Krystyn PAWLUK

REPETENCJA FALI ELEKTROMAGNETYCZNEJ I JEJ NIEJEDNOZNACZNA DEFINICJA

STRESZCZENIE *Znaczący rozwój technik tomografii, zarówno w medycynie jak i w technice, wykorzystuje fale elektromagnetyczne jako czynnik ingerujący w środowisko. Dotyczy to w znacznej mierze monoharmonicznych fal płaskich. Wydaje się, że o ile komputerowa synteza obszaru poddanego tomografii falowej jest bardzo zaawansowana, to jednak poziom naukowy i poprawność analizy zjawisk fizycznych związanych z penetracją pola elektromagnetycznego stosowanego w tomografii często są niezadawalające. W niniejszym opracowaniu przytoczono podstawowe informacje dotyczące równań falowych (bezpośrednich i potencjalnych) w wersji podstawowej i w postaci zespolonej jako równania Helmholtza. Zwrócono przy tym szczególną uwagę na wielkość zespoloną* $\underline{k}$ *nazywaną 'liczbą falową' lub 'repetencją', dla której różni autorzy przyjmują niejednakowe definicje. Zamieszczono zróżnicowaną postać równań falowych wynikającą z tych dwóch różniących się definicji wielkości* $\underline{k}$*, jak również zależną od dwojakiej możliwości przyjmowania znaków algebraicznych* $\pm$ *przy* $\mathrm{Im}(\underline{k})$ *lub przy* $\mathrm{Im}(\underline{k}^2)$.

Słowa kluczowe: *fale elektromagnetyczne, repetencja*

1. WPROWADZENIE

Termin *repetencja*, symbol k, dla wielkości występującej w opisie fali elektromagnetycznej jest synonimem terminu *liczba falowa.* Nazwa *liczba falowa* jest semantycznie niepoprawna, bo sugeruje błędnie, że k miałoby być wielkością bezwymiarową (ściślej wielkością o wymiarze jeden), podczas gdy de facto k jest w układzie SI wyrażone w jednostce m^{-1}. Z tego powodu w niniejszym opracowaniu preferujemy dla k termin *repetencja* i sugerujemy, żeby w publikacjach zrezygnować z terminu *liczba falowa*.

Prof. dr hab. inż. Krystyn PAWLUK
e-mail: pawluk@iel.waw.pl

Zakład Maszyn Elektrycznych
Instytut Elektrotechniki

PRACE INSTYTUTU ELEKTROTECHNIKI, zeszyt 262, 2013

W piśmiennictwie traktującym temat fal elektromagnetycznych spotyka się dwie różne definicje repetencji w odniesieniu do długości λ fali:

1. $k = (2\pi)/\lambda$ – patrz Griffiths [2], Jacson [4], Krakowski [5], Pawluk [6],
2. $\tilde{k} = 1/\lambda$ – patrz zalecenie IEC [3].

W niniejszym opracowaniu pokarzemy, jakie są konsekwencje przyjęcia 1-szej lub 2-giej definicji repetencji na opis matematyczny monoharmonicznej, płaskiej fali elektromagnetycznej o pulsacji $\omega = 2\pi f$ (wyrażonej w s^{-1}), przy założeniu liniowości środowiska, które określimy jako maxwellowskie, to jest środowiska opisanego przez stałe następujących wielkości o wartościach rzeczywistych:

- przenikalności elektrycznej $\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_r$, wyrażonej w F/m
- przenikalności magnetycznej $\mu = \mu_0\,\mu_r$, wyrażonej w H/m
- konduktywności γ, wyrażonej w S/m.

Środowisko, w którym wyróżnia się przenikalności względne uogólnione o wartościach zespolonych, to jest $\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r''$ i podobnie $\underline{\mu}_r = \mu_r' - j\mu_r''$ może być konsekwentnie określone jako niemaxwellowskie, patrz [6].

Oznaczymy pomocniczo prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w wyżej opisanym liniowym, izotropowym środowisku maxwellowskim przez $c = 1\big/\sqrt{\varepsilon\mu} = c_0\big/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$, wyrażoną w m/s, gdzie:

- $c_0 \approx 3\cdot 10^8$ m/s [1)] – prędkość światła w próżni,
- $\varepsilon_0 \approx 1/(36\pi)$ nF/m [2)] – stała elektryczna,
- $\mu_0 = 0{,}4\pi$ μH/m – stała magnetyczna[3)]

Repetencja k definiowana wg 1 lub $\tilde{k}$ wg 2 określa wielkości charakterystyczne monoharmonicznej fali płaskiej w liniowym środowisku przewodzącym następująco:

- długość fali – wg 1: $\lambda = (2\pi)/k$; wg 2: $\lambda = 1/\tilde{k}$,
- prędkość rozchodzenia się fali – wg 1: $c = \omega/k$; wg 2: $c = f/\tilde{k}$,
- współczynnik załamania fali – wg 1: $n = (ck)/\omega$; wg 2: $n = (c\tilde{k})/f$,
- głębokość wnikania fali[4)] – wg 1: $d = 1/\kappa$; wg 2: $d = 1/(2\pi\tilde{\kappa})$.

Jednakże w opisie fali elektromagnetycznej repetencję traktuje się jako wielkość zespoloną, co komplikuje jej wyżej podane związki z wielkościami opisującymi falę.

2. FALA PŁASKA W LINIOWYM ŚRODOWISKU PRZEWODZĄCYM

W równaniach Maxwella dla liniowego środowiska przewodzącego (np. dla przewodnika elektrycznego) determinujących elektromagnetyczną falę płaską przyjmuje się na ogół upraszczające założenie, patrz [2], [8], że w takim środowisku początkowa gęstość powierzchniowa ładunku elektrycznego ρ_c zanika na tyle szybko, że w odpo-

[1)] Dokładnie c_0 = 299 792 458 … m/s.
[2)] Dokładnie ε_0 = 8,854 187 817 … pF/m.
[3)] Terminy stała elektryczna dla ε_0 i stała magnetyczna dla μ_0 są zalecane przez IEC.
[4)] Symbol κ patrz dalej – wyrażenia (5) i (5a).

wiednim równaniu Maxwella) div$\boldsymbol{E}$ = ρ_c / ε_0, można przyjąć uproszczenie div $\boldsymbol{E} \approx 0$. Jeśli dodatkowo przyjmiemy także, że gęstość prądu w obszarze rozchodzenia się fali nie jest wymuszona jakimś czynnikiem zewnętrznym, to konsekwentnie jest ona proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego $\boldsymbol{J}_c = \boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$. Te uszczegółowienia prowadzą to do jednorodnych równań polowych (patrz Dodatek 1) jak poniżej:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \quad \text{i} \quad \nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

Równania (1) stanowią formalną podstawę do opisu fali elektromagnetycznej w rozpatrywanym maxwellowskim obszarze Ω, który opiszemy współrzędnymi prostokątnymi o wektorach jednostkowych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$. Dla pierwotnej fali płaskiej rozchodzącej się w kierunku $\boldsymbol{z}$ przyjmiemy, że jej składowa elektryczna jest skierowana w kierunku $\boldsymbol{x}$, a składowa magnetyczna w kierunku $\boldsymbol{y}$, co oczywiście implikuje że $\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{x}E_x(z,t)$ i $\boldsymbol{B}(z,t) = \boldsymbol{y}B_y(z,t)$, a odpowiednie laplasjany sprowadzają się do drugich pochodnych: $\nabla^2 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{x} \cdot \partial^2 E_x / \partial z^2$ i podobnie $\nabla^2 \boldsymbol{B} = \boldsymbol{y} \cdot \partial^2 B_y / \partial z^2$. Tak więc wektorowe trójwymiarowe równania falowe (1) upraszczają się do dwóch jednowymiarowych równań falowych, co po uproszczeniu przez wektory kierunkowe $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ sprowadza się do dwóch skalarnych równań falowych:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \mu\gamma \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} - \mu\gamma \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

Przy ograniczeniu się do monochromatycznej fali płaskiej o pulsacji ω, wprowadza się odpowiednie zapisy zespolone, co dotyczy także repetencji k, która występuje w opisie rozwiązań równań falowych (2). Przyjmując dla repetencji jej 1-szą definicję będziemy repetencję zespoloną oznaczać przez $\underline{k}$, a dla 2-giej definicji przez $\underline{\tilde{k}}$. Repetencja zespolona występuje w argumencie funkcji wykładniczej zespolonego rozwiązania równań (2). Od pożądanej postaci zapisu funkcji składowych E_x i B_y monochromatycznej falo płaskiej zależy wyrażenie określające repetencję w funkcji wielkości charakteryzujących środowisko występowania fali. W niniejszym opracowaniu wybieramy postać funkcji E_x i B_y według monografii Griffithsa [2]. Dla 1-szej i 2-giej definicji repetencji będzie:

$$\underline{E}_x(z,t) = \underline{\hat{E}}_x \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k} z - \omega t)} \quad \text{i} \quad \underline{B}_y(z,t) = \underline{\hat{B}}_y \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k} z - \omega t)} \tag{3}$$

$$\underline{E}_x(z,t) = \underline{\hat{E}}_x \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\underline{\tilde{k}} z - f t)} \quad \text{i} \quad \underline{B}_y(z,t) = \underline{\hat{B}}_y \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\underline{\tilde{k}} z - f t)} \tag{3a}$$

gdzie $\underline{\hat{E}}_x = \hat{E}_x \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_E}$ i $\underline{\hat{B}}_y = \hat{B}_y \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_B}$ reprezentują wartości zespolone dla $z = 0$ i $t = 0$. Argumenty δ_E i δ_B są, ogólnie biorąc, różne.

Podstawiając rozwiązania (3) lub (3a) do (2) i dokonując odpowiednich uproszczeń, patrz Dodatek 1, wyznacza się kwadrat repetencji w środowisku opisanym przez stałe ε, μ, γ o wartościach rzeczywistych, który dla 1-szej definicji repetencji jest dany wyrażeniem:

$$\underline{k}^2 = \mu\omega(\varepsilon\omega \pm \mathrm{j}\gamma) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 \pm \mathrm{j}\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right) \tag{4}$$

a dla 2-giej:

$$\underline{\tilde{k}}^2 = \mu f\left(\varepsilon f \pm \mathrm{j}\frac{\gamma}{2\pi}\right) = \left(\frac{f}{c}\right)^2 \left(1 \pm \mathrm{j}\frac{\gamma}{\varepsilon \cdot 2\pi f}\right) \tag{4a}$$

Znaki algebraiczne + przy $\mathrm{Im}(\underline{k}^2)$ obowiązują dla rozwiązań (3) i (3a), gdzie argument członu zależnego od czasu jest ujemny $\mathrm{e}^{-\omega t}$; przy $\mathrm{e}^{+\omega t}$ obowiązuje znak –, patrz np. [6] i [8].

Stosownie do wyrażeń (4) i dla części repetencji: rzeczywistej k i urojonej κ, (a więc dla $\underline{k} = k \pm \mathrm{j}\kappa$) obowiązują podane poniżej wyrażenia:

$$k = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1\right]^{1/2} \quad ; \quad \kappa = \pm\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2} \tag{5}$$

W publikacjach dotyczących płaskich fal elektromagnetycznych nie ma ogólnej zgodności co do znaków + lub – przy κ, które zależą, ogólnie mówiąc, od sposobu zapisu równań dla fal składowych: elektrycznej i magnetycznej. W szczególności, jeśli w opicie fal E_x i B_y występuje człon wykładniczy $\mathrm{e}^{-\kappa z}$, to obowiązuje $\underline{k} = k + \mathrm{j}\kappa$, a dla $\mathrm{e}^{+\kappa z}$ trzeba konsekwentnie przyjmować $\underline{k} = k - \mathrm{j}\kappa$. Powołując się na Jacksona [4] i Griffithsa [2] będziemy tu, stosownie do (3) i (3a), przyjmować dla κ znak plus.[5)]

Część rzeczywista k (która bywa oznaczana także symbolem β) jest nazywana stałą rozchodzenia się fali, a κ charakteryzuje zanikanie fali; często stałą $\alpha = 2\kappa$ nazywa się współczynnikiem tłumienia fali, patrz [4].

Wyrażenia dla 2-giej definicji repetencji $\underline{\tilde{k}} = \tilde{k} + \mathrm{j}\tilde{\kappa}$, patrz (4a), będą:

$$\tilde{k} = f\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\varepsilon\cdot 2\pi f}\right)^2}+1\right]^{1/2} \quad ; \quad \tilde{\kappa} = \pm f\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\varepsilon\cdot 2\pi f}\right)^2}-1\right]^{1/2} \tag{5a}$$

Z powyższych uwag dotyczących znaków algebraicznych występujących w zespolonych wyrażeniach na $\underline{k}^2$ i $\underline{k}$ wynika proste stwierdzenie, że ani repetencja ani jej kwadrat, mimo że zależą od parametrów środowiskowych obszaru rozchodzenia się fali elektromagnetycznej, nie mogą być interpretowane jako uogólniony parametr środowiskowy, gdyż ich postać matematyczna zależy od kształtu funkcji opisujących falę, której można przyporządkowywać zróżnicowaną postać matematyczną.

[5)] Rozwiązania dla $\underline{k} = k - \mathrm{j}\kappa$ patrz np. [6] i [8].

Moduł i argument repetencji definiowanej wg 1 jest dany wyrażeniami:

$$K = |\underline{k}| = \sqrt{k^2 + \kappa^2} = \omega \left[\varepsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon\omega} \right)^2} \right]^{1/2} \quad ; \quad \phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\kappa}{k} \right) \tag{6}$$

a wg definicji 2:

$$\tilde{K} = |\underline{\tilde{k}}| = \sqrt{\tilde{k}^2 + \tilde{\kappa}^2} = f \left[\varepsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon \cdot 2\pi f} \right)^2} \right]^{1/2} \quad ; \quad \tilde{\phi} = \phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{k}} \right) \tag{6a}$$

Równania analizowanej tu fali płaskiej można zapisać w postaci zespolonej z wykorzystaniem repetencji jako równania Helmholtza – patrz Dodatek 1. Dla jej 1-szej definicji będzie:

$$\nabla^2 \underline{\boldsymbol{E}} + \underline{k}^2 \underline{\boldsymbol{E}} = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \underline{\boldsymbol{B}} + \underline{k}^2 \underline{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{7}$$

a dla 2-giej

$$\nabla^2 \underline{\boldsymbol{E}} + 4\pi^2 \underline{\tilde{k}}^2 \underline{\boldsymbol{E}} = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \underline{\boldsymbol{B}} + 4\pi^2 \underline{\tilde{k}}^2 \underline{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{7a}$$

Dopuszczalne rozwiązania wektorowe równań (7) lub (7a) dla składowych elektrycznej i magnetycznej pierwotnej fali płaskiej wynikają z wyrażeń (3) lub (3a) zapisanych z wykorzystaniem składowych repetencji: rzeczywistej (k lub $\tilde{k}$) i urojonej (κ lub $\tilde{\kappa}$). Zwrócimy tu jeszcze uwagę, że falę pierwotną można rozpatrywać jako pobudzoną przez zadane wartości wielkości falowych na brzegu obszaru Ω (zagadnienie Dirichleta). Dla repetencji określonej wg 1-szej lub 2-giej definicji mamy:

$$\underline{\boldsymbol{E}}(z,t) = \boldsymbol{x} \cdot \underline{\hat{E}}_x \, \mathrm{e}^{-\kappa z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(kz - \omega t)} \quad \text{i} \quad \underline{\boldsymbol{B}}(z,t) = \boldsymbol{y} \cdot \underline{\hat{B}}_y \, \mathrm{e}^{-\kappa z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(kz - \omega t)} \tag{8}$$

$$\underline{\boldsymbol{E}}(z,t) = \boldsymbol{x} \cdot \underline{\hat{E}}_x \, \mathrm{e}^{-2\pi\tilde{\kappa} z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\tilde{k}z - ft)} \quad \text{i} \quad \underline{\boldsymbol{B}}(z,t) = \boldsymbol{y} \cdot \underline{\hat{B}}_y \, \mathrm{e}^{-2\pi\tilde{\kappa} z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\tilde{k}z - ft)} \tag{8a}$$

W powyższych wyrażeniach człony wykładnicze zawierające κ opisują zanikanie fali w następstwie jej tłumienia przez gęstość prądu indukowanego w Ω, a człony zawierające k i zmienną t wyrażają zmienność fali w czasie wraz z przesunięciem fazowym proporcjonalnym do k. Iloraz wartości brzegowo-początkowych wektorów $\underline{\boldsymbol{E}}(z,t)$ i $\underline{\boldsymbol{B}}(z,t)$ jest proporcjonalny do modułu repetencji K danej wyrażeniami (6) i (6a), tj. dla jej 1-szej definicji będzie:

$$\frac{\underline{\hat{B}}_y}{\underline{\hat{E}}_x} = \frac{\hat{B}_y \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_B}}{\hat{E}_x \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_E}} = \frac{K \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}{\omega} \quad \text{lub odpowiednio dla 2-giej} \quad \frac{\underline{\hat{B}}_y}{\underline{\hat{E}}_x} = \frac{\hat{B}_y \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_B}}{\hat{E}_x \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_E}} = \frac{\tilde{K} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\phi}}}{f} \tag{9}$$

gdzie $\delta_E - \delta_B = \phi > 0$ reprezentuje przesunięcie fazowe (opóźnienie) składowej magnetycznej $\underline{\boldsymbol{B}}(z,t)$ względem składowej elektrycznej $\underline{\boldsymbol{E}}(z,t)$. Iloczyn stałej μ i odwrotności wyrażeń (9) określa tzw. impedancję falową $\underline{Z} = (\mu\omega)/(K\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}) = (\mu f)/(\tilde{K}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi})$.

3. RÓWNANIA FALI PŁASKEJ WYRAŻONE ZA POMOCĄ POTENCJAŁÓW

Równanie falowe dla fali płaskiej w liniowym środowisku przewodzącym można w sposób równoważny zapisać z zastosowaniem potencjałów: skalarnego elektrycznego φ, jednostka V, i wektorowego magnetycznego $\boldsymbol{A}$, jednostka Tm. Jak wiadomo wektorowy potencjał magnetyczny jest zdefiniowany równaniem:

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\ \mathrm{A} \tag{10}$$

a skalarny potencjał elektryczny równaniem:

$$-\boldsymbol{E}_{\mathrm{S}} = \mathbf{grad}\,\varphi \tag{11}$$

gdzie $\boldsymbol{E}_{\mathrm{S}}$ reprezentuje składową stacjonarną natężenia pola elektrycznego, w odróżnieniu od $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} = -\partial\boldsymbol{A}/\partial t$ symbolizującego indukowane natężenie pola elektrycznego.

Jak wiadomo, definicja rotacji nie jest jednoznaczna; nadaje jej się wybraną jednoznaczność przez zdefiniowanie $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$, co określa się jako cechowanie. Po zastosowaniu cechowania, patrz [4] i [5], w postaci:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = -\mu\left(\gamma\varphi - \varepsilon\cdot\partial\varphi/\partial t\right) \tag{12}$$

i przy podtrzymaniu uproszczenia że $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} \approx 0$, otrzymuje się równania polowe o postaci analogicznej do (1):

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \eta\gamma\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = 0 \quad \text{i} \quad \nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \eta\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{13}$$

którym odpowiadają równania Helmholtza, patrz Dodatek 2, które dla 1-szej lub 2-giej definicji repetencji przyjmują postać:

$$\nabla^2\underline{\boldsymbol{A}} - \underline{k}^2\underline{\boldsymbol{A}} = 0 \quad ; \quad \nabla^2\underline{\varphi} - \underline{k}^2\underline{\varphi} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla^2\underline{\boldsymbol{A}} - 4\pi^2\,\underline{\tilde{k}}^2\underline{\boldsymbol{A}} = 0 \quad ; \quad \nabla^2\underline{\varphi} - 4\pi^2\,\underline{\tilde{k}}^2\underline{\varphi} = 0 \tag{14a}$$

gdzie $\underline{k}^2$ i $\underline{\tilde{k}}^2$ są określone przez wyrażenia (4) lub (4a) a części rzeczywiste i urojone k, κ, $\tilde{k}$, $\tilde{\kappa}$ przez dodatnie wyrażenia (5) i (5a).

4. POMINIĘCIE PRĄDÓW PRZESUNIĘCIA

W środowisku dobrego przewodnika można, dla małych wartości ω, pominąć – jako nieistotne – prądy przesunięcia przyjmując $\gamma/(\omega\varepsilon) \gg 1$, co skutkuje tym, że kwadrat repetencji, którą w tym przypadku będziemy wyróżniać indeksem „prim", przyjmuje tylko wartości urojone – patrz Sikora [7]. Dla 1-szej definicji repetencji będzie więc:

$$\underline{k}'^2 \approx \mathrm{j}\,\gamma\mu\omega \tag{15}$$

stąd odpowiednio

$$\underline{k}' \approx \sqrt{\mathrm{j}\gamma\mu\omega} = (1+\mathrm{j})\frac{\sqrt{\gamma\mu\omega}}{\sqrt{2}} = (1+\mathrm{j})\,k' \tag{16}$$

a dla 2-giej definicji:

$$\underline{\tilde{k}}'^2 \approx (\mathrm{j}\gamma\mu f)/2\pi \tag{15a}$$

i stąd

$$\underline{\tilde{k}}' \approx \sqrt{\mathrm{j}\frac{\gamma\mu f}{2\pi}} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\gamma\mu f}{2\sqrt{2}\pi}} = (1+\mathrm{j})\,\tilde{k}' \tag{16a}$$

Tak więc, przy podanym wyżej ograniczeniu dla $\omega\,\varepsilon$, części (rzeczywista i urojona) repetencji są identyczne:

$$k' = \kappa' = \sqrt{(\gamma\mu\omega)/\sqrt{2}} \quad \text{i podobnie} \quad \tilde{k}' = \tilde{\kappa}' = \sqrt{(\gamma\mu f)/(2\sqrt{2}\pi)}\,, \tag{17}$$

co zresztą może potwierdzić wprowadzenie warunku granicznego $\gamma/(\omega\varepsilon) \gg 1$ dla każdego z czterech wyrażeń (5) i (5a). Odpowiednim modyfikacjom ulegają zależne od czasu funkcje wykładnicze występujące w wyrażeniach (8) i (8a) na składową elektryczną $\vec{\underline{\boldsymbol{E}}}$ i magnetyczną $\vec{\underline{\boldsymbol{B}}}$ fali płaskiej; będzie więc dla 1-szej i 2-giej definicji repetencji:

$$\underline{\boldsymbol{E}}(z,t) = \boldsymbol{x}\cdot\hat{\underline{E}}_x\,\mathrm{e}^{-k'z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k'z-\omega t)} \quad \text{i} \quad \underline{\boldsymbol{B}}(z,t) = \boldsymbol{y}\cdot\hat{\underline{B}}_y\,\mathrm{e}^{-k'z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k'z-\omega t)} \tag{18}$$

$$\underline{\boldsymbol{E}}(z,t) = \boldsymbol{x}\cdot\hat{\underline{E}}_x\,\mathrm{e}^{-2\pi\tilde{k}'z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\tilde{k}'z-ft)} \quad \text{i} \quad \underline{\boldsymbol{B}}(z,t) = \boldsymbol{y}\cdot\hat{\underline{B}}_y\,\mathrm{e}^{-2\pi\tilde{k}'z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\tilde{k}'z-ft)} \tag{18a}$$

W powyższych wyrażeniach zrezygnowano z rozróżnienia k' od κ' stosownie do tego, że przyjmują one w danym przypadku identyczne wartości. W przypadku analizy z pominięciem prądów przesunięcia moduł repetencji jest dany wyrażeniami: dla 1-szej definicji repetencji: $K' = \sqrt{\gamma\mu\omega}$, lub dla 2-giej: $\tilde{K}' = \sqrt{(\gamma\mu f)/(2\pi)}$, a argument $\phi' = \tilde{\phi}' = \pi/4$, stąd iloraz amplitud zespolonych redukuje się, dla 1-szej lub 2-giej definicji, do:

$$\frac{\hat{\underline{B}}_y}{\hat{\underline{E}}_x} = \frac{\hat{B}_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_B}}{\hat{E}_x\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_E}} = \frac{K'\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}{\omega} = \sqrt{\frac{\gamma\mu}{\omega}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} \quad \text{lub} \quad \frac{\hat{\underline{B}}_y}{\hat{\underline{E}}_x} = \frac{\hat{B}_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_B}}{\hat{E}_x\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_E}} = \frac{\tilde{K}'\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\phi}}}{f} = \sqrt{\frac{\gamma\mu}{2\pi f}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\phi}} \tag{19}$$

gdzie $\delta_B - \delta_E = \pi/4$.

5. ŚRODOWISKO NIEPRZEWODZĄCE

Dla środowiska nieprzewodzącego przyjmuje się po prostu $\gamma \to 0$, co prowadzi do repetencji rzeczywistej, której przyporządkowujemy tu indeks „bis”, będzie więc dla 1-szej definicji repetencji:

$$k^2 \approx k''^2 = \varepsilon \mu \omega^2 \tag{20}$$

$$k'' = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c} = K'' \quad ; \quad \kappa'' = 0 \tag{21}$$

a dla drugiej

$$\tilde{k}^2 \approx \tilde{k}''^2 = \varepsilon\mu f^2 \tag{20a}$$

$$\tilde{k}'' = f\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{f}{c} = \tilde{K}'' \quad ; \quad \kappa'' = 0 \tag{21a}$$

przy czym moduł repetencji identyfikuje się z jej składową rzeczywistą, co zapisano w wyrażeniach (21) i (21a), a jej argument $\phi'' = \tilde{\phi}'' = 0$.

Odpowiednie wyrażenia na składowe fali poprzecznej, w tym przypadku nie podlegającej tłumieniu, będą:

$$\underline{\boldsymbol{E}}(z,t) = \boldsymbol{y} \cdot \underline{\hat{E}}_x \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k''z-\omega t)} \quad \text{i} \quad \underline{\boldsymbol{B}}(z,t) = \boldsymbol{y} \cdot \underline{\hat{B}}_y \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k''z-\omega t)} \tag{22}$$

$$\underline{\boldsymbol{E}}(z,t) = \boldsymbol{x} \cdot \underline{\hat{E}}_x \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\tilde{k}''z-ft)} \quad \text{i} \quad \underline{\boldsymbol{B}}(z,t) = \boldsymbol{y} \cdot \underline{\hat{B}}_x \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\tilde{k}''z-ft)} \tag{22a}$$

Stosunek amplitud zespolonych wynosi w tym przypadku

$$\frac{\underline{\hat{B}}_y}{\underline{\hat{E}}_x} = \frac{\hat{B}_y \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_B}}{\hat{E}_y \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_E}} = \frac{K'' \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}0}}{\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu} \quad \text{lub odpowiednio} \quad \frac{\underline{\hat{B}}_y}{\underline{\hat{E}}_x} = \frac{\hat{B}_y \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_B}}{\hat{E}_x \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_E}} = \frac{\tilde{K}'' \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}0}}{f} = \sqrt{\varepsilon\mu} \tag{23}$$

6. PODSUMOWANIE

W niniejszym opracowaniu zestawiono w uporządkowany sposób równania falowe i odpowiadające im równania Helmholtza dotyczące monoharmonicznej, płaskiej fali elektromagnetycznej w liniowym środowisku maxwellowskim. Rozróżniono równania wyrażone:

- dla wielkości bezpośrednich, tj. dla natężenia pola elektrycznego ***E*** i indukcji magnetycznej ***B***,
- dla potencjałów: skalarnego elektrycznego φ i wektorowego magnetycznego ***A***.

Równania polowe i równania Helmholtza zapisano za pomocą pomocniczej wielkości zespolonej $\underline{k}$ zależnej od parametrów środowiskowych środowiska, w którym rozchodzą się fale, dla której stosowano termin *repetencja*, a nie jej rozpowszechniony synonim *liczba falowa*, który oceniono jako semantycznie niepoprawny.

Zwrócono uwagę na fakt, że pierwotną wielkością jest raczej kwadrat repetencji niż sama repetencja z jej częściami: rzeczywistą i urojoną, i że do opisu fali elektromagnetycznej można przyporządkowywać tym częściom różne znaki algebraiczne (+ lub –), modyfikując stosownie wyrażenia na składowe $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ fali elektromagnetycznej. Przykładowo Griffiths [2] i Jackson [4] stosują znak plus dla obydwu części $\underline{k}$ a Smythe [8] ogranicza się w zasadzie do zapisu równań przede wszystkim za pomocą parametrów środowiskowych, wprowadzając pomocniczo wielkości proporcjonalne do k i κ odpowiadające przyjęciu $\underline{k} = k - \mathrm{j}\kappa$.

Pokazano jak kształtują się wyrażenia na fale $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ w przypadkach szczególnych, gdy w środowisku poddanym działaniu płaskiej fali monochromatycznej prądy przesunięcia są pomijalnie małe, a także gdy środowisko nie wykazuje cechy tłumienia fali.

Nie stwierdzono określonych preferencji dla definiowania repetencji za pomocą 2-giej definicji tj. $\underline{k} = 1/\lambda$ w porównaniu do 1-szej definicji $\underline{k} = (2\pi)/\lambda$, którą przyjmują – jak sadzę w większości – autorzy klasycznych monografii z zakresu elektrodynamiki.

DODATEK 1 – Równania Helmholtza bezpośrednie dla płaskiej fali elektromagnetycznej

Fala elektromagnetyczna w obszarze Ω scharakteryzowanym przez trzy wielkości środowiskowe: ε, μ, γ o wartościach rzeczywistych const jest zdefiniowana dwoma jednorodnymi równaniami falowymi opisującymi jej składowe: elektryczną i magnetyczną:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} - \eta\gamma \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{1-d1}$$

Równania te są konsekwencją równań Maxwella w wyżej zdefiniowanym środowisku, które zapiszemy w postaci:

$$\text{(i)}\ \ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \quad ; \quad \text{(ii)}\ \ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\text{(iii)}\ \ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \quad ; \quad \text{(iv)}\ \ \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon \tag{2-d1}$$

przy dodatkowym przyjęciu, że gęstość prądu występująca w równaniu (i) jest proporcjonalna do natężenie pola elektrycznego $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$. Po obustronnym zastosowaniu operacji **rot** do równania (i) i uwzględnieniu: po pierwsze tożsamości $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\boldsymbol{B} = \mathbf{grad}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} - \nabla^2 \boldsymbol{B}$, i po drugie zerowania się dywergencji $\boldsymbol{B}$ zgodnie z równaniem (iii), otrzymuje się wyrażenie na laplasjan $\nabla^2 \boldsymbol{B} = -\mu\,[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot}\boldsymbol{E}) + \gamma(\mathbf{rot}\boldsymbol{E})]$, które po uwzględnieniu równania (ii) prowadzi bezpośrednio do drugiego równania falowego (1-d1).

Pierwsze z równań falowych (1-d1) otrzymuje się przez identyczne zastosowanie obustronnej rotacji do równania (ii) wraz z założeniem dodatkowym, że gęstość objętościowa ładunku jest pomijalna $\rho \approx 0$.

Przyjmując, że pierwotna fala płaska przemieszcza się w trójwymiarowym obszarze Ω w kierunku $\boldsymbol{z}$ prostokątnego układu współrzędnych, składowa elektryczna fali jest skierowana w kierunku $\boldsymbol{x}$, a składowa magnetyczna w kierunku $\boldsymbol{y}$; można składowe fali zapisać wyrażeniami:

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{x}\cdot\underline{\hat{E}}_x\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)}\quad;\quad \boldsymbol{B}(z,t)=\boldsymbol{y}\cdot\underline{\hat{B}}_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)} \qquad (3\text{-d1})$$

gdzie $\underline{\hat{E}}_x=\hat{E}_x\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_E}$ i $\underline{\hat{B}}_y=\hat{B}_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_B}$, a stała zespolona $\underline{k}$ reprezentuje repetencję.

Oznaczmy pomocniczo $\underline{E}_x=\underline{\hat{E}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)}$ i $\underline{B}_y=\underline{\hat{B}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)}$ i stosownie do (3-d1) zapiszmy pochodne cząstkowe fal składowych względem zmiennych z i t jak następuje:

$$\nabla^2\underline{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{x}\cdot\nabla^2 E_x=\boldsymbol{x}\cdot\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=-\boldsymbol{x}\cdot\underline{k}^2E_x\quad;\quad\frac{\partial\underline{\boldsymbol{E}}}{\partial t}=-\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{j}\omega E_x\quad;\quad\frac{\partial^2\underline{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}=-\boldsymbol{x}\cdot\omega^2E_x \qquad (4\text{-d1})$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{y}\cdot\nabla^2 B_y=\boldsymbol{y}\cdot\frac{\partial^2 B_y}{\partial z}=-\boldsymbol{y}\cdot\underline{k}^2B_y\quad;\quad\frac{\partial\underline{\boldsymbol{B}}}{\partial t}=-\boldsymbol{y}\cdot\mathrm{j}\omega B_y\quad;\quad\frac{\partial^2\underline{\boldsymbol{B}}}{\partial t^2}=-\boldsymbol{y}\cdot\omega^2B_y \qquad (5\text{-d1})$$

Po wprowadzeniu powyższych pochodnych cząstkowych do (2-d1) i po obustronnym podzieleniu pierwszego z równań (2d) przez $-\boldsymbol{x}\cdot E_x$ lub podobnie drugiego przez $-\boldsymbol{y}\cdot B_y$ otrzymuje się obowiązujące dla monoharmonicznej fali płaskiej wyrażenie zespolone na kwadrat repetencji:

$$\underline{k}^2=\mu\,\omega\left(\varepsilon\,\omega+\mathrm{j}\gamma\right) \qquad (6\text{-d1})$$

z zastosowaniem którego szczegółową, wektorową postać równań falowych (1-d1) można zapisać w postaci równań Helmholtza:

$$\nabla^2\underline{\boldsymbol{E}}+\mu\,\omega\left(\varepsilon\,\omega+\mathrm{j}\,\gamma\right)\underline{\boldsymbol{E}}=0\,;\quad \text{tj. } \nabla^2\underline{\boldsymbol{E}}+\underline{k}^2\underline{\boldsymbol{E}}=0 \qquad (7\text{-d1})$$

$$\nabla^2\underline{\boldsymbol{B}}+\mu\,\omega\left(\varepsilon\,\omega+\mathrm{j}\,\gamma\right)\underline{\boldsymbol{B}}=0\,;\quad \text{tj. } \nabla^2\underline{\boldsymbol{B}}+\underline{k}^2\underline{\boldsymbol{B}}=0 \qquad (8\text{-d1})$$

DODATEK 2 – Równania Helmholtza potencjalne dla płaskiej fali elektromagnetycznej

Jak wiadomo wprowadzenie potencjałów: skalarnego elektrycznego φ i wektorowego magnetycznego $\boldsymbol{A}$ definiuje się przez:

$$\mathbf{grad}\,\varphi=-\boldsymbol{E}\quad;\quad\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \qquad (1\text{-d2})$$

przy czym definicja rotacji $\boldsymbol{A}$ obowiązuje z dokładnością do dowolnie wybranej dywergencji określanej jako cechowanie div $\boldsymbol{A}$ = const. Równania Maxwella (2-d1) dla monoharmonicznej fali płaskiej w środowisku zdefiniowanym w Dodatku 1 podlegają formalnie następującej modyfikacji. Wprowadza się $\boldsymbol{A}$ podstawiając w równaniach: (iv) **rot** $\boldsymbol{B}$ = **rot rot** $\boldsymbol{A}$ i w (iii) $\boldsymbol{B}$ = **rot** $\boldsymbol{A}$**.** co skutkuje tym, że równanie (iii) przyjmuje postać: $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}=-\mathbf{rot}\,\partial\boldsymbol{A}/\partial t$. Jego całkowanie po zmiennych rotacji (z zamianą kolejności różniczkowania $\mathbf{rot}\cdot\partial/\partial t$ na $\partial/\partial t\cdot\mathbf{rot}$) prowadzi do wyrażenia

$$\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{A}/\partial t-\mathbf{grad}\,\varphi \qquad (2\text{-d2})$$

gdzie $\mathbf{grad}\,\varphi$ reprezentujący tu stałą całkowania interpretuje się jako stacjonarny składnik natężenie pola elektrycznego, a $\partial\boldsymbol{A}/\partial t$ jako jego indukowany składnik. Równanie (iv) przyjmuje postać:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = -\mu\gamma\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}\,\varphi\right) - \mu\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \tag{3-d2}$$

Korzystając z niejednoznaczności definicji **rot** ***A*** = ***B*** definiuje się dywergencję za pomocą cechowania:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\mu\left(\gamma\varphi + \varepsilon \cdot \partial\varphi/\partial t\right) \tag{4-d2}$$

i wprowadzając do (3-d2) identyczność operatorową dla **rot rot** ***A*** = **grad** div ***A*** – $\nabla^2 \boldsymbol{A}$ i wyżej wybraną wartość div ***A*** otrzymujemy:

$$\mathbf{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu\left(\gamma\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) - \mu\left(\gamma\,\mathbf{grad}\,\varphi + \varepsilon\,\mathbf{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \tag{5-d2}$$

$$-\,\mathbf{grad}\left(\mu\gamma\varphi + \mu\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \nabla^2\boldsymbol{A} = -\left(\mu\gamma\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) - \left(\mu\gamma\,\mathbf{grad}\,\varphi + \mu\varepsilon\,\mathbf{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \tag{6-d2}$$

Po obustronnym uproszczeniu przez gradienty otrzymuje się równanie falowe dla wektorowego potencjału magnetycznego ***A***

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \mu\gamma\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0 \tag{7-d2}$$

Równanie falowe dla potencjału elektrycznego φ otrzymuje się na podstawie równania (iv) Maxwella, patrz (2-d1), w którym przyjmiemy $\rho \approx 0$, a za ***E*** podstawimy (2-d2). Stosując zmianę kolejności różniczkowania $\operatorname{div}\cdot\partial/\partial t = \partial/\partial t \operatorname{div}$ i uwzględniając, że operator $\operatorname{div}\mathbf{grad} = \nabla^2$ mamy:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = -\operatorname{div}\cdot\partial\boldsymbol{A}/\partial t - \operatorname{div}\mathbf{grad}\,\varphi = 0 \qquad \text{tj.} \qquad -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \nabla^2\varphi = 0 \tag{8-d2}$$

i wprowadzając do (8-d2) div ***A*** według (4-d2) otrzymujemy jednorodne równanie falowe dla φ w typowej postaci:

$$\nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t} - \mu\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{9-d2}$$

Równania falowe (7-d2) i (9-d2) można dla pierwotnej fali płaskiej zapisać w postaci zespolonej jako równania Helmholtza:

$$\nabla^2\underline{\boldsymbol{A}} - \underline{k}^2\boldsymbol{A} = 0 \qquad ; \qquad \nabla^2\underline{\varphi} - \underline{k}^2\underline{\varphi} = 0 \tag{10-d2}$$

w których dla kwadratu repetencji zespolonej obowiązuje identyczne wyrażenie (4), które wyznaczono w Dodatku 1, wzór (6-d1). Pokażemy tę identyczność na przykładzie wektorowego potencjału magnetycznego składowej magnetycznej pierwotnej, płaskiej fali monochromatycznej rozchodzącej się w kierunku $\boldsymbol{z}$, która jest dana wyrażeniem (3-d1), tj. $\boldsymbol{y}\cdot\underline{\hat{B}}_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)}$

Wektorowy potencjał magnetyczny ma w tym przypadku tylko jedną składową zdefiniowaną jako $\boldsymbol{y}\cdot\partial\underline{A}_x/\partial z = \boldsymbol{y}\cdot\underline{\hat{B}}_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)}$, z czego wynikają szczegółowe, niżej podane zależności na $\underline{A}_x$ i jego pochodne cząstkowe:

$$\underline{A}_x = \int \underline{B}_y\cdot\mathrm{d}\,z = \frac{1}{\mathrm{j}\underline{k}}\underline{\hat{B}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)} \qquad ; \qquad \partial^2\underline{A}_x/\partial z^2 = \mathrm{j}\underline{k}\cdot\underline{\hat{B}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)} \tag{11-d2}$$

$$\partial \underline{A}_x / \partial t = -\frac{\mathrm{j}\omega}{\mathrm{j}\underline{k}} \cdot \underline{\hat{B}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)} \quad ; \quad \partial^2 \underline{A}_x / \partial t^2 = -\frac{\omega^2}{\mathrm{j}\underline{k}} \cdot \underline{\hat{B}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)} \tag{12-d2}$$

Podstawiając powyższe do pierwszego z równań falowych (10-d2) i upraszczając je przez wektor $\boldsymbol{y} \cdot \underline{\hat{B}}_y\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\underline{k}z-\omega t)}$ otrzymuje się równanie samych współczynników określonych przez powyższe pochodne cząstkowe, w postaci $\mathrm{j}\underline{k} + (\mu\varepsilon\omega^2)/(\mathrm{j}\underline{k}) + (\mathrm{j}\,\mu\gamma\omega)/(\mathrm{j}\underline{k}) = 0$, z którego wynika wyrażenie na kwadrat repetencji $\underline{k}^2 = \mu\omega(\varepsilon\omega + \mathrm{j}\gamma)$ identyczne jak (3), które obowiązuje dla równań falowych (7).

LITERATURA

1. Couramt R., Gilbert H.: Methoden der mathematischn Physik I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968,
2. Griffiths D.J.: Podstawy elektrodynamiki, PWN, Warszawa, 2001,
3. IEC 60050-726: International Electrotechnical Vocabulary, Charter 728: Teletransmission lines and waveguides, 1982,
4. Jackson J,D.: Elektrodynamika klasyczna, PWN, Warszawa, 1982,
5. Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna, t.2 Pole elektromagnetyczne, PWN, Warszawa 1999,
6. Pawluk K.: Rozwiązania podstawowe dla 3-wymiarowero równania Helmholtza, Prace IEL z. 188, str. 5-18, 1996,
7. Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego, WNT, Warszawa, 1977,
8. Smythe W.B.: Static and dynamic electricity, Nowy Jork, Toronto, Londyn, 1950.

Rękopis dostarczono dnia 24.06.2013 r.

REPETENCY OF THE ELECTROMAGNETIC WAVE AND ITS DEFICIENT DESIGNATIONS

Krystyn PAWLUK

ABSTRACT *Within the appreciable developing of tomography for both the medicine and engineering the electromagnetic waves are applied to penetrate an examined region. In particular, the monochromatic flat waves are concerned. It is supposed, that the computer analysis of the regions submitted to the electromagnetic wave tomography is actually far advanced, but the corresponding mathematical approach to the wave phenomena has, however, a rather cursory treatment. The base approach to the electromagnetic waves (in a direct form and in a complex notation as the Helmholtz equations) are presented. The special attempt is done to considering a complex quantity $\underline{k}$ termed 'repetency' or 'wave number', for which various designations are chosen in publications. Relevant formulations of the wave equations are presented in the paper. They correspond to two various designations of $\underline{k}$ and are depending also on the choice between the algebraic sign ± to* Im($\underline{k}$) or to Im($\underline{k}^2$).

Keywords: *electromagnetic waves, repetency*