

**Tomasz Janusz TELESZEWSKI,
Sławomir Adam SORKO**

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

Modelowanie przepływu Taylora-Couette'a metodą elementów brzegowych

1 Wstęp

Przepływ Taylora-Couette'a jest formą ruchu cieczy lepkiej między dwoma koncentrycznymi obracającymi się walcami [1, 2]. Charakter ruchu cieczy w przepływie Taylora-Couette'a jest trójwymiarowy, przy czym w pewnym zakresie parametrów kinematycznych w relacji do fizycznych właściwości cieczy ma on postać układu toroidalnych wirów wzdłuż osi układu walców, po czym układ traci stabilność i toroidalny układ wirów deformuje się w istotnie ze wzrostem prędkości kątowej ruchu płynu. Kryterium formy ruchu cieczy w przepływach Taylora-Couette'a stanowi liczba Taylora opisująca relacje pomiędzy siłami odśrodkowymi w ruchu cieczy i siłami wynikającymi ze zwięzłości strukturalnej (lepkości) cieczy [3]:

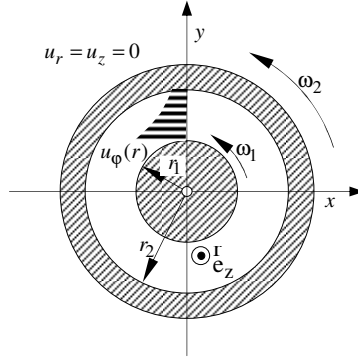
$$Ta = \frac{\omega^2 h^4}{\nu^2} \quad (1)$$

gdzie: $\omega = \Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ jest różnicą prędkości kołowej ruchu walców (Rys. 1), $h = |r_1 - r_2|$ jest odległością pomiędzy ściankami walców (luz), natomiast ν oznacza kinematyczny współczynnik lepkości cieczy $\nu = \mu/\rho$, przy czym μ jest dynamicznym współczynnikiem lepkości cieczy. Krytyczna liczba Taylora opisująca warunki utraty stabilności przepływu w sensie deformacji płaskich wirów toroidalnych jest w literaturze szacowana na $Ta=1700$ [4]. Powyżej krytycznej liczby Taylora przepływ płaski przechodzi w laminarny trójwymiarowy przepływ ze zdeformowanymi przestrzennie wirami toroidalnymi.

Przepływy Taylora-Couette'a ze względu na ich złożoność są przedmiotem intensywnych badań teoretycznych w sensie poznawczym, jak też przedmiotem zagadnień inżynierskich dotyczących konstrukcji mieszalników, lepkościomierzy rotacyjnych (wiskozymetr Couette'a) oraz konstrukcji hydrostatycznych łożysk ślizgowych [5].

Przedmiotem opracowania jest zastosowanie metody brzegowych równań całkowych (metody elementów brzegowych MEB) do wyznaczenia pola prędkości w płaskim laminarnym przepływie cieczy lepkiej pomiędzy rotującymi ze stałą prędkością kątową walcami. W przypadku płaskiego laminarnego przepływu cieczy lepkiej pomiędzy koncentrycznie usytuowanymi walcami wirującymi ze stałą prędkością kątową zagadnienie ma rozwiązanie analityczne. Rozwiązanie zagadnienia przepływowego w przypadku walców ułożonych niekoncentrycznie napotyka na poważne trudności

i ogranicza się do nielicznych przypadków przybliżonych rozwiązań uwarunkowanych relacją wymiarów walców i geometrią układu [6].



Rys. 1. Przepływ Taylora-Couette'a pomiędzy dwoma koncentrycznymi walcami.
Fig. 1. Taylor-Couette flow between two concentric cylinders

Sformułowanie zagadnienia przepływowego ruchu cieczy lepkiej w układzie współśrodkowych i niewspółśrodkowych walców w różnych konfiguracjach przy użyciu metody brzegowych równań całkowych, rozwiązywane dalej dyskretnie, pozwala na daleko idące uogólnienie problemu w zakresie geometrii układu (układ wielu wirujących walców w mieszalnikach) i jego kinematyki, w sposób skuteczny i numerycznie oszczędny w relacji do metody elementów skończonych w zastosowaniach do zagadnień przepływowych.

2 Sformułowanie zagadnienia

Laminarny, płaski przepływ cieczy lepkiej w cylindrycznym układzie współrzędnych $\{r, \varphi, z\}$ przy założeniu, że prędkości $u_r = u_z = 0$ opisują: równanie ciągłości i równania Stokes'a dla składowej $u_\varphi = u_\varphi(r)$ w postaci:

$$\frac{du_\varphi}{d\varphi} = 0 \quad (2a)$$

$$\rho \frac{u_\varphi^2}{r} = \frac{dp}{dr}, \quad \mu \left(\frac{d^2 u_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\varphi}{dr} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) = 0 \quad (2b), (2c)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (2c) z warunkami brzegowymi: $u_\varphi(r_1) = \omega_1 r_1$, $u_\varphi(r_2) = \omega_2 r_2$ ma postać:

$$u_\varphi(r) = \Omega^r r - \Omega_r \frac{1}{r} ; \quad \Omega^r = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} ; \quad \Omega_r = \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (3)$$

Po wstawieniu zależności (3) do równania różniczkowego (2b) po scałkowaniu otrzymuje się zależność opisującą pole ciśnienia:

$$p(r) = \frac{\rho}{2} (\Omega r)^2 r^2 + 2\rho (\Omega r \Omega_r) \ln r - \frac{\rho}{2} (\Omega_r)^2 \frac{1}{r^2} + const \quad (4)$$

Momenty oporu ruchu cylindrów w cieczy lepkiej są odpowiednio równe:

$$M_{r_1} = 2\pi r_1^2 \cdot \tau_{r\varphi} \Big|_{r=r_1} = -4\pi\mu\Omega_r ; M_{r_2} = 2\pi r_2^2 \cdot \tau_{r\varphi} \Big|_{r=r_2} = +4\pi\mu\Omega_r \quad (5a), (5b)$$

3 Matematyczny opis przepływu. Sformułowanie całkowe

Ruch cieczy lepkiej o dowolnej konfiguracji pola przepływu opisują równania ciągłości i równania Naviera-Stokes'a. Przy pewnych założeniach upraszczających dotyczących charakteru ruchu, tj. ruchu przy małych wartościach liczby Reynoldsa opis ten stanowią równania Stokes'a. W przypadku ruchu płaskiego (dwuwymiarowego) całkowe sformułowanie zagadnienia przepływowego opisanego równaniami Stokes'a w układzie współrzędnych kartezjańskich $\{x, y\}$ sprowadza się do brzegowego równania całkowego [7, 8] (przy założeniu, że brzeg L płaskiego obszaru Λ ograniczonego tym brzegiem jest krzywą gładką) w postaci:

$$\int_L f_n(\mathbf{q}) G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} = -2\pi\mu u_m(\mathbf{p}) + \mu \int_L u_n(\mathbf{q}) N_{nmk}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \bar{n}_{k\mathbf{q}} dL_{\mathbf{q}} \quad (6)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L$

Jeżeli na brzegu (L) obszaru przepływu jest zadana prędkość ruchu płynu u_m równanie (6) jest równaniem całkowym (równanie Fredholma I-go rodzaju) względem składowych tensora naprężeń lepkich $\{f_m(\mathbf{q}), f_n(\mathbf{q})\}$ (indeksy n, m, k oznaczają przemienne x, y , natomiast całka po prawej stronie jest całką w sensie wartości głównej Cauchy'ego). Rozwiązania podstawowe $G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ oraz $N_{nmk}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ są odpowiednio równe:

$$G_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta_{nm} \ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right) + \frac{\delta_{n\mathbf{p}\mathbf{q}} \delta_{m\mathbf{p}\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2} , \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (6a)$$

$$N_{nmk}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4 \frac{\delta_{m\mathbf{p}\mathbf{q}} \delta_{n\mathbf{p}\mathbf{q}} \delta_{k\mathbf{p}\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^4} \quad \text{gdzie: } \delta_{*\mathbf{p}\mathbf{q}} = (\mathcal{X}_{*\mathbf{p}} - \mathcal{X}_{*\mathbf{q}}) \quad (6b)$$

gdzie: $r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \sqrt{(\delta_{n\mathbf{p}\mathbf{q}})^2 + (\delta_{m\mathbf{p}\mathbf{q}})^2}$ ($m \neq n$) przy czym przez \mathcal{X}_* oznaczono argumenty $(x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}})$, $(y_{\mathbf{q}}, x_{\mathbf{q}})$, a przez $\bar{n}_{k\mathbf{q}}$ składowe wektora normalnego w punkcie (\mathbf{q}) .

W równaniu (6) składowe prędkości u_n są dane jako składowe prędkości ruchu cieczy: na brzegu $L_1 = 2\pi r_1$ z prędkością $u_{\varphi 1} = \omega_1 r_1$ oraz na brzegu $L_2 = 2\pi r_2$ z prędkością $u_{\varphi 2} = \omega_2 r_2$, przy czym $L \equiv L_1 \cup L_2$.

Po wyznaczeniu gęstości $f_n(\mathbf{q})$ na brzegu (L), składowe prędkości u_m w obszarze (Λ) ograniczonym brzegiem $L \equiv L_1 \cup L_2$ (L) wyznacza się z równania:

$$u_m(\mathbf{v}) = + \frac{1}{2\pi} \int_L u_n(\mathbf{q}) N_{nmk}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) \bar{n}_{k\mathbf{q}} dL_{\mathbf{q}} - \frac{1}{2\pi\mu} \int_L f_n(\mathbf{q}) G_{mn}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} \quad \mathbf{v} \in \Lambda \quad (7)$$

Ciśnienie w polu przepływu (Λ) jest opisane zależnością:

$$p(\mathbf{v}) = + \frac{\mu}{4\pi} \int_L u_n(\mathbf{q}) H_{nk}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) \bar{n}_{k\mathbf{q}} dL_{\mathbf{q}} - \frac{1}{4\pi} \int_L f_n(\mathbf{q}) P_n(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} \quad (8)$$

gdzie:

$$P_n(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = -2 \frac{\delta_{n\mathbf{v}\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{v}\mathbf{q}}^2} \quad (8a)$$

$$H_{nk}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = 4 \left(-\frac{\delta_{nk}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2} + 2 \frac{\delta_{n\mathbf{v}\mathbf{q}} \delta_{k\mathbf{v}\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^4} \right) \quad (8b)$$

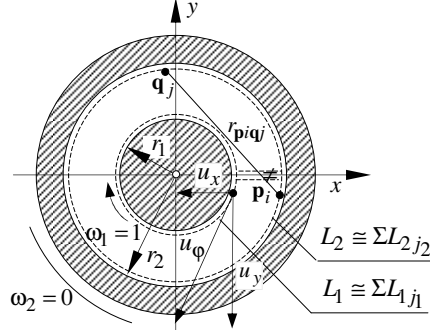
Składowe wektora naprężenia w rozpatrywanym przypadku są równe:

$$f_m(\mathbf{p}) = \sigma_{mn}(\mathbf{p}) \bar{n}_{n\mathbf{p}} \quad ; \quad \text{gdzie: } \sigma_{mn}(\mathbf{p}) = \mu \left(\frac{\partial u_m(\mathbf{p})}{\partial \chi_{n\mathbf{p}}} + \frac{\partial u_n(\mathbf{p})}{\partial \chi_{m\mathbf{p}}} \right) \quad (9)$$

4 Numeryczna realizacja algorytmu obliczeniowego

Dyskretne rozwiązanie równań całkowych polega na sprowadzeniu całek do układu algebraicznych równań liniowych względem dyskretnych wartości niewiadomej funkcji w obranych punktach (punkty kolokacji) na brzegu rozpatrywanego obszaru. Najprostszą formą rozwiązania jest podział brzegu na elementy liniowe, na których wartości poszukiwanej funkcji w punktach kolokacji tożsamych z punktami centralnymi elementów przyjmuje się za stałe.

Przyjmując przybliżenie brzegu $L \equiv L_1 \cup L_2$ J -elementowym układem elementów liniowych $[L_j]$, $j = \overline{1, J}$ (Rys. 2), na których funkcje $[f_n(\mathbf{q}_j)]$, $j = \overline{1, J}$ w centralnych punktach elementów mają stałe wartości, równanie całkowe (6) sprowadza się do układu $2J$ algebraicznych równań liniowych:



Rys. 2. Dyskretyzacja brzegu obszaru przepływu pomiędzy koncentrycznymi walcami
 Fig. 2. Discretization of the boundary of the flow between two concentric cylinders

$$\sum_{j=1}^J f_n(\mathbf{q}_j) \mathcal{G}_{mn}^{\circ}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = -\mu \sum_{j=1}^J u_n(\mathbf{q}_j) \mathcal{E}_{mnk}^{\circ}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \quad (9)$$

gdzie:

$$\mathcal{G}_{mn}^{\circ}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \int_{L_j} \left[\delta_{nm} \ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}} \right) + \frac{\delta_{m \mathbf{p}_i \mathbf{q}_j} \delta_{n \mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}^2} \right] dL_j \quad (9a)$$

oraz:

$$\mathcal{E}_{mnk}^{\circ}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = 4\bar{n}_k \mathbf{q}_j \int_{L_j} \frac{\delta_{m \mathbf{p}_i \mathbf{q}_j} \delta_{k \mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}^4} dL_j \quad (9b)$$

przy czym:

$$r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j} = \sqrt{(\delta_{n \mathbf{p}_i \mathbf{q}_j})^2 + (\delta_{m \mathbf{p}_i \mathbf{q}_j})^2} \quad (m \neq n) \quad (9^*)$$

Po wyznaczeniu dyskretnych wartości funkcji $[f_m(\mathbf{q}_j), f_n(\mathbf{q}_j)]$, $j = \overline{1, J}$ na elementach brzegowych dyskretne wartości składowych prędkości $[u_n(\mathbf{v}_s)]$, $s = \overline{1, S}$ i wartość ciśnienia $[p(\mathbf{v}_s)]$, $s = \overline{1, S}$ w punktach wewnętrznych obszaru Λ wyznacza się ze zdyskretyzowanych jak wyżej zależności (7) i (8).

5 Weryfikacja algorytmu MEB

W celu dokonania weryfikacji prezentowanego algorytmu obliczeniowego posłużono się rozwiązaniem teoretycznym pola prędkości płaskiego przepływu Taylora cieczy o lepkości $\mu = 0.01 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ między dwoma walcami, gdzie wewnętrzny walec o promieniu $r_1 = 0.05 \text{ m}$ porusza się z jednostkową prędkością $\omega_1 = 1.0 \text{ s}^{-1}$, a zewnętrzny walec o promieniu $r_2 = 0.1 \text{ m}$ pozostaje nieruchomy ($\omega_2 = 0.0 \text{ s}^{-1}$).

Obliczenia problemowego zagadnienia wedle przedstawionego wyżej algorytmu obliczeniowego zrealizowano przy użyciu sporządzonego przez autorów programu obliczeniowego w języku programowania FORTRAN udostępnianego w Centrum Komputerowych Sieci Rozległych Politechniki Białostockiej w systemie wielodostępnym na wieloprocesorowym komputerze, przy czym program obliczeniowy może być realizowany również na komputerach personalnych o niewielkiej mocy obliczeniowej.

Wartości błędu numerycznego rozwiązania profilu prędkości $u_{\varphi}(r)$ przyjęto jako różnicę wartości funkcji opisanej wzorem analitycznym f^a i funkcji wartości funkcji wyznaczonej w rezultacie numerycznego rozwiązania f^n odniesioną do wartości rozwiązania analitycznego (błąd względny):

$$\delta f^{an} = |(f^a - f^n) / f^a| * 100\% \quad (13)$$

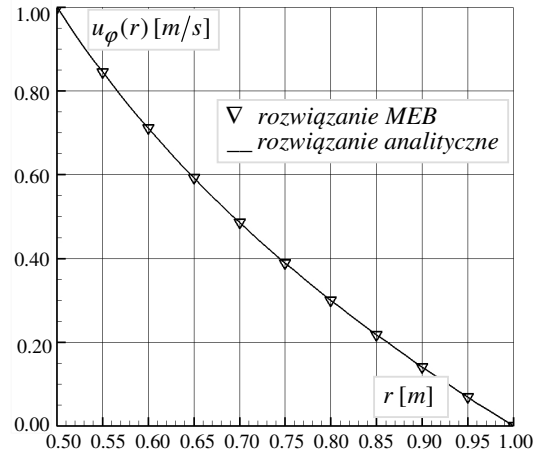
W tabeli 1 porównano rezultaty obliczeń MEB, z rozwiązaniem testowym opisanym równaniem (3) dla brzegu składającego się z 500 i 1000 liniowych elementów. Błąd metody MEB zależy przede wszystkim stopnia dyskretyzacji linii brzegowej, przykładowo maksymalny błąd MEB dla brzegu zbudowanego z 500 elementów nie przekracza wartości 0.10%, natomiast błąd dla brzegu składającego się z 1000 elementów nie przekracza wartości 0.02%.

Na rysunku 3 wykreślono graficzne porównanie rezultatów obliczeń MEB prędkości przy przepływie Taylora z rozwiązaniem teoretycznym (3) dla brzegu złożonego z 500 liniowych elementów.

Tab. 1. Prędkość w przepływie Taylora - błąd rozwiązania MEB

Tab. 1. The velocity in a Taylor flow - error analysis applied in BEM

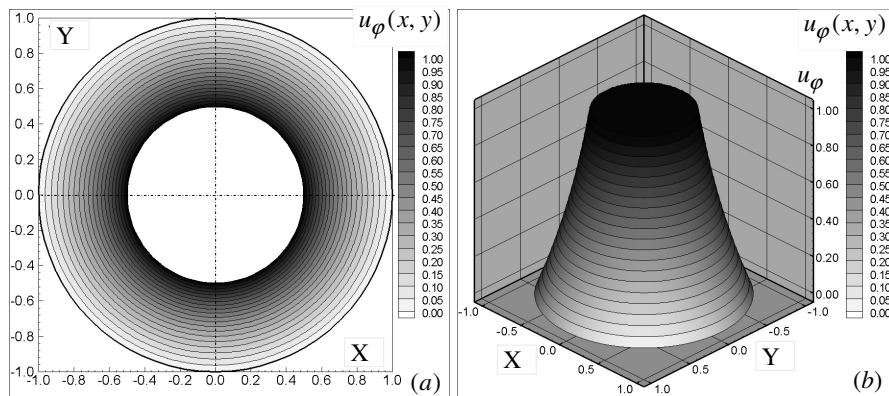
Współrzędne węzłów	Rozwiązanie teoretyczne	Rozwiązanie MEB	Błąd met. MEB	Rozwiązanie MEB	Błąd met. MEB
		500 elementów		1000 elementów	
r	$u_{\varphi}(r)^a$	$u_{\varphi}(r)^n$	δf^{an}	$u_{\varphi}(r)^n$	δf^{an}
m	m/s	m/s	%	m/s	%
0,050	1,00000	1,00000	0,0000	1,00000	0,0000
0,060	0,71111	0,71098	0,0183	0,71108	0,0042
0,070	0,48571	0,48560	0,0226	0,48569	0,0041
0,080	0,30000	0,29990	0,0333	0,29997	0,0100
0,090	0,14074	0,14065	0,0639	0,14072	0,0142
0,100	0,00000	0,00000	-	0,00000	-



Rys. 3. Porównanie rezultatów obliczeń MEB prędkości w przepływie Taylora między koncentrycznymi wirującymi walcami z rozwiązaniem analitycznym

Fig. 3. Compare BEM results for velocity distribution of Taylor flow between two concentric rotating cylinders with analytical solution

Na rysunkach 4a-b przedstawiono pole prędkości przepływu pomiędzy walcami $r_1 = 0.05 \text{ m}$, $\omega_1 = 1.0 \text{ s}^{-1}$; $r_2 = 0.1 \text{ m}$, $\omega_2 = 0.0 \text{ s}^{-1}$, odpowiednio: widok 2D (Rys. 4a) i widok 3D (rys. 4b). Na rysunku 5a wykreślono linie prądu wraz zaznaczonymi zwrotami przepływu, natomiast na rysunku 5b przedstawiono funkcję prądu (Ψ).

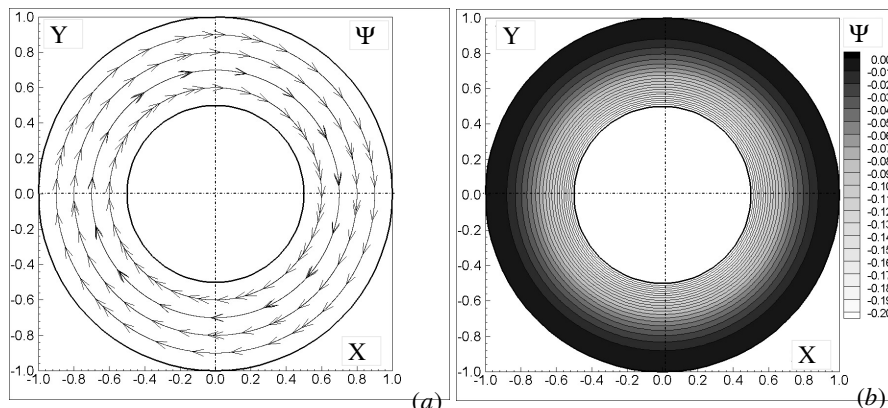


Rys. 4. Pole prędkości w przepływie Taylora wyznaczone metodą MEB

$r_1 = 0.05 \text{ m}$, $\omega_1 = 1.0 \text{ s}^{-1}$; $r_2 = 0.1 \text{ m}$, $\omega_2 = 0.0 \text{ s}^{-1}$ a) widok 2D, b) widok 3D

Fig.4. Velocity field in Taylor flow BEM solutions

$r_1 = 0.05 \text{ m}$, $\omega_1 = 1.0 \text{ s}^{-1}$; $r_2 = 0.1 \text{ m}$, $\omega_2 = 0.0 \text{ s}^{-1}$ a) 2D view, b) 3D view



Rys. 5. Przepływ Taylora wyznaczony metodą MEB

$$r_1 = 0.05 \text{ m}, \omega_1 = 1.0 \text{ s}^{-1}; r_2 = 0.1 \text{ m}, \omega_2 = 0.0 \text{ s}^{-1}$$

a) linie prądu, b) potencjał prądu

Fig.5. Taylor flow BEM solutions:

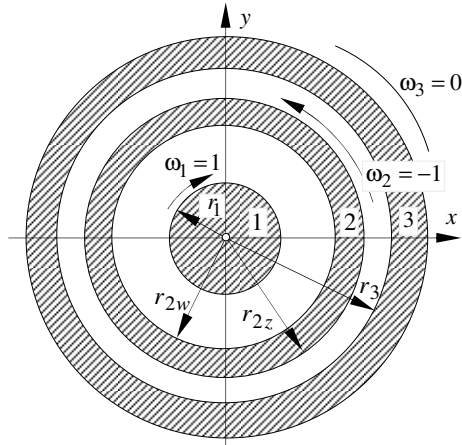
$$r_1 = 0.05 \text{ m}, \omega_1 = 1.0 \text{ s}^{-1}; r_2 = 0.1 \text{ m}, \omega_2 = 0.0 \text{ s}^{-1}$$

a) streamlines, b) stream function

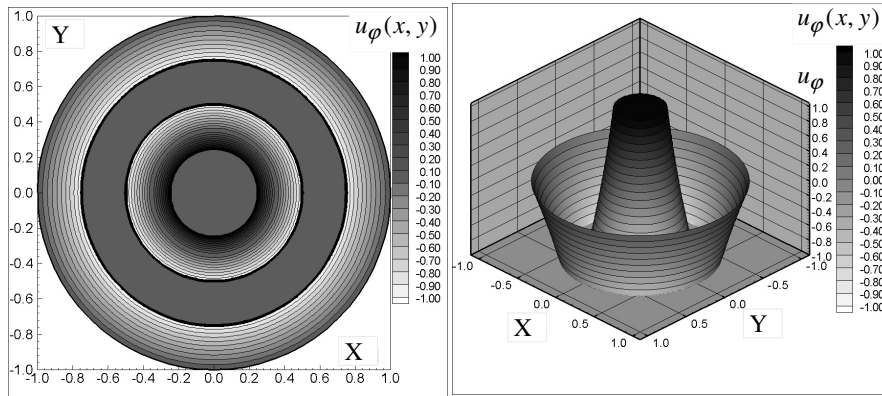
6 Przykład obliczeniowy

Jako przykład zastosowania metody elementów brzegowych do wyznaczania przepływów Taylora przedstawiono rezultaty obliczeń przepływu pomiędzy trzema koncentrycznymi walcami: $r_1 = 0.025 \text{ m}$, $r_{2w} = 0.050 \text{ m}$, $r_{2z} = 0.075 \text{ m}$, $r_3 = 0.100 \text{ m}$ wirującymi z prędkościami kątowymi: $\omega_1 = 1.00 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = -1.00 \text{ s}^{-1}$, $\omega_3 = 0.00 \text{ s}^{-1}$ (Rys. 6). Lepkość płynu przyjęto jak w wyżej rozważanym przypadku $\mu = 0.01 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, przy czym prezentowana metoda obliczeniowa umożliwia symulację i wyznaczenie przepływu przy różnych gęstościach cieczy w poszczególnych przestrzeniach miedzycylindrycznych.

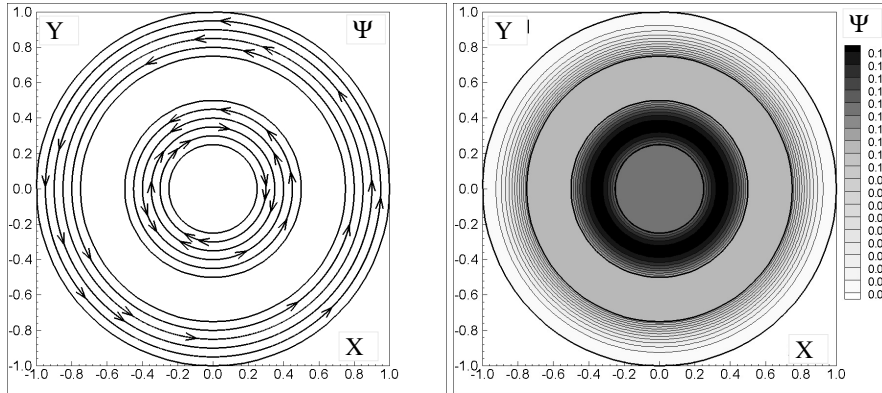
Na rysunkach 7a-b wykreślono pole prędkości przepływu między trzema walcami: widok 2D (Rys. 7a) i widok 3D (Rys. 7b). Na rysunku 8a przedstawiono linie prądu wraz zaznaczonymi zwrotami kierunku przepływu, natomiast na rysunku 8b przedstawiono funkcję prądu (Ψ).



Rys. 6. Szkic analizowanego układu przepływu pomiędzy trzema koncentrycznymi walcami
 Fig. 6. Sketch of the analyzing system of the flow between three concentric cylinders



Rys. 7. Pole prędkość przepływu w układzie trzech koncentrycznych wirujących walców
 a) widok 2D, b) widok 3D
 Fig.7. Velocity field of flow in the system of three rotating concentric cylinders
 a) 2D view, b) 3D view



Rys. 8. Przepływ pomiędzy trzema koncentrycznymi wirującymi walcami
a) linie prądu b) potencjał prądu

Fig.8. Flow between three rotating concentric cylinders
a) streamlines b) stream function

7 Podsumowanie

W prezentowanym wyżej opracowaniu wykazano użyteczność metody brzegowych równań całkowych do rozwiązywania zagadnień opisanych równaniami Stokes'a, w analizowanym przypadku do wyznaczania płaskiego przepływu cieczy lepkiej w układzie koncentrycznie usytuowanych powierzchni cylindrycznych wirujących z różnymi prędkościami kątowymi, sprowadzonym do analizy przepływu rotacyjnego cieczy lepkiej w płaszczyźnie prostopadłej do osi walców.

Jakkolwiek pole prędkości kątowej $u_\varphi(r)$ opisanej równaniem (3), jedynej przy poczynionych wyżej założeniach, nie zależy od lepkości cieczy, to momenty oporu ruchu cylindrów w cieczy lepkiej są funkcją lepkości cieczy, co między innymi, stanowi podstawę konstrukcji lepkościomierzy rotacyjnych [9]. Wyznaczenie oporów ruchu układu koncentrycznych cylindrów pozostających we wzajemnym ruchu obrotowym jest również niezwykle ważne w konstrukcji poprzecznych łożysk hydrostatycznych, dla których przedstawiony wyżej model przepływu i jego matematyczny opis jest wystarczająco dokładny [10]. Metoda brzegowych równań całkowym w zastosowaniu do analizy płaskich przepływów cieczy lepkiej wielu cylindrów w układach zarówno koncentrycznych, jak też niekoncentrycznych, stwarza szerokie możliwości modelowania zarówno geometrycznych parametrów rozpatrywanych struktur, i daje swobodę modelowania cech fizycznych cieczy w sensie możliwości zróżnicowania lepkości cieczy w poszczególnych obszarach, bez konieczności rozwiązań cząstkowych.

Literatura

1. Taylor, G.I.: *Stability of a Viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders*, Phil. Trans. Royal Society, Vol. 223, 1923
2. White F.M.: *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, 2005
3. White F.M.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 2009

4. Childs P. R. N.: *Rotating flow*, Elsevier Inc., 2011
5. Spurk J.H.: *Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 1977
6. Spurk J.H.: *Fluid Mechanics. Problems and Solutions*. Springer-Verlag, 1977
7. Pozrikidis C.: *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flows*, Cambridge Univ. Press, 1991
8. Wrobel L.C.: *The Boundary Element Method Vol. I Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*. John Willey & Sons LTD, 2002
9. Dontula P., Macosko Ch.W., Scriven E.: *Origins of concentric cylinders viscometry*. The Society of Rheology, 2005
10. Childs P.R.N.: *Rotating Flows*. Butterworth-Heinemann, 2011

Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono algorytm rozwiązania zagadnienia przepływowego płaskiego, laminarnego ruchu cieczy lepkiej pomiędzy koncentrycznymi wirującymi cylindrami. Przedstawiono matematyczny opis zagadnienia przepływowego i metodę wyznaczania pola prędkości cieczy i pola ciśnienia oraz naprężeń lepkościowych na ściankach struktur ograniczających przepływ.

Słowa kluczowe:

Simulation of the Taylor-Couette flow by means of the Boundary Element Method

Summary

In the elaboration was presented the algorithm of solution of the problem of two dimensional, laminar flow of viscous fluid between concentric rotating cylinders. The problem was formulated and solved by using Boundary Element Method. One introduced the mathematical description of the problem of flow and the method of calculating of the velocity and pressure fields, also tensions on sides of structures restrictive the flow.

Keywords: Taylor-Couette flow, boundary element method, Stokes flow

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/4/2014 Katedry Ciepłownictwa, Ogrzewnictwa i Wentylacji Politechniki Białostockiej i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

