

Dariusz KUSIAK*, Tomasz SZCZEGIELNIAK*, Zygmunt PIĄTEK*

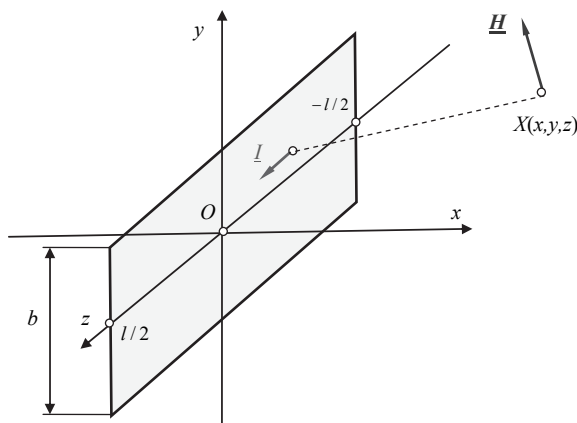
WIZUALIZACJA POLA MAGNETYCZNEGO PRZEWODU TAŚMOWEGO O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI

Posługując się metodą analityczną bazującą na prawach Biota-Savarta dla pola elektromagnetycznego wyznaczono rozkład pola magnetycznego przewodu taśmowego o skończonej długości. Wykorzystano program *Mathematica* do wizualizacji otrzymanych rozwiązań. Umożliwiło to szybką analizę pola po zmianach parametrów geometrycznych lub elektrycznych rozpatrywanych układów.

SŁOWA KLUCZOWE: pole magnetyczne, prostokątny przewód taśmowy, metoda analityczna.

1. WPROWADZENIE – POLE MAGNETYCZNE PRZEWODU TAŚMOWEGO

W przypadku przewodu taśmowego o długości l (rys. 1), tzn. przewodu o przekroju prostokątnym, dla którego $b \gg a$, pole magnetyczne generowane przez prąd stały lub wolnozmienny prąd sinusoidalny I w dowolnym punkcie $X(x,y,z)$ wyznacza się dużo łatwiej niż w przypadku szyny prostokątnej [1-4], gdyż wynik uzyskuje się w wyniku jednokrotnego całkowania [5, 6].



Rys. 1. Przewód taśmowy o skończonej długości

* Politechnika Częstochowska

Jeśli jednak dysponujemy już rozwiązaniami z prac [7-9], to stąd można wyznaczyć składowe pola magnetyczne poprzez wyznaczenie granic tych funkcji przy wymiarze poprzecznym przewodu szynowego $a \rightarrow 0$. Składowa natężenia pola magnetycznego wzdłuż osi Ox ma wówczas postać

$$\underline{H}_x^{(t)}(x, y, z) = \lim_{a \rightarrow 0} \underline{H}_x(x, y, z) = \frac{I}{8\pi b} \left\{ \begin{aligned} & 2 \ln \frac{2z - l + F_1(x, y, z)}{2z - l + F_2(x, y, z)} + \\ & \ln \frac{F_2(x, y, z)(l - 2z) + 8lz + (l + 2z)F_3(x, y, z)}{F_1(x, y, z)(l - 2z) + 8lz + (l + 2z)F_4(x, y, z)} + \\ & \ln \frac{-F_2(x, y, z)(l - 2z) + 8lz + (l + 2z)F_3(x, y, z)}{-F_1(x, y, z)(l - 2z) + 8lz + (l + 2z)F_4(x, y, z)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

a składowa natężenia pola magnetycznego wzdłuż osi Oy ma postać

$$\underline{H}_y^{(t)}(x, y, z) = \lim_{a \rightarrow 0} \underline{H}_y(x, y, z) = \frac{I}{4\pi b} \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{arctg} \frac{(b - 2y)(l - 2z)}{2xF_1(x, y, z)} + \operatorname{arctg} \frac{(b + 2y)(l - 2z)}{2xF_2(x, y, z)} + \\ & \operatorname{arctg} \frac{(b - 2y)(l + 2z)}{2xF_4(x, y, z)} + \operatorname{arctg} \frac{(b + 2y)(l + 2z)}{2xF_3(x, y, z)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

gdzie:

$$F_1(x, y, z) = \sqrt{4x^2 + (b - 2y)^2 + (l - 2z)^2},$$

$$F_2(x, y, z) = \sqrt{4x^2 + (b + 2y)^2 + (l - 2z)^2},$$

$$F_3(x, y, z) = \sqrt{4x^2 + (b + 2y)^2 + (l + 2z)^2},$$

$$F_4(x, y, z) = \sqrt{4x^2 + (b - 2y)^2 + (l + 2z)^2}.$$

W szczególnym przypadku położenia punktu $X(x, y, z)$ na płaszczyźnie xOy , tzn. dla $z = 0$, składowe te wyrażają się następującymi wzorami:

$$\underline{H}_{x0}^{(t)}(x, y) = \underline{H}_x^{(t)}(x, y, z = 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \underline{H}_x^{(t)}(x, y, z) = \frac{I}{4\pi b} \left\{ \begin{aligned} & \ln \frac{l - \sqrt{4x^2 + (b - 2y)^2 + l^2}}{l + \sqrt{4x^2 + (b - 2y)^2 + l^2}} + \ln \frac{l + \sqrt{4x^2 + (b + 2y)^2 + l^2}}{l - \sqrt{4x^2 + (b + 2y)^2 + l^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

oraz

$$\begin{aligned} \underline{H}_{y0}^{(t)}(x, y) = \underline{H}_y^{(t)}(x, y, z=0) = \text{Limit}_{z \rightarrow 0} \underline{H}_y^{(t)}(x, y, z) = \\ \frac{I}{2\pi b} \left\{ \arctg \frac{l(b-2y)}{2x\sqrt{4x^2 + (b-2y)^2 + l^2}} + \arctg \frac{l(b+2y)}{2x\sqrt{4x^2 + (b+2y)^2 + l^2}} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Ponad to, na osi Ox składowe te przyjmują postać

$$\underline{H}_{x0x}^{(t)}(x) = \underline{H}_{x0}^{(t)}(x, y=0) = \text{Limit}_{y \rightarrow 0} \underline{H}_{x0}^{(t)}(x, y) = 0 \quad (5)$$

oraz

$$\underline{H}_{y0x}^{(t)}(x) = \underline{H}_{y0}^{(t)}(x, y=0) = \text{Limit}_{y \rightarrow 0} \underline{H}_{y0}^{(t)}(x, y) = -\frac{I}{\pi b} \arctg \frac{lb}{2x\sqrt{4x^2 + b^2 + l^2}} \quad (6)$$

W przypadku punktu $X(x, y, z)$ leżącego na osi Oy , składowe pola magnetycznego mają postać:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{x0y}^{(t)}(y) = \underline{H}_{x0}^{(t)}(x=0, y) = \text{Limit}_{x \rightarrow 0} \underline{H}_{x0}^{(t)}(x, y) = \\ \frac{I}{4\pi b} \left\{ \ln \frac{l - \sqrt{(b-2y)^2 + l^2}}{l + \sqrt{(b-2y)^2 + l^2}} + \ln \frac{l + \sqrt{(b+2y)^2 + l^2}}{l - \sqrt{(b+2y)^2 + l^2}} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

oraz

$$\underline{H}_{y0y}^{(t)}(y) = \underline{H}_{y0}^{(t)}(x=0, y) = \text{Limit}_{x \rightarrow 0} \underline{H}_{y0}^{(t)}(x, y) = 0 \quad (8)$$

Rozkład modułu pola magnetycznego szynoprzewodu taśmowego o skończonej długości na płaszczyźnie xOy przedstawiamy na rysunku 2, przy czym pole to jest wyrażone w jednostkach względnych jako funkcja dana wzorem

$$h^{(t)}(x, y, z) = \frac{H^{(t)}(x, y, z)}{H_0^{(t)}} \quad (9)$$

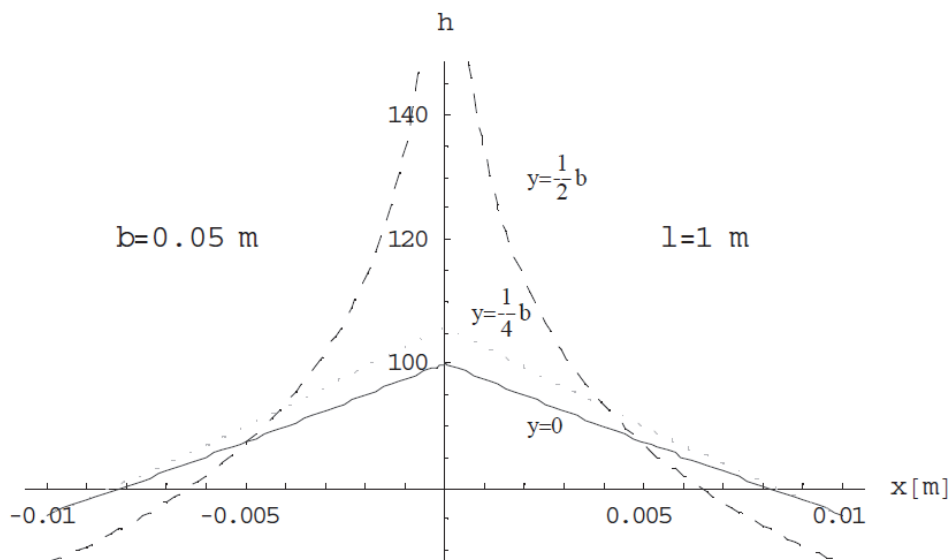
gdzie moduł natężenia pola magnetycznego [10]

$$H^{(t)}(x, y, z) = \sqrt{[H_x^{(t)}(x, y, z)]^2 + [H_y^{(t)}(x, y, z)]^2} \quad (10)$$

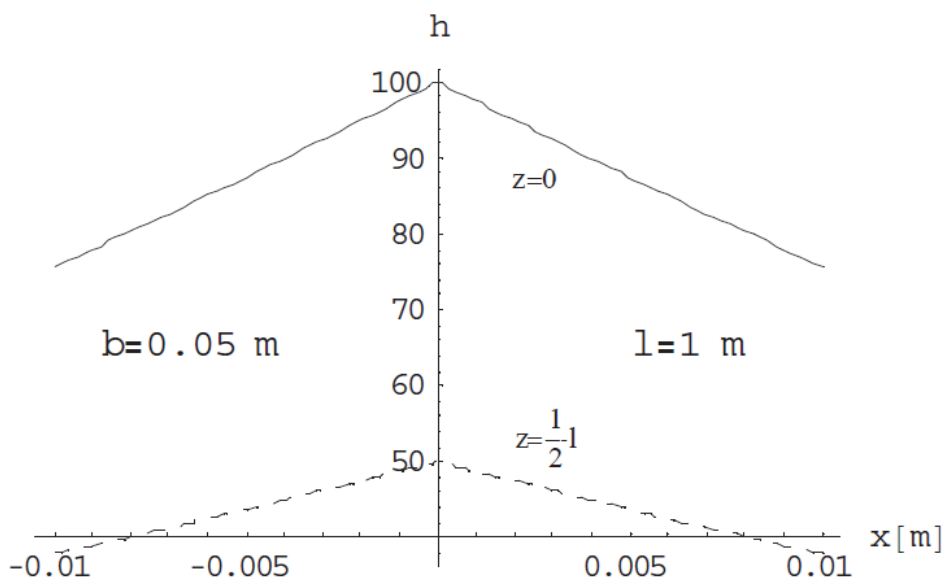
a natężenie odniesienia

$$H_0^{(t)} = \frac{I}{2b} \quad (11)$$

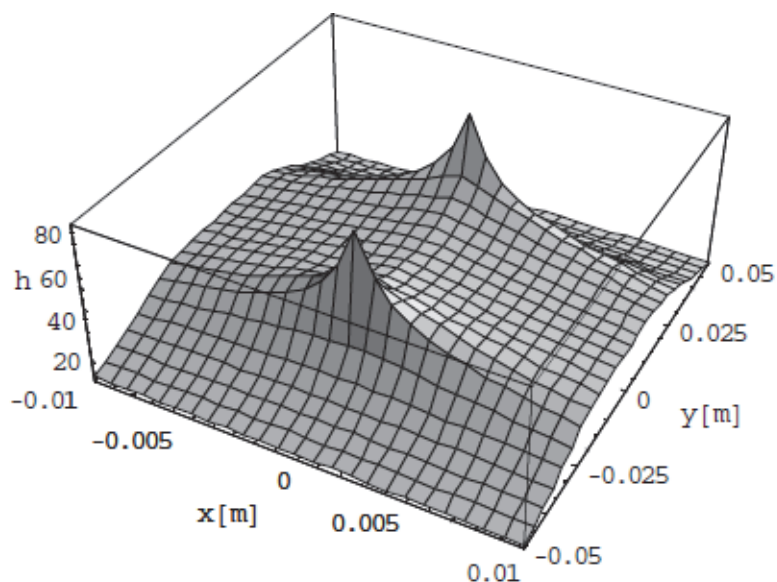
Wpływ długości przewodu na rozkład pola magnetycznego ilustrują rysunki 3 i 4 [11].



Rys. 2. Rozkład modułu pola magnetycznego na płaszczyźnie xOy taśmowego przewodu szynowego o skończonej długości



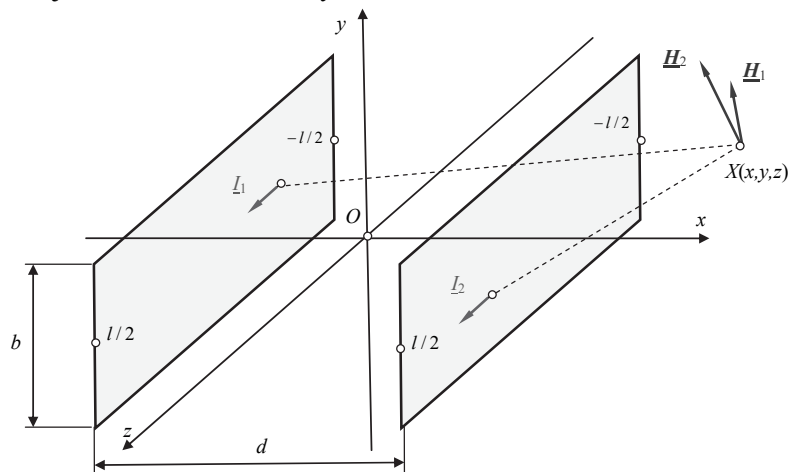
Rys. 3. Rozkład modułu pola magnetycznego na płaszczyznach $z = \text{const.}$ taśmowego przewodu szynowego o skończonej długości



Rys. 4. Rozkład przestrzenny modułu pola magnetycznego na płaszczyźnie $z = l/2$ taśmowego przewodu szynowego o skończonej długości; $l = 1\text{ m}$, $b = 0.05\text{ m}$

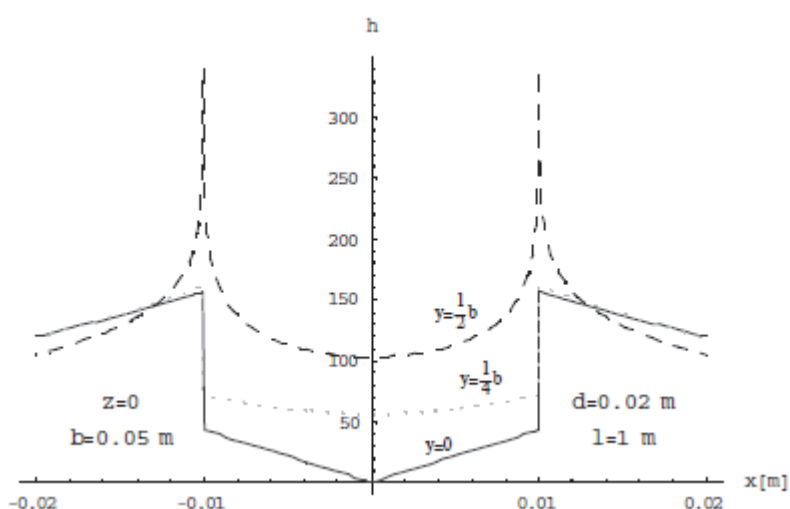
2. POLE MAGNETYCZNE LINII O DWÓCH PRZEWODACH TAŚMOWYCH O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI

Zakładamy, że w linii o przewodach taśmowych o wymiarach $b \times l$ i odległości d między nimi (rys. 5) jest stały lub wolnozmienny prąd sinusoidalny o zespolonej wartościach skutecznych I_1 i I_2 .

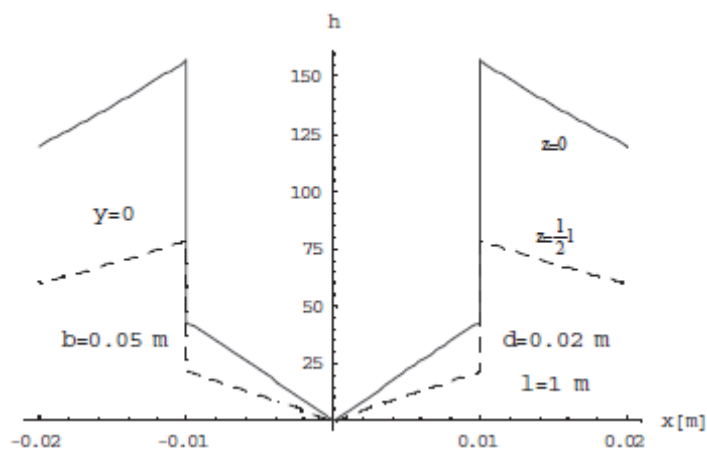


Rys. 5. Linia o dwóch przewodach taśmowych o skończonej długości

Sposób wyznaczania natężenia pola magnetycznego w dowolnym punkcie $X(x,y,z)$ jest taki sam jak dla przypadku linii o dwóch szynoprzewodach prostokątnych [4]. Rozkład modułu całkowitego pola magnetycznego na płaszczyźnie xOy linii dwuprzewodowej dla przypadku zgodnego zwrotu prądów w szynoprzewodach, czyli dla $I_1 = I_2 = I$, przedstawiamy na rysunku 6, przy czym pole to jest wyrażone w jednostkach względnych jako funkcja dana wzorem (9), w którym natężenia odniesienia wyraża się wzorem (11).

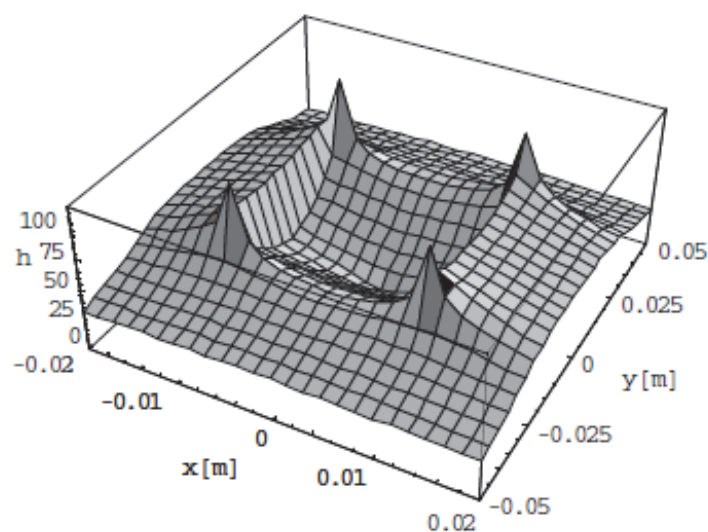


Rys. 6. Rozkład modułu całkowitego pola magnetycznego linii dwuprzewodowej o przewodach taśmowych o skończonej długości na płaszczyźnie xOy dla zgodnych prądów

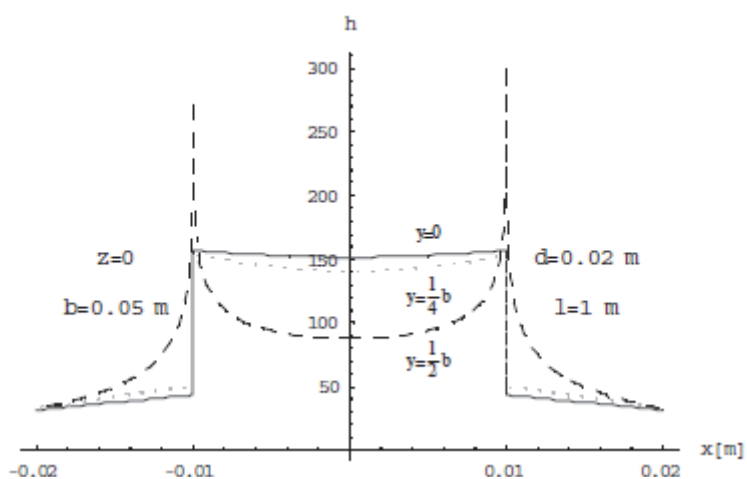


Rys. 7. Rozkład modułu całkowitego pola magnetycznego na płaszczyznach $z=\text{const.}$ linii dwuprzewodowej o przewodach taśmowych o skończonej długości dla $I_1 = I_2 = I$

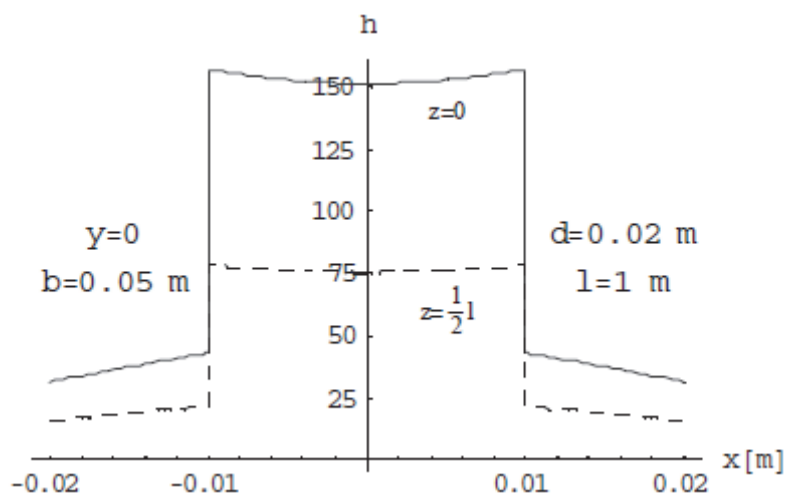
Wpływ długości przewodów na rozkład całkowitego pola magnetycznego w takiej linii ilustrują rysunki 7 i 8. Dla przypadku przeciwnych prądów w szynoprzewodach, czyli dla $I_1 = -I_2 = -I$, rozkłady modułów pola magnetycznego przedstawiamy odpowiednio na rysunkach 9, 10 oraz 11.



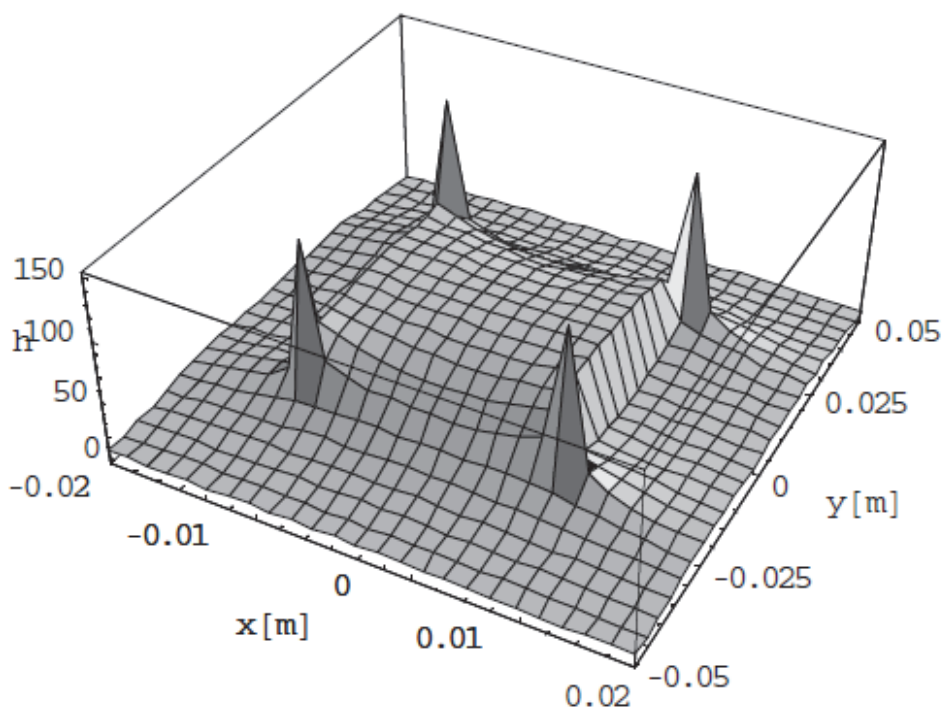
Rys. 8. Rozkład przestrzenny modułu pola magnetycznego na płaszczyźnie $z = l/2$ linii dwuprzewodowej o szynoprzewodach prostokątnych o skończonej długości dla $I_1 = I_2 = I$; $l = 1$ m, $d = 0.02$ m, $b = 0.05$ m



Rys. 9. Rozkład modułu całkowitego pola magnetycznego linii dwuprzewodowej o przewodach taśmowych o skończonej długości na płaszczyźnie xOy dla przeciwnych prądów



Rys. 10. Rozkład modułu całkowitego pola magnetycznego na płaszczyznach $z=\text{const}$. linii dwuprzewodowej o przewodach taśmowych o skończonej długości dla $I_1 = -I_2 = -I$

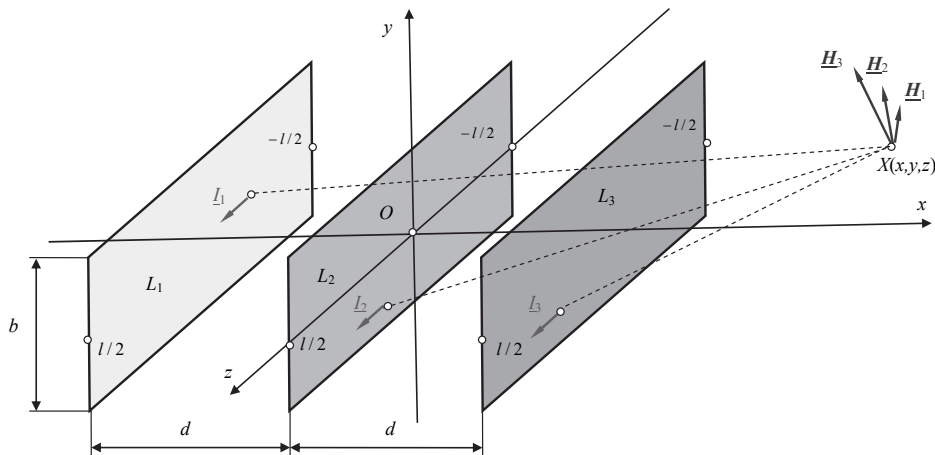


Rys. 11. Rozkład przestrzenny modułu pola magnetycznego na płaszczyźnie $z = l/2$ linii dwuprzewodowej o szynoprzewodach prostokątnych o skończonej długości dla $I_1 = -I_2 = -I$, $l = 1$ m, $d = 0.02$ m, $b = 0.05$ m

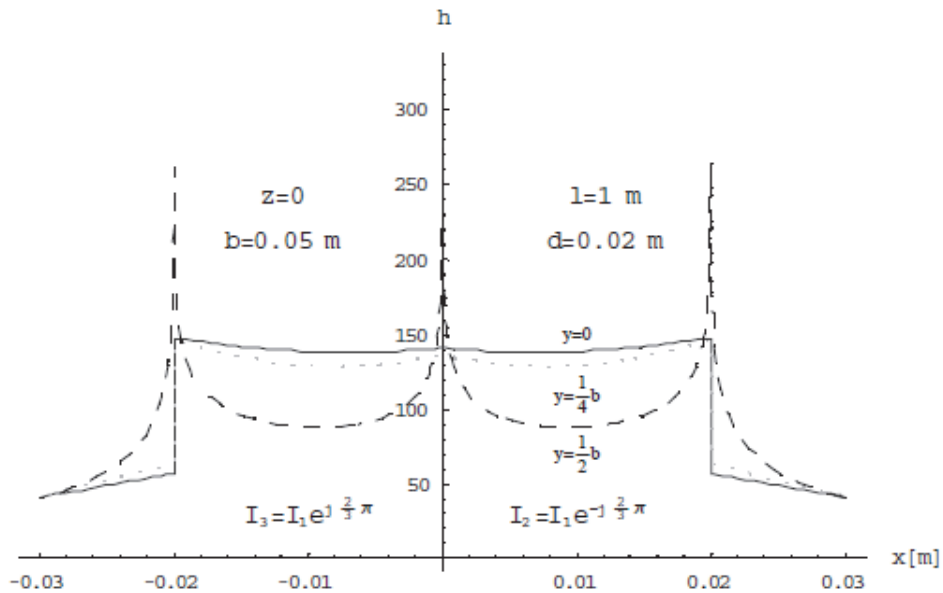
3. POLE MAGNETYCZNE LINII TRÓJFAZOWEJ O TRZECH PRZEWODACH TAŚMOWYCH O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI

Zakładamy, że w trzyprzewodowej linii trójfazowej o przewodach taśmowych o wymiarach $b \times l$ (rys. 12) i odległości d między nimi jest stały lub wolnozmienne trójfazowy prąd sinusoidalny o zespolonej wartościach skutecznych \underline{I}_1 , \underline{I}_2 oraz \underline{I}_3 [12].

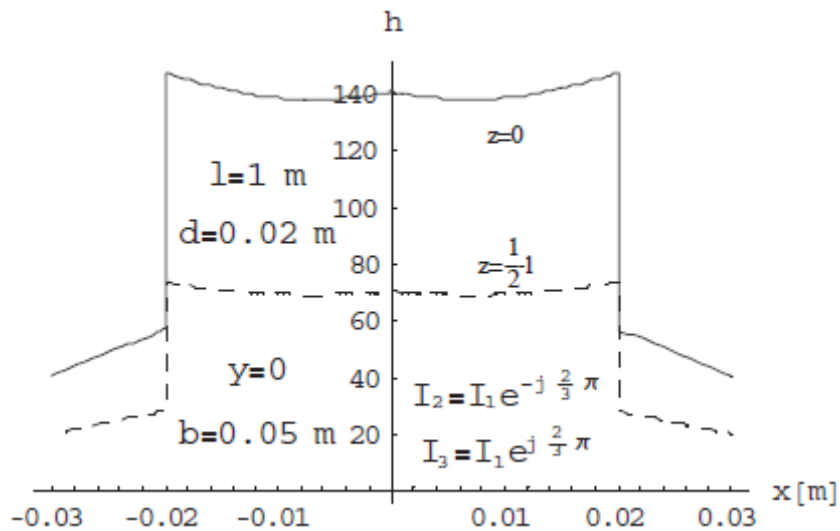
Sposób wyznaczania natężenia pola magnetycznego w dowolnym punkcie $X(x,y,z)$ jest taki sam jak dla przypadku linii trójfazowej o trzech szynoprzewodach prostokątnych [4]. Rozkład modułu całkowitego pola magnetycznego na płaszczyźnie xOy linii trójfazowej trójprzewodowej, dla przypadku prądów symetrycznych w szynoprzewodach, czyli dla $\underline{I}_1 = \underline{I} e^{j0^\circ}$, $\underline{I}_2 = \underline{I} e^{-j120^\circ}$ oraz $\underline{I}_3 = \underline{I} e^{j120^\circ}$, przedstawiamy na rysunku 13, przy czym pole to jest wyrażone w jednostkach względnych jako funkcja dana wzorem (9), w którym natężenia odniesienia wyraża się wzorem (11). Wpływ długości przewodów na rozkład całkowitego pola magnetycznego w takiej linii ilustrują rysunki 14 i 15.



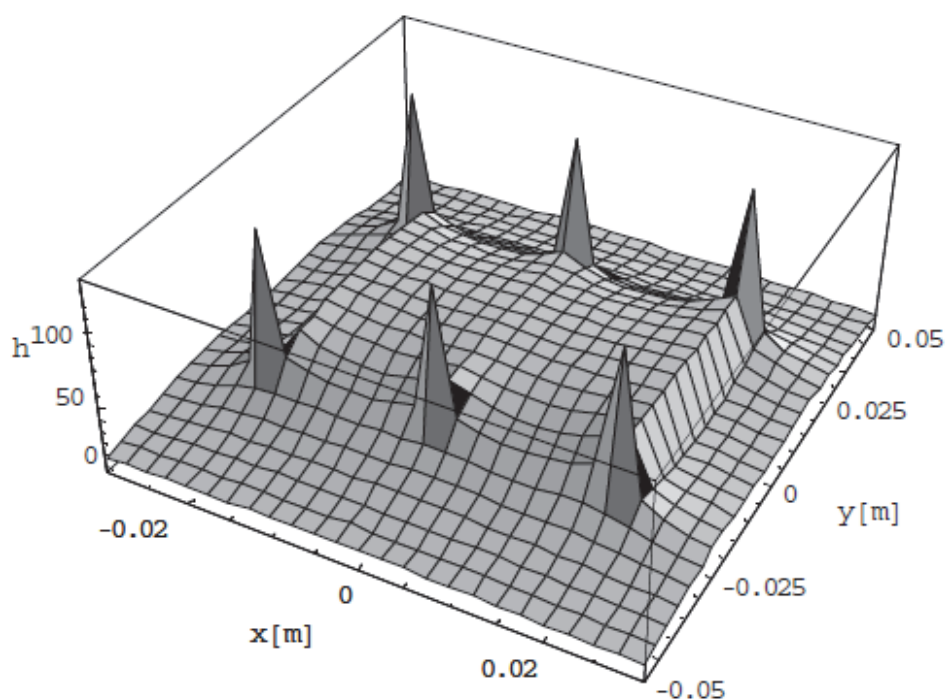
Rys. 12. Linia trójfazowa o trzech przewodach taśmowych o skończonej długości



Rys. 13. Rozkład modułu pola magnetycznego trójprzewodowej linii trójfazowej o przewodach taśmowych o skończonej długości na płaszczyźnie *Boy* dla przypadku symetrycznych prądów



Rys. 14. Rozkład modułu pola magnetycznego trójprzewodowej linii trójfazowej o przewodach taśmowych o skończonej długości na płaszczyznach $z=\text{const}$. dla przypadku symetrycznych prądów



Rys. 15. Rozkład przestrzenny modułu pola magnetycznego na płaszczyźnie $z = l/2$ trójprzewodowej linii trójfazowej o przewodach taśmowych o skończonej długości dla przypadku symetrycznych prądów; $l = 1\text{ m}$, $d = 0.02\text{ m}$, $b = 0.05\text{ m}$

4. WNIOSKI

Wyprowadzone wzory opisujące pole magnetyczne nawet w przewodzie taśmowym mają złożoną strukturę i trudno jest na ich podstawie przewidzieć zmianę rozkładu pola magnetycznego po zmianie przykładowo długości tego przewodu. Ale stosując dowolny program z modulem graficznym, np. *Mathematica*, mamy gotowe, bardzo dobre narzędzie, do szybkiej wizualizacji otrzymanych rozwiązań. Umożliwia to jak widać z rysunków 4, 8, 11 i 15 szybką analizę pola po zmianach parametrów geometrycznych lub elektrycznych rozpatrywanych układów.

LITERATURA

- [1] Sarajcev P., Goic R., Power Loss Computation in High Current Generator Bus Ducts of Rectangular Cross Section, *Electric Power Components and Systems*, No. 38, 2010, pp. 1469-1485.

- [2] Sancarlos-González A., Pineda-Sanchez M, Puche-Panadero R., Sapena-Bano A., Riera-Guasp M., Martinez-Roman J., Perez-Cruz J., Roger-Folch J., Application of the parametric proper generalized decomposition to the frequency-dependent calculation of the impedance of an AC line with rectangular conductors, *Open Phys.* 2017; 15:929–935.
- [3] Jajczyk J., Kasprzyk L., The Use of Coupled Temperature and Electromagnetic Fields in Optimization Problems, *Proceedings of the 6th IASME/WSEAS International Conference on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment (HTE'08), Rhodes, Greece, August 20-22, 2008, Book Series: WSEAS Mechanical Engineering Series, pages: 226-231.*
- [4] Szczegielniak T., Piątek Z., Kusiak D., Pole magnetyczne szynoprzewodów prostokątnych o skończonej długości, *Informatyka Automatyka Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska (IAPGOŚ)*, Nr 4/2013, s. 45-48.
- [5] Jaszczyk B., Łukaniszyn M., Przytułski A., *Zbiór zadań z teorii pola elektromagnetycznego*, Ofic. Wyd. Pol. Opolskiej, skrypt nr 227, Opole 2000.
- [6] Kozłowski J., Machczyński W., *Zadania z podstaw elektromagnetyzmu*, Wydawnictwo Pol. Poznańskiej, Poznań 1998.
- [7] Kusiak D., Szczegielniak T., *Obliczenia elektromagnetyczne szynoprzewodów*, 177s., Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, seria Monografie nr 326, 2017.
- [8] Piątek Z., Baron B., Jabłoński P., Szczegielniak T., Kusiak D., Pasierbek A., A numerical method for current density determination in three-phase bus-bars of rectangular cross section, *Przegląd Elektrotechniczny*, R.89, nr 8, s. 294-298, 2013.
- [9] Piątek Z., Baron B., Szczegielniak T., Kusiak D., Pasierbek A., Mutual Inductance of Long Rectangular Conductors, *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, R.88, No. 9a, pp.175-177, 2012.
- [10] Piątek Z., Kusiak D., Szczegielniak T., Eliptyczne pole magnetyczne w torach wielkoprowodowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, R. 86, Nr 4, 2010, ss. 101-106.
- [11] Gliński H., Grzymkowski R., Kapusta A., Słota D., *Mathematica 8*, Wyd. Prac. Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2012.
- [12] Piątek Z., *Impedances of high-current busducts*, Wyd. PCz., Czestochowa 2008.

VISUALISATION OF THE MAGNETIC FIELD OF A FINITE LENGTH RIBBON BUSBAR

By using the analytical method based on the Biot-Savart law for the electromagnetic field, the magnetic field distribution of a finite length ribbon busbar was determined. The *Mathematica* programme was used for visualization of the obtained solutions. It allowed for a quick analysis of the field after changes in geometric or electrical parameters of the considered systems.

(Received: 20.02.2018, revised: 12.03.2018)