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + k \right)$ jest kwadratem częstości kołowej drgań własnych belki na podłożu sprężystym Winklera o współczynniku podłoża równym k , z dużą siłą osiową P .

Rozwiązaniem analitycznym równania (9) jest funkcja:

$$f_n(t) = [H(t - t_0) - H(-t_0)] \frac{2S}{ml \omega_n} \times \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \omega_n(t - t_0), \quad (10)$$

gdzie $H(t - t_0)$ jest funkcją Heaviside'a.

Końcowe rozwiązanie zadania sprowadza się zatem do wstawienia (10) do (7), w wyniku czego otrzymujemy:

$$w(x, t) = H(t - t_0) \frac{2S}{ml} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \omega_n(t - t_0). \quad (11)$$

Wyprowadzone wzory opisują belkę obciążoną dużą siłą ścisnąjącą. W przypadku dużej osiowej siły rozciągającej w równaniu ruchu (1) należy zmienić znak na minus w drugim składniku (przed siłą P).

4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

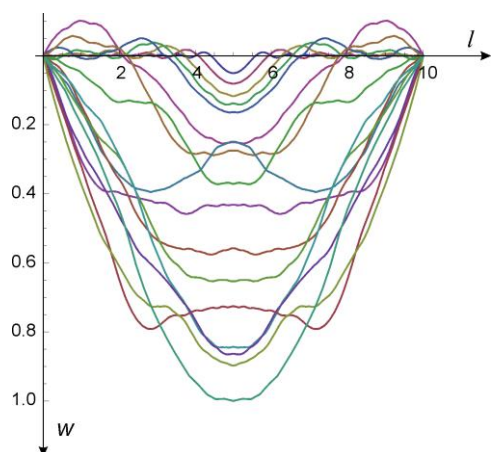
Otrzymane w poprzednim punkcie pracy analityczne rozwiązanie zadania zaprogramowano w pakiecie Mathematica, co pozwoliło wykonać szereg wykresów ugięć belki z dużą siłą osiową obciążonej dodatkowo impulsem siły. Analizowano zarówno siłę osiową ścisnąjącą jak i rozciągającą.

Można zauważyć, że parametry opisujące dużą siłę osiową i podłoże Winklera mieszczą się jedynie we wzorze na częstość kołową drgań własnych belki.

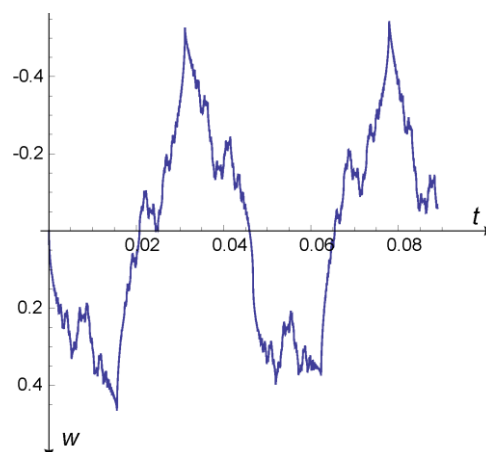
W rozwiązaniu uwzględniono 1111 wyrazów szeregu. Wykresy ugięć belki przedstawiono w postaci bezwymiarowej zgodnie z następującym wzorem:

$$w_b(x, t) = w(x, t) \frac{\pi^2 \sqrt{mEJ}}{2Sl}. \quad (12)$$

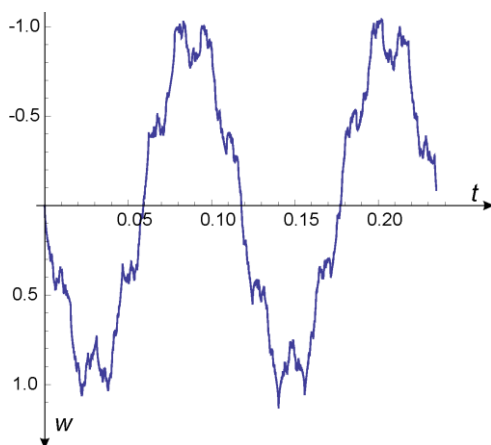
W przykładzie obliczeniowym analizowano swobodnie podpartą belkę sprężystą Bernoulliego-Eulera o rozpiętości $l = 10$ m i przekroju prostokątnym $a \times b = 0,25 \times 0,47$ m. Przyjęty do obliczeń moduł sprężystości belki $E = 34$ GPa. W obliczeniach przyjmowano różne wartości współczynnika sprężystości podłoża oraz różne wartości siły osiowej ścisnąjącej i rozciągającej.



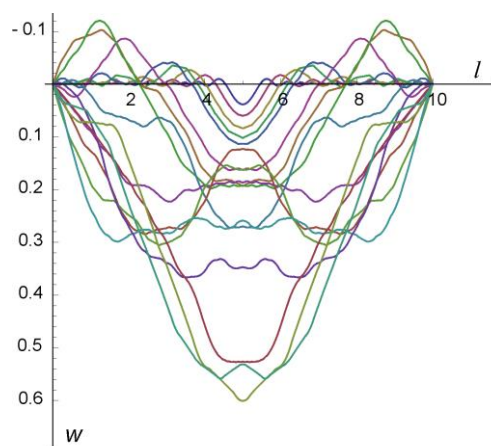
Rys. 3. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001 T_1$ do $0,25 T_1$, przy obciążeniu impulsem w środku przęsła, $k = 10^7 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = 0,9 P_{kr}$



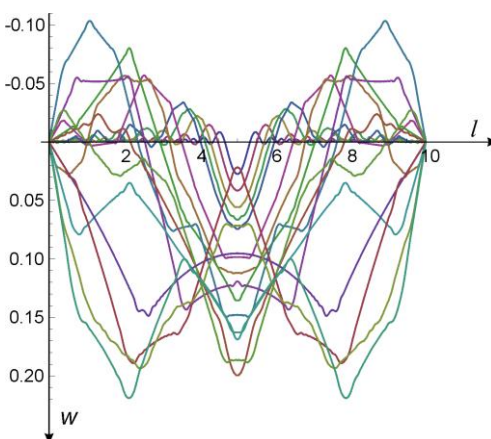
Rys. 6. Wykres ugięcia środka belki w czasie przy $k = 10^7 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = -0,9 P_{kr}$ (rozciąganie)



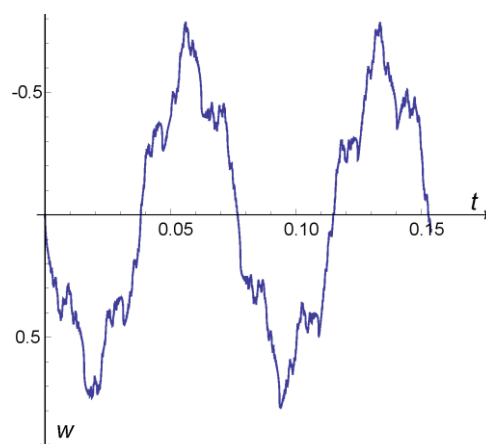
Rys. 4. Wykres ugięcia środka belki w czasie przy $k = 10^7 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = 0,9 P_{kr}$



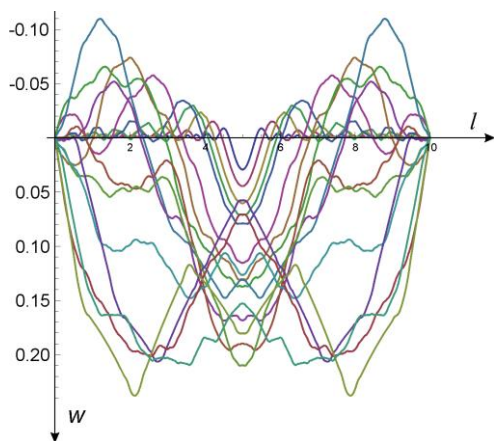
Rys. 7. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001 T_1$ do $0,25 T_1$, przy obciążeniu impulsem w środku przęsła, $k = 10^7 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = 0,5 P_{kr}$



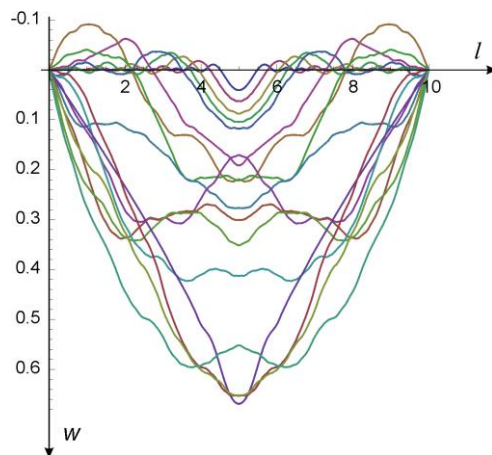
Rys. 5. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001 T_1$ do $0,25 T_1$, przy obciążeniu impulsem w środku przęsła, $k = 10^7 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = -0,9 P_{kr}$ (rozciąganie)



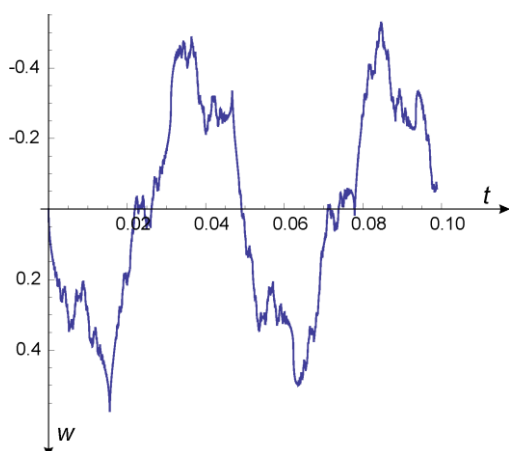
Rys. 8. Wykres ugięcia środka belki w czasie przy $k = 10^7 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = 0,5 P_{kr}$



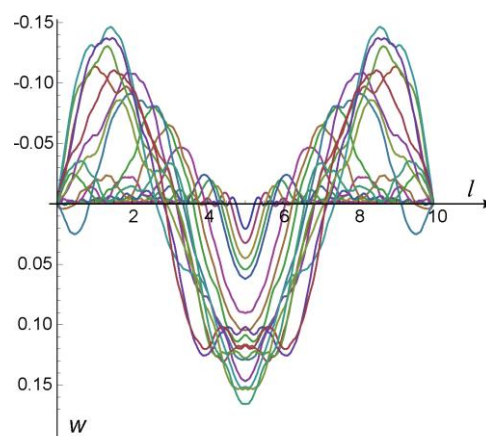
Rys. 9. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001T_1$ do $0,25T_1$, przy obciążeniu impulsowym w środku przęsła, $k = 10^7 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = -0,5P_{kr}$ (rozciąganie)



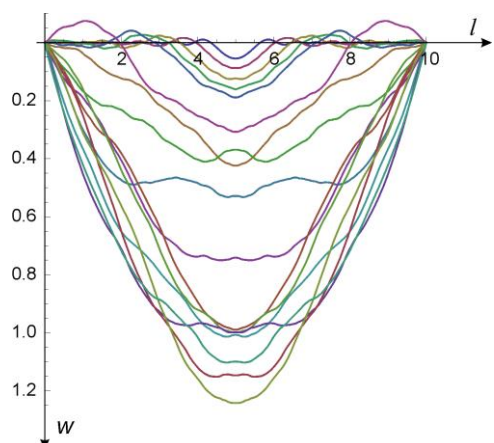
Rys. 12. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001T_1$ do $0,25T_1$, przy obciążeniu impulsowym w środku przęsła, $k = 10^6 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = -0,5P_{kr}$ (rozciąganie)



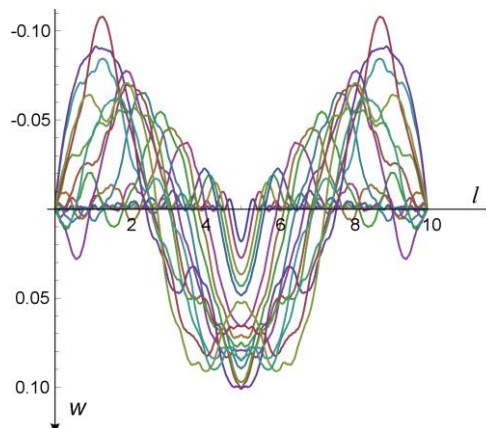
Rys. 10. Wykres ugięcia środka belki w czasie przy $k = 10^7 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = -0,5P_{kr}$ (rozciąganie)



Rys. 13. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001T_1$ do $0,25T_1$, przy obciążeniu impulsowym w środku przęsła, $k = 10^8 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = 0,5P_{kr}$



Rys. 11. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001T_1$ do $0,25T_1$, przy obciążeniu impulsowym w środku przęsła, $k = 10^6 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = 0,5P_{kr}$



Rys. 14. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001T_1$ do $0,25T_1$, przy obciążeniu impulsowym w środku przęsła, $k = 10^8 \cdot 0,25 \text{ N/m}^2$, $P = -0,5P_{kr}$ (rozciąganie)

PODSUMOWANIE

Na podstawie przedstawionej analizy można określić jakościowo i ilościowo wpływ dużej siły osiowej, zarówno ściskającej jak i rozciągającej, w belce na podłożu Winklera na charakter ugięć, odkształceń i naprężeń. Rozwiązanie zadania ma charakter falowy, pomimo, że równanie ruchu jest paraboliczne, a nie hiperboliczne. Uzyskane rozwiązanie opisuje dość wolno zbieżny szereg typu

$\sum \frac{1}{n^2}$. Dodatkowo można wykazać, że charakter wykresu ugięć belki silnie zależy od miejsca przyłożenia impulsu [1-4].

BIBLIOGRAFIA

1. Szcześniak W., Ataman M., *Drgania belki Eulera na inercyjnym podłożu Własowa-Leontiewa pod wpływem impulsu siły*, Autobusy (praca w druku).
2. Ataman M., Szcześniak W., *Drgania płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa wymuszone impulsem siły*, Autobusy (praca w druku).
3. Ataman M., Szcześniak W., *Analiza ugięć płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa pod impulsem siły*, Autobusy (praca w druku).
4. Ataman M., Szcześniak W., *Duże siły osiowe w belkach na dwuparametrowym podłożu o zmiennych współczynnikach*, Logistyka 6/2014, str. 1523-1528.
5. Newland D.E., *Instability of an elastically supported beam under a travelling inertial load*, J. Mech. Eng. Sci. Vol. 12, No 5. 1970, pp. 373-374.
6. Timoshenko S.P., *Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail*, Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics, Zurich Switzerland, 1926, pp. 407-418.
7. Bogacz R., Popp K., *Dynamics and stability of train-track systems*, Proc. of 2nd Int. Conf. on Rec. Adv. Struct. Dyn. Southampton 1984, pp. 709-721.
8. Kerr A.D., *A model study of vertical track buckling*, High Speed Ground Transportation Journal, 1973, Vol. 7, No 3, pp. 251-368.
9. Kerr A.D., *On the stability of the railroad track in the vertical plan*, Rail International, Feb. 1974, pp. 132-142.
10. Herr A.D., *The stress and stability analysis of railroad tracks*, J. Appl. Mech., Vol. 41, 1974, pp. 841-848.
11. Szcześniak W., *Wybrane zagadnienia kolejowe*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo z. 129, OWPW, Warszawa 1995.
12. Crede S.E., *The effect of pulse shape on simple systems under impulsive loading*, Trans. ASME, 77, 1955, pp. 957-961.
13. Goldsmith W.: *Impact*, Edward Arnold, London 1960.
14. Gryboś R., *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem udarowym*, PWN, Warszawa. 1980.
15. Hertz H., *Über die Berührung fester elastischer Körper*, Crell'es Jour. Bd. 92 1881.
16. Hertz H., *Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte*, Gesammelte Werke. Bd. 1 Leipzig 1895.
17. Jemielita G., Kozyra Z.: *Niesprężyste uderzenie w belkę Bernoulli'ego*, Theoretical Foundations of Civil Engineering. Vol. 17, 2009, pp. 127-132.
18. Johnson W., *Impact strength of materials*, Edward Arnold, London 1972.
19. Kozyra Z., *Drgania belek i płyt wywołane uderzeniami*, OWPW, Warszawa 2010.
20. Stronge W.J., *Impact mechanics*, Cambridge University Press 2000.
21. Szcześniak W., Ataman M., Kozyra Z., *O uderzeniu plastycznym układu czterech prętów przegubowych w sztywne podłoże*, Theoretical Foundations of Civil Engineering. Vol. 12, t. 1, 2004, pp. 399-408.
22. Szcześniak W., Ataman M., *Selected problems of the classic theory of impact*, Logistyka 6/2010, pp. 3305-3310.
23. Szcześniak W. Ataman M., *Particular cases of problems of the classic theory of impact*, Logistyka Nr 6/2010, pp. 3311-3318.
24. Szcześniak W., *Obciążenie impulsowe na belkach*, Theoretical Foundations of Civil Engineering Vol. 5, 1997, pp. 377- 385.
25. Bagreejew W.W., *K rasczotu izgibajuszczego udara po bezkonniecznym bałkam i płytam na uprugom osnowanii*, Mechanika twirdogo tiela, 1, 1966.
26. Batujew G.S. i inni, *Inżynieryjne metody issledowanija udara*, Moskwa, Maszynostrojenije 1969.
27. Panowko Ja. G., *Wwiedienije w teorju miechaniczeskogo udara*, Nauka, Moskwa 1977.
28. Morozow S.J., *Soudarenije tiel. Kłasiczeskaja teoria udara*, cz. 1. Archangielsk 2001.

VIBRATIONS OF EULER BEAM WITH LARGE AXIAL FORCE RESTING ON THE WINKLER FOUNDATION, SUBJECTED TO THE IMPULSE OF FORCE

Abstract

In the paper, analytical solution of the problem of the elastic Bernoulli-Euler beam resting on the Winkler foundation, under impulse load is presented. Analytical solution is given in the form of an infinite series of eigenfunctions of the boundary problem. Solution of the problem is presented graphically in the Figures. Deflections of the beam are presented in dimensionless form. From the graphs, it can be concluded that the displacement of the beam due to the impulse loads have a wave character. Solved problem has practical application in the dynamics of engineering structures, such as the impact of a wheel with a rail, and in the case of the road and airport pavements, where the impulse load has a significant impact on the durability of the pavement, as well as on the comfort of passengers.

Autorzy:

prof. dr hab. inż. **Wacław Szcześniak** – Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury

dr inż. **Magdalena Ataman** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej