

Tomasz WOJTASZEK, Janusz MROCZKA

UL. B. PRUSA 53/55, 53-307, WROCŁAW, (POLITECHNIKA WROCŁAWSKA, KMEIF)

Modelowanie laserowego anemometru trójwiązkowego**Mgr inż. Tomasz WOJTASZEK**

Tomasz Wojtaszek jest absolwentem Wydziału Elektroniki Politechniki Wrocławskiej. Obecnie pracuje jako asystent w Katedrze Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej. Problematyka jego rozprawy doktorskiej dotyczy zagadnień związanych z modelowaniem anemometrów laserowych w pomiarach właściwości ośrodków wielofazowych.



e-mail: tomasz.wojtaszek@pwr.wroc.pl

Streszczenie

Niniejszy artykuł przedstawia model rozproszenia światła wykorzystywany do symulacji numerycznej właściwości i odpowiedzi trójwiązkowego laserowego anemometru dopplerowskiego, służącego do pomiaru parametrów fizycznych cząstek ośrodka dwufazowego. Przedstawiono porównanie cech objętości pomiarowej anemometru dwu- i trójwiązkowego. Zaprezentowano odpowiedź: faza - wielkość cząstki i częstotliwościową anemometru.

Słowa kluczowe: anemometria laserowa trójwiązkowa, modelowanie, rozproszenie światła

Modelling of a Three Beam Laser Anemometer**Abstract**

Model of light scattering of three beam laser Doppler anemometer is presented. Its numerical and functional properties as well as response of the system are investigated. A comparison between measurements volume of three and two beam system is presented. Frequency response and phase shift vs. particle diameter diagrams are presented.

Keywords: three beam phase Doppler system, light scattering, particle sizing

1. Wstęp

Fazowa anemometria dopplerowska, w swojej najprostszej wersji, wykorzystuje dwie wiązki spójnego, skorelowanego promieniowania laserowego do uformowania objętości pomiarowej o niewielkich rozmiarach geometrycznych (ułamki milimetrów). W ten sposób otrzymuje się przestrzeń interferencyjną – objętość pomiarową, która może być przemieszczana w niemal dowolny sposób i stanowi jeden ze zdalnych komponentów głowicy pomiarowej. Przy odpowiednio dobranych parametrach fizycznych oświetlacza, głowica stanowi element całkowicie obojętny dla środowiska poddawanego analizie. W wyniku formowania przestrzeni, gdzie przecinają się dwie wiązki laserowe, obserwuje się szereg wzajemnie równoległych prążków interferencyjnych oddalonych od siebie o odległość będącą funkcją kąta między wiązkami i długości fali elektromagnetycznej lasera.

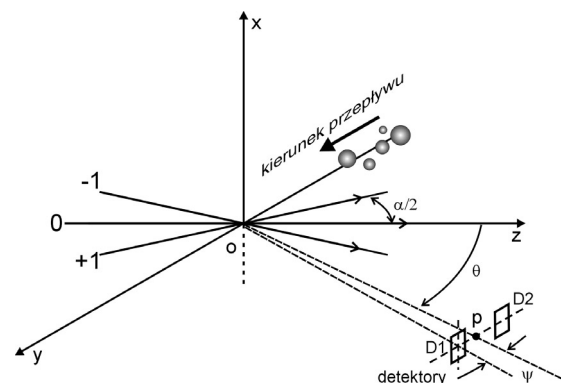
Ze względu na stosowane oświetlacze (np. pracujące w modzie TEM₀₀), zdecydowanie najczęściej stosowany jest gaussowski profil natężenia promieniowania w funkcji promienia wiązki laserowej. W wyniku interferencji dwóch takich promieni natężenie całkowite posiada charakter funkcji Gaussa. Koherentne wiązki, wykorzystywane do tworzenia objętości pomiarowej, powstają poprzez dyfrakcję wiązki laserowej na transmisyjnych siatkach dyfrakcyjnych lub na komórkach Bragg'a. Przy odpowiednim doborze transmitancji fazowej lub amplitudowej

Prof. dr hab. inż. Janusz MROCZKA

Kierownik Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej. Zajmuje się metodologią obserwacji i eksperymentu, algorytmizacją problemu odwrotnego, modelowaniem matematycznym pól fizycznych, analizą spektralną i polaryzacyjną promieniowania rozproszonego, reprezentacjami czasowo-częstotliwościowymi w przetwarzaniu danych.



e-mail: janusz.mroczka@pwr.wroc.pl



Rys. 1. Geometria układu anemometru trójwiązkowego – układ planarny. Oznaczenia -1, 0, +1 indeksują wiązki laserowe tworzące w przecięciu objętość roboczą.

Fig. 1. Geometry of the three beam Doppler system – planar setup. Symbols -1, 0, +1 characterize intersecting laser beams creating measurement volume.

siatki dyfrakcyjnej można uzyskać podział wiązki pierwotnej na trzy wyjściowe (np. wykorzystując siatkę z transmitancją sinusoidalnie zmienną). W wyniku podziału otrzymamy wiązkę centralną rzędu 0 oraz wiązki boczne rzędu +1 i -1 odchylone od kierunku wiązki centralnej o kąt wynikający z fizycznej konstrukcji siatki [1]. Wszystkie wiązki leżą w tej samej płaszczyźnie. Kierunek propagacji wiązki centralnej pokrywa się z kierunkiem wiązki pierwotnej (Rys.1).

Dwuwiązkowe fazowe systemy dopplerowskie cechuje ograniczona użyteczność w chwili, gdy trajektoria badanej cząstki jest równoległa do prążków objętości roboczej. Taki przypadek zachodzi, gdy cząstka porusza się równoległe do osi optycznej systemu dopplerowskiego. Wówczas brak jest sygnału, zawierającego istotne informacje o parametrach ruchu posiewu.

Jeżeli istnieje potrzeba zbadania trajektorii cząstki wzdłuż osi optycznej z (Rys.1) układu anemometrycznego przedstawione rozwiązanie należy wzbogacić o kolejny układ oświetlający prostopadły do pozostałych. Rozwiązanie znacznie komplikuje system pomiarowy, zwiększa jego koszt i obniża walory funkcjonalne. Dodatkowy oświetlacz bądź układ detekcyjny, gdy występują jako odrębne elementy systemu, w istotny sposób ograniczają dostęp do przestrzeni pomiarowej.

Niedogodnościom opisanym powyżej można zaradzić konstruując objętość pomiarową z trzech wiązek koherentnego promieniowania laserowego [2,3]. W miejscu ich superpozycji powstanie objętość pomiarowa – obraz interferencyjny tworzony przez trzy pola elektromagnetyczne. Wiązka rzędu 0 pokrywa się z osią optyczną systemu i jednocześnie stanowi przedłużenie pierwotnej podlegającej dyfrakcji wiązki laserowej. Wiązki rzędów +1 i -1 w typowy sposób przecinają się wzajemnie interferując z wiązką rzędu 0. System trójwiązkowy jest

nazywany planarnym ze względu na to, iż wiązki rzędów -1 , 0 , $+1$ propagują w jednej płaszczyźnie.

Otrzymana objętość pomiarowa posiada szereg cech, które mogą być wykorzystane do modyfikacji i rozszerzenia możliwości analizy systemu dopplerowskiego. Pęczki tworzące objętość pomiarową zyskują dodatkowy element modulacyjny, który może być wykorzystany do pomiaru położenia cząstki wzdłuż osi optycznej. Dodatkowy czynnik modulujący pozwala na określenie pozycji cząstki jak również, jednocześnie, zwiększa dwukrotnie w stosunku do klasycznych rozwiązań zakres detekcji fazy sygnału.

2. Model matematyczny zjawiska

W pierwszym kroku tworzenia teoretycznego modelu planarnego anemometru trójwiązkowego wzięto pod uwagę elektromagnetyczne pole padające jako superpozycję trzech fal płaskich. Czynność tę można wykonać bez szkody dla opisu, bowiem rozpatrując wiązki Gaussa lokalnie, w pobliżu ich przewężenia, można traktować je jako fale płaskie. Wówczas całkowite padające pole elektryczne E_i tworzące przestrzeń interferencyjną będzie miało postać:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{+1i} + \mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{-1i} \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_{+1i} = E_{+1i} \exp(j(\mathbf{k}_{+1}\mathbf{r} - 2\pi(f + f_s)t)) \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_{-1i} = E_{-1i} \exp(j(\mathbf{k}_{-1}\mathbf{r} - 2\pi(f - f_s)t)) \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_{-1i} = E_{0i} \exp(j(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - 2\pi ft)) \quad (4)$$

gdzie: wektory falowe \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_{+1} , \mathbf{k}_{-1} odpowiadają odpowiednio kierunkom wiązek rzędu 0 , $+1$ i -1 . Wektor \mathbf{r} opisuje położenie detektora. E_{+1i} , E_{-1i} , E_{0i} są amplitudami kolejnych wiązek.

Częstotliwość f_s jest wprowadzona do układu przy pomocy wirującej siatki dyfrakcyjnej lub komórki Bragg'a dając dodatkowe przesunięcie częstotliwości między wiązkami odchylonymi $+1$ i -1 . Umożliwia ono pomiar zwrotu wektora prędkości poruszającej się cząstki wzdłuż osi y oraz pozwala ustalić pozycję cząstki wzdłuż osi z rozważanego układu optycznego. Wiązka rzędu 0 nie jest przesuwana częstotliwościowo [1].

Za pomocą wektora Poyting'a można obliczyć natężenie padającego pola I_i w płaszczyźnie yz dla interferometru trójwiązkowego pracującego w ośrodku homogenicznym i niemagnetycznym o przenikalności magnetycznej μ_0 :

$$\begin{aligned} I_i = & \frac{k}{4\pi\nu\mu_0} [E_{+1i}^2 + E_{-1i}^2 + E_{0i}^2 \\ & + 2\operatorname{Re}\{E_{+1i}E_{-1i} \exp(j[(\mathbf{k}_{+1} - \mathbf{k}_{-1})\mathbf{r} - 4\pi f_s t])\} \\ & + E_{+1i}E_{0i} \exp(j[(\mathbf{k}_{+1} - \mathbf{k}_0)\mathbf{r} - 2\pi f_s t]) \\ & + E_{-1i}E_{0i} \exp(j[(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{-1})\mathbf{r} + 2\pi f_s t])] \end{aligned} \quad (5)$$

Modelowanie profilu gaussowskiego wiązki padającej dokonano wykorzystując model Kogelnik'a [4]. Wiązkę laserową o długości fali λ i rozkładzie Gaussa (TEM00) wygodnie jest przedstawić w kartezjańskim układzie współrzędnych (u, v, w) , w którym zachodzi jej propagacja wzdłuż osi w . Jeżeli laserowa wiązka Gaussa jest liniowo spolaryzowana zgodnie z kierunkiem osi v , to wektor pola elektrycznego E opisującego taką wiązkę można zapisać zależnością [1,4]:

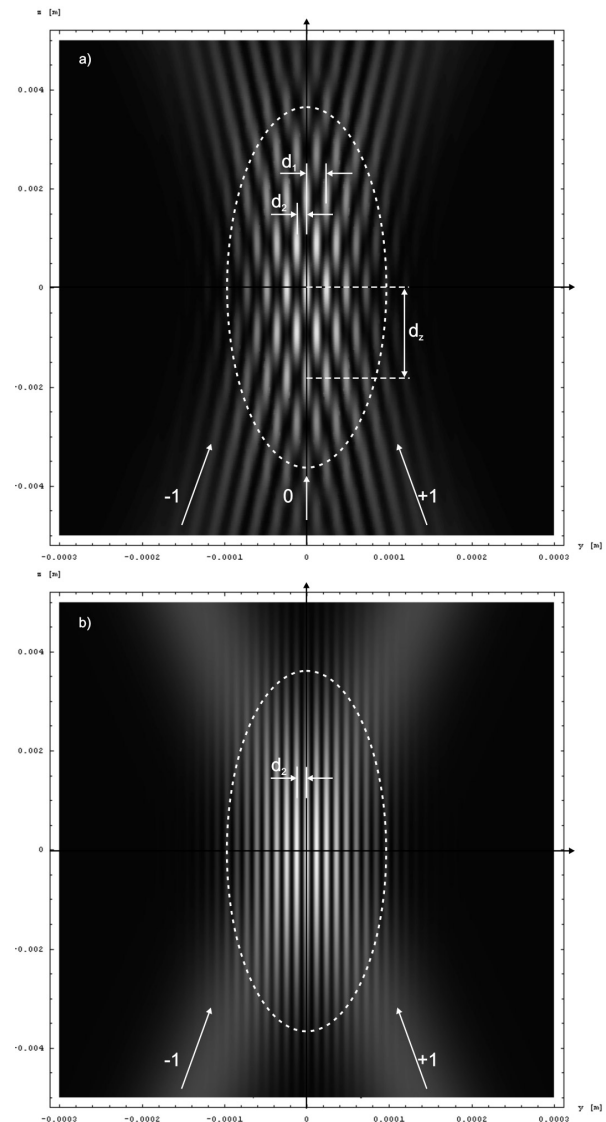
$$\begin{aligned} E_u = & E_0\omega_0^2 \left(\frac{1}{W(w)^2} + \frac{ik}{2R(w)} \right) \\ & \cdot \exp \left[-h^2 \left(\frac{1}{W(w)^2} + \frac{ik}{2R(w)} \right) \right] \exp(-ikw) \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie: ω_0 - promień przewężenia wiązki, k - liczba falowa, E_0 - stała, natomiast pozostałe zmienne przedstawione są zależnościami:

$$W(w) = \omega_0 \sqrt{1 + 4 \frac{w^2}{k^2 \omega_0^4}} \quad (7)$$

$$R(w) = w \left(1 + \frac{k^2 \omega_0^4}{4w^2} \right) \quad (8)$$

$$h = u^2 + v^2 \quad (9)$$



Rys.2. Superpozycja natężenia wiązek gaussowskich dla płaszczyzny yz . Natężenie normalizowane w przedziale $[0;1]$: a) przypadek trzech wiązek, b) przypadek dwóch wiązek.

Fig.2. Superposition of the normalized intensity of Gaussian beams in yz -plane. a) three beam case, b) two beam case.

Wielkość $W(w)$ jest funkcją promienia wiązki (wielkość plamki) względem zmiennej w , dla której amplituda pola maleje do wartości $1/e$. $R(w)$ jest promieniem krzywizny frontu fali dla pozycji w . Gdy $w = 0$ (w miejscu maksymalnego przewężenia wiązki) $W(w) = \omega_0$, a fala staje się płaska.

Rysunek 3 przedstawia rzeczywistą postać przekrojów rozkładu natężenia I_i w płaszczyźnie yz układu anemometru. Na rysunku 3a widoczny jest efekt superpozycji trzech koherentnych wiązek gaussowskich o identycznych parametrach posiadających znormalizowane i jednostkowe natężenie. Promień przewężenia wiązek $\omega_0 = 100\mu\text{m}$, kąt między wiązkami $\alpha/2 = 1,5^\circ$, $\lambda = 632,8\text{nm}$. Rysunek 3b przedstawia przypadek klasyczny z odciętą wiązką rzędu 0. Wartości parametrów d_1 , d_2 , d_z podane są wzorami (10) – (12). Elipsa zaznaczona linią przerywaną pokazuje zasięg obszaru uważanego za efektywną objętość pomiarową [5]. Mapy rozkładów natężeń zostały otrzymane zgodnie z modelem opisanym wzorami (5), (6).

Gdy pod uwagę zostanie wzięty kąt między wiązkami +1 i 0 (lub -1 i 0), to odległość między prążkami jest równa:

$$d_1 = \lambda / \left(\sin \alpha/2 \right) \quad (10)$$

Dla kąta utworzonego z wiązek +1 i -1 otrzymuje się klasyczną relację:

$$d_2 = \lambda / \left(2 \sin \alpha/2 \right) \quad (11)$$

$$d_z = 2\pi / k (1 - \cos \alpha/2) \quad (12)$$

Jeśli przyjmie się uproszczenie aproksymując sinusy małych kątów ich wartościami ($\sin(\alpha) \approx \alpha$), to można założyć, że odległość między tak powstałymi prążkami jest równoważna odległości d_2 obliczonej dla $\alpha/4$.

Równoległe do siebie dwa zbiory prążków zmodulowane są funkcją sinusoidalnie zmienną wzdłuż osi z z maksimum przypadającym dla $z = 0$. Okres modulacji d_z wyznaczony jest zależnością (12).

2.1. Modele rozproszenia światła

Macierz amplitudowa S opisująca pole rozproszone na cząstce, w ogólnym przypadku dla cząstek o dowolnym kształcie zawiera cztery niezerowe elementy macierzy amplitudowej: S_{11} , ..., S_{44} [6, 8]. Dla przypadku cząstek sferycznych tylko elementy leżące na diagonalnej mają wartości różne od zera. Dla cząstek sferoidalnych macierz S jest pełna. Równanie wiążące składowe rozproszone $E_{s\theta}$, $E_{s\varphi}$ z polem padającym $E_{i\theta}$, $E_{i\varphi}$ jest następujące:

$$\begin{bmatrix} E_{s\theta} \\ E_{s\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{i\theta} \\ E_{i\varphi} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Dla każdej z wiązek można stworzyć oddzielne macierze amplitudowe. Indeks górny odpowiada rzędowi dyfrakcyjnemu wiązki. Po rozwinięciu równania (16) dla anemometru trójwiązkowego, składniki pola rozproszonego przybiorą formę:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s\theta} = & (E_{i\theta} S_{11}^{-1} + E_{i\varphi} S_{12}^{-1} + E_{i\theta} S_{11}^0 \\ & + E_{i\varphi} S_{12}^0 + E_{i\theta} S_{11}^+ + E_{i\varphi} S_{12}^+) \mathbf{n}_\theta \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s\varphi} = & (E_{i\theta} S_{21}^{-1} + E_{i\varphi} S_{22}^{-1} + E_{i\theta} S_{21}^0 \\ & + E_{i\varphi} S_{22}^0 + E_{i\theta} S_{21}^+ + E_{i\varphi} S_{22}^+) \mathbf{n}_\varphi \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie: \mathbf{n}_φ , \mathbf{n}_θ są wersorami właściwymi dla danej składowej pola. Całkowite pole rozproszone jest sumą składowych (14) i (15).

Dla układu dwuwiązkowego (dla wiązek -1 i +1) składniki amplitudowe z indeksem 0 zanikają.

Dla układu planarnego, w którym detektory oraz wektor polaryzacji elektrycznej pola padającego są w jednej płaszczyźnie - yz (tj. gdy $\varphi = \pi/2$) następuje redukcja składników pola rozproszonego prowadząca do zależności:

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{s\theta} = (E_{i\theta} S_{11}^{-1} + E_{i\theta} S_{11}^0 + E_{i\theta} S_{11}^+) \mathbf{n}_\theta \quad (16)$$

Gdy układ pomiarowy nie jest planarny, tj. gdy przemieszczamy detektory poza płaszczyznę xy , lub używamy innej polaryzacji fali padającej, w mocy pozostają zależności (14), (15).

Dla cząstek sferycznych elementy macierzy S nie leżące na diagonalnej zerują się i dostajemy przypadek opisywany teorią Lorenz'a - Mie [6] lub jej uogólnieniem [7]. Macierz S dla cząstki o dowolnym kształcie (np. sferoidalnym) może być obliczona przy użyciu metody macierzy T [8]. Cząstki sferyczne wielowarstwowe symulowane są przy wykorzystaniu idei zaproponowanej pierwotnie przez Wang'a i Wu [9].

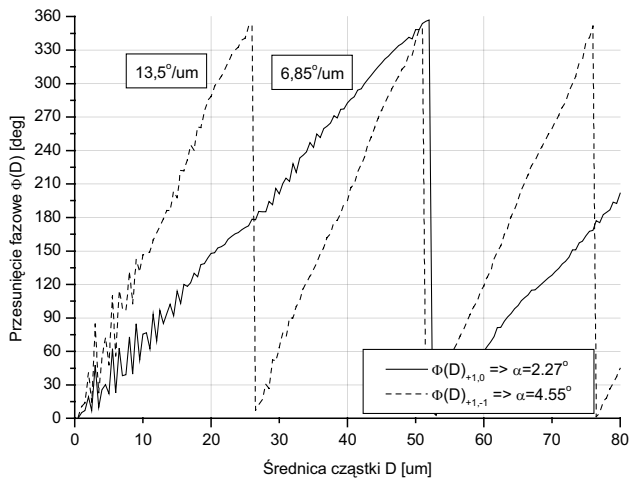
3. Rezultaty

Symulacje numeryczne przeprowadzone z wykorzystaniem opisanego modelu pozwalają określić właściwości pomiarowe anemometru trójwiązkowego. Rysunek 3 przedstawia sygnał przesunięcia fazowego, powodowanego rozmieszczeniem przestrzennym detektora D1 względem D2:

$$\Delta\Phi_{12} = \Phi_{D1} - \Phi_{D2} \quad (17)$$

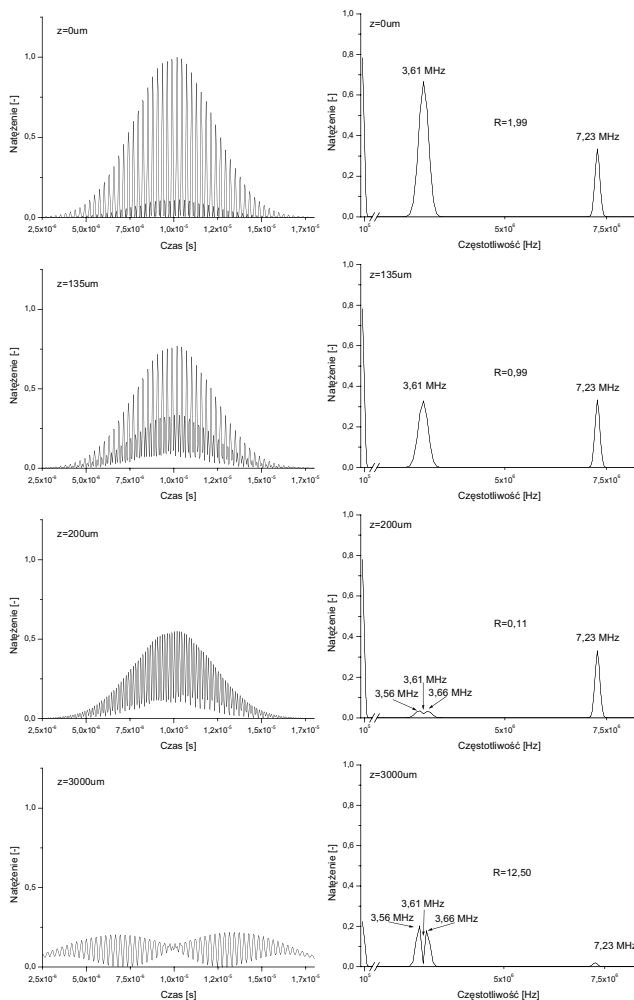
Sferyczna cząstka jednorodna o średnicy $D \in [0,5; 80]$ umieszczona jest statycznie w centrum objętości pomiarowej. Widoczne są dwa sygnały fazy pochodzące z różnych wiązek $\Phi(D)_{+1,-1}$, $\Phi(D)_{+1,0}$. Parametry symulacji dotyczą systemu z detektorem o aperturze kołowej, kącie akceptacji detektora $\Omega/2 = 1^\circ$, kącie rozproszenia $\theta = 30^\circ$. Kąt elewacji detektorów $\psi = \pm 12^\circ$, promień przewężenia wiązki $\omega_0 = 100\mu\text{m}$, $\alpha/2 = 2,27^\circ$, długość fali oświetlającej $\lambda = 632,8\text{nm}$.

Konfiguracja układu fazowego anemometru dopplerowskiego pracującego w trybie trójwiązkowym pozwala na dwukrotne rozszerzenie możliwości pomiaru wartości różnic fazy, bez użycia dodatkowego detektora. Umożliwia to pomiar średnic cząstek sferycznych w dwukrotnie większym zakresie. Dla powyżej zdefiniowanego układu symulacyjnego współczynniki konwersji fazy C_p na wielkość cząstki równe są odpowiednio 13,5 [deg/um] i 6,85 [deg/um]. Pozwala to na pomiar wielkości cząstek o średnicach dochodzących do 55um. Oscylacyjna część wykresu uwidoczniła dla cząstek o niewielkich średnicach spowodowana jest tym, iż cząstka przechodzi całą swą objętością przez obszary ciemne i jasne zmieniając gwałtownie fazę sygnału na przeciwną. Im cząstka mniejsza tym silniejsze oscylacje. Dla zwiększających się kątów między wiązkami oświetlającymi, zakres mierzonych średnic będzie się zmniejszał. Zmniejszeniu również będzie ulegał zakres średnic, dla których przebieg wykazuje charakter oscylacyjny. Zabiegiem, który pozwala na ominięcie zakresu oscylacyjnego jest wykreślenie prostej o współczynniku kierunkowym równym danemu C_p (pokrywającej się z liniowym zakresem zmienności fazy) i jej interpolacja dla zakresu oscylacyjnego. Dla prostej o nachyleniu 6,85 [deg/um] zauważalny jest silniejszy charakter oscylacyjny w obszarze większych średnic cząstek, w porównaniu do prostej 13,5 [deg/um]. Dla tej prostej zakres mierzonych średnic jest również większy. Rysunek 4 przedstawia przykładowe widmo uzyskane podczas przelotu cząstki przez strefę interferencyjną - parametrem jest przesunięcie cząstki względem osi z .



Rys.3. Wykres przesunięcia fazowego w funkcji wielkości cząstki $\Delta\Phi(D)$ dla anemometru pracującego w trybie fazowym.

Fig.3. Phase shift vs. particle diameter $\Delta\Phi(D)$ for the anemometer in phase mode.



Rys.4. Wykres odpowiedzi anemometru w dziedzinie czasu i częstotliwości dla różnego położenia cząstki wzdłuż osi z.

Fig.4. Time and frequency response vs. particle translation along z-axis.

Widoczne są dwa składniki widma dopplerowskiego $G(f_1)$ i $G(f_2)$. Ich iloraz jest funkcją, którą można wykorzystać do pomiaru położenia cząstki względem osi z:

$$R(z) = \frac{\max(G(f_2))}{\max(G(f_1))} \quad (18)$$

Parametry symulacji są następujące: prędkość cząstki $v = 20\text{m/s}$, częstotliwość modulująca $f_s = 5\text{MHz}$, $\text{SNR} = 40\text{dB}$, częstotliwość próbkowania $v = 50\text{MHz}$. Cząstka przemieszcza się trajektorią równoległą do osi y. Wartości położenia cząstki zostały wybrane tak, aby pokazać zachowanie się widma w zależności od okresu funkcji modulującej d_z . Widoczne jest że w zakresie $z = 0 - 200\mu\text{m}$ wartość funkcji $R(z)$ zmienia się w przedziale $[1,99; 0,11]$. W przypadku pozycji cząstki $z = d_z$ zaobserwowano zanik prążka o częstotliwości niższej f_1 - w tym miejscu natężenie funkcji modulującej przybiera wartość minimalną, a powstałe artefakty w postaci dwóch prążków o wartościach 3,56 i 3,66 MHz wynikają z rozdzielczości generowanego widma i zastosowanego algorytmu dopasowującego funkcję Gaussa do obwiedni prążków widma. Amplituda prążka f_2 pozostała niezmienna. Odstępstwa od wartości minimalnej $R(z = 200\mu\text{m}) = 0,11$ wynikają z tego, iż wiązki oświetlające miały promień przewężenia $\omega_0 = 100\mu\text{m}$, co jest wartością trudną do uzyskania w układzie rzeczywistym. Wnioskować należy, iż funkcja $R(z)$ jest zależna ω_0 .

Zaprezentowane sygnały cechuje idealny kształt obwiedni. W sygnale czasowym widoczne są dwie składowe modulacyjne o różnej amplitudzie.

Dla odległości $z = 3000\mu\text{m}$ widoczny jest efekt wyjścia cząstki poza strefę objętości roboczej. Widmo amplitudowe jest już silnie zniekształcone i uwidacznia się tu efekt, znany z klasycznego anemometru dwuwiązkowego [5]. W tym przypadku cząstka przechodzi kolejno przez dwie przylegające, szcążkowe przestrzenie interferencyjne tworzone przez dwie pary wiązek oświetlających: +1 i 0 oraz 0 i -1. Stąd zanik składowej częstotliwościowej f_2 na rzecz wzmocnienia składników o niższych częstotliwościach generowanych dzięki obecności prążków odległych o d_z .

Praca wykonana w ramach grantu KBN 8 T10C 029 26

4. Literatura

- [1] Albrecht H.E., Borys M., Damaschke N., Tropea C.: Laser Doppler and Phase Doppler Measurement Techniques. Springer – Verlag, Berlin, 2003.
- [2] Onofri F., Radev S.: 3-Coherent Beams Phase Doppler and Laser Doppler Velocimetry Measurements Techniques. Application of Laser Techniques to Fluid Mechanics, 12th Int. Symposium 2004, Lisbon.
- [3] Mroczyk J., Wojtaszek T.: Model of Light Scattering on Spheroidal Particle with the Use of Three Beam Phase Doppler System. SPIE Europe Photonics – Optical Sensing II, Strasbourg, April 2006.
- [4] Kogelnik H., Li T.: Laser beams and resonators Appl. Opt. Vol. 5, 1966, 1550 – 1567.
- [5] Elsner J. W., Drobnik S.: Metrologia turbulencji przepływów - tom 18: Maszyny Przepływowe pod red. E.S. Burki, PAN – Ossolineum, Wrocław 1995.
- [6] Bohren C. F., Huffman D. R.: Absorption and Scattering of Light by Small Particle. Wiley-Interscience, New York 1983.
- [7] Gouesbet G., Grehan G., Mahieu B., K. F. Ren: Electromagnetic Scattering of Shaped Beams (Generalized Lorenz Mie Theory), 1998, unpublished book obtained from authors.
- [8] Mishchenko M.I., Travis L.D., Lacis A.A.: Scattering, absorption, and emission of light by small particles, Cambridge University Press, Cambridge 2002.
- [9] Wu Z. S., Wang Y. P.: Electromagnetic scattering for multilayered sphere: Recursive algorithms. Radio Sci. Vol. 26, 6, 1991, 1393-1401.

Artykuł recenzowany