

Zygmunt Lech WARSZA¹, Adam IDŹKOWSKI²

¹ PRZEMYSŁOWY INSTYTUT AUTOMATYKI I POMIARÓW, Warszawa

² POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

Analiza błędów granicznych i niepewności mostków sensorowych jako przetworników rezystancji na napięcie

Doc. dr inż. Zygmunt Lech WARSZA

Ukończył Wydział Elektryczny Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–63 i 1994–95, Politechnika Warszawska 1960–70, Politechnika Świętokrzyska 1970–78, zorganizował i kierował Ośrodkiem Aparatury Pomiarowej IMGW 1978–82 oraz Zakładem Automatyki i Pomiarów Instytutu Chemii Przemysłowej 1983–92, wykładał na Politechnice Radomskiej 1983–2002, obecnie - Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP. Autorstwo ponad 180 publikacji, 4 monografii.



e-mail: zlw@op.pl

Dr inż. Adam IDŹKOWSKI

Ukończył studia magisterskie w 2001 r. na kierunku elektronika i telekomunikacja na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. W 2013 r. uzyskał tytuł doktora w dyscyplinie elektrotechnika, specjalność metrologia i systemy pomiarowe. Jest adiunktem w Katedrze Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii. Jego zainteresowania obejmują komputerowe systemy pomiarowe, mostki pomiarowe, inżynierię biomedyczną. Jest autorem (współautorem) 42 publikacji.



e-mail: a.idzkowski@pb.edu.pl

Streszczenie

Po krótkim wprowadzeniu w tabeli 1 podano funkcje rozwarciowych współczynników przetwarzania rezystancji na napięcie i ich zrationalizowane postacie iloczynowe dla przetwornika w postaci mostka rezystancyjnego (4R) o zasilaniu prądowym lub napięciowym i dowolnych przyrostach rezystancji jego ramion. Przedstawiono dwa zaproponowane ujęcia błędów i niepewności: jednorodne, w wartościach względnych odniesionych do czułości początkowych i dwuskładnikowe – z wyodrębnieniem składników dla stanu początkowego i dla przyrostu funkcji przetwarzania. Rozpatrzono przetworniki rezystancji – mostki, o jednakowych rezystancjach początkowych i pięciu najczęściej stosowanych wariantach ich przyrostów. Przedstawiono charakterystyki ich rozwarciowych funkcji przetwarzania oraz błędów granicznych i niepewności standardowych przy zasilaniu prądowym i napięciowym. Dla wariantów mostka o liniowych funkcjach przetwarzania podano dwie uogólnione postacie błędów granicznych. Wskazano możliwości zastosowania obu opisów dokładności.

Słowa kluczowe: przetwornik, mostek rezystancyjny, błąd, niepewność.

Functions of limit errors and uncertainties of sensor bridges as resistance to voltage converters

Abstract

After short introduction, in table 1 functions of transfer coefficients and their rationalized forms of the converter R/U as the unloaded four arms bridge of arbitrary variable arm resistances, supplied from current or voltage source, are given together with their error propagation formulas. Two types of description of their errors and uncertainties, i.e. related to initial sensitivities of functions of bridge transfer coefficients and their rationalized double component forms for zero and increments of these transfer function, are introduced. Metrological properties of the commonly used bridge of similar initial arm resistances in balance and five variants of their increments are discussed. Transfer coefficient, limited error (worse case) and standard uncertainty as functions of relative increments in broad range are shown for these variants. Generalized formulas for bridges of the linear transfer function are introduced. Both methods are found also as the universal solution for other parametric sensor circuits.

Keywords: converter, resistance bridge, accuracy, error, uncertainty.

1. Wstęp

Przy współczesnym wysokim poziomie technologii cyfrowej dokładność pomiarów zależy głównie od metrologicznych właściwości analogowej części torów pomiarowych oraz od właściwego doboru modelu dla badanego obiektu i oprogramowania. Dlatego też do oceny dokładności systemów pomiarowych i niepewności pomiarów konieczna jest szczegółowa identyfikacja i opis właściwości wejściowego układu kondycjonowania sygnału, często scalonego konstrukcyjnie z czujnikiem.

Parametry większości czujników zależą w sposób uwikłany od kilku wielkości i mogą zmieniać się nawet w znacznych zakresach. Tylko nieliczne z nich, np. termorezystory i termistory są selektywne. Dotychczas preferuje się układy pomiarowe z czujnikami pojedynczych wielkości, a wpływy innych zmniejsza się przez ekranowanie, termostatazację, kompensację w układach różnicowych lub korygowanie sygnału za pomocą dodatkowych czujników. Rozwiązania takie ograniczają miniaturyzację i rozdzielnosć w badaniach rozkładu przestrzennego pól wielkości ze sobą sprzężonych. Alternatywą jest równoczesny pomiar kilku wielkości różnie wpływających na parametry elementów czujnika, w tym za pomocą niekonwencjonalnie zasilanych przetworników o układach mostkowych [2, 13].

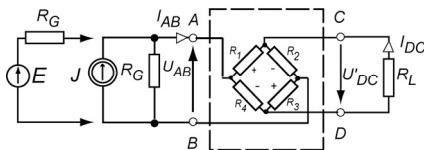
W literaturze rozpatrywano zwykle dokładność układów pomiarowych z poszczególnymi rodzajami czujników pojedynczej wielkości, np. z termistorami dla pomiaru temperatury, tensometrami – dla naprężenia i siły. Właściwości mostków nierównoważonych jako układów do kondycjonowania sygnałów w pomiarach czujnikami parametrycznymi omówiono szczegółowo w [1 - 3]. Do opisu dokładności układów stosuje się błędy bieżące systematyczne i przypadkowe oraz dla najgorszego przypadku błędy graniczne, a dla opisu dokładności pomiarów - niepewności. Nazywa się je tutaj ogólnie miarami dokładności. W monografii [2] i następnych pracach [4 - 12] wyznaczono opisy miar dokładności parametrów roboczych na zaciskach zewnętrznych układu 4T dla dowolnych wartości przyrostów jego rezystancji oraz ich miar i różnych, w tym niekonwencjonalnych sposobów zasilania. Opracowano też, podobny jak dla woltomierzy cyfrowych, opis tych miar metodą dwuskładnikową [9 - 12]. Ujęcia te omawia się poniżej w skrócie. Zasadniczym celem tej pracy jest jednak graficzne przedstawienie charakterystyk współczynników przetwarzania oraz ich błędów granicznych i niepewności w funkcji przyrostu rezystancji dla stosowanych zwykle w pomiarach podstawowych wariantów mostka o jednakowych rezystancjach początkowych, oznaczonego tu symbolem 4R₁₀. Analiza tych przebiegów umożliwi ujawnić właściwości metrologiczne mostków sensorowych nieopisywane w literaturze.

2. Rozwarciowe funkcje przetwarzania mostka 4R i ich miary dokładności

W opisie dokładności urządzeń pomiarowych stosuje się dwa rodzaje miar:

- błędy bieżące, graniczne i przypadkowe znamionowych parametrów przyrządów pomiarowych,
- niepewność rozszerzona wyniku pomiarów szacowana według zaleceń Przewodnika GUM na postawie niepewności standardowej typu A, wyznaczanej z rozrzutu obserwacji pomiarowych, i niepewności standardowej typu B, estymowanej dla wypadkowego rozkładu nieusuniętych przez poprawki błędów składowych systemu pomiarowego mogących wystąpić w danym pomiarze.

Na rysunku 1 podano schemat mostka sensorowego jako pa-
sywnego przetwornika przyrostów jego rezystancji na napięcie.



Rys. 1. Schemat układu 4R jako czwórnik typu X
Fig. 1. Scheme of the 4R circuit as X type twoport

Podstawowe równanie tego układu jest następujące

$$U'_{DC} = r_{21} I_{AB} - R_{CD} I_{DC} \tag{1}$$

Dla układu nieobciążonego $R_L \rightarrow \infty, I_{DC} \rightarrow 0, U'_{DC} \rightarrow U_{DC}^\infty$, stąd

$$U_{DC}^\infty = r_{21} I_{AB} \text{ lub } U_{DC}^\infty = k_{21} U_{AB} \tag{1a,b}$$

Dla $R_G \ll R_{AB}$ występuje idealne zasilanie prądowe, $I_{AB} = J$, a gdy $R_G \ll R_{AB}$ -idealne zasilanie napięciowe, $U_{AB} = E$.

W układzie z rysunku 1 może zmieniać się zarówno tylko jedna rezystancja czujnika, np. R_1 , jak i równocześnie dwie lub cztery, zarówno niezależnie, jak i jako ze sobą sprzężone.

W tabeli 1 podano wzory dla błędów bieżących, granicznych i niepewności standardowych (na ciemniejszym tle) zarówno

zmiennej rezystancji $R_i = R_{i0}(1 + \varepsilon_i)$ jak i dla współczynników przetwarzania niezrównoważonego mostka 4R z rys. 1, jako przetwornika przy zasilaniu prądowym J oraz napięciowym E .

Ze wzorów (1a,b), przy zmiennych rezystancjach $R_i = R_{i0}(1 + \varepsilon_i)$ układu mostkowego o wartościach początkowych R_{i0} w stanie równowagi układu (6) i dowolnych przyrostach względnych ε_i wyznaczono rozwarciowe współczynniki przetwarzania: r_{21} - przy zasilaniu prądowym (8) i k_{21} - przy zasilaniu napięciowym (9) mostka 4R jako funkcje przyrostów ε_i i unormowanych ich postaci (7a,b,c) względem rezystancji R_{i0} dla stanu równowagi. Po zastosowaniu opisów miar dokładności (3a) - (5c) rezystancji R_i otrzymano względne miary dokładności obu współczynników przetwarzania podane w postaciach zracjonalizowanych (10) - (18). Jeśli rezystancje R_i są rezystancjami czujnika, to taki opis funkcji przetwarzania układu z rys. 1 i miar ich dokładności jest wspólny dla czujników rezystancyjnych o różnych charakterystykach względem wielkości mierzonej i wielkości wpływających. Zależności dla dowolnego zasilania i obciążenia omówiono w [2, 5].

Rzeczywiste wartości początkowe rezystancji R_{i0} i ich przyrosty ε_i różnią się zwykle od wartości znamionowych i pełna równowaga mostka nie zachodzi, a funkcje przetwarzania wynoszą

$$r_{21} + \Delta_{r21} \quad k_{21} + \Delta_{k21} \tag{19a,b}$$

Błędy bezwzględne $\Delta_{r21}, \Delta_{k21}$ funkcji r_{21}, k_{21} , liczone względem znamionowych ich wartości są sumami

$$\Delta_{r21} = \Delta_{r210} + \Delta_{r21r} \quad \Delta_{k21} = \Delta_{k210} + \Delta_{k21k} \tag{20a,b}$$

Tab. 1. Miary dokładności rezystancji R_i i rozwarciowych funkcji przetwarzania nieobciążonego mostka 4R jako przetwornika R/U - przypadek ogólny
Tab. 1. Accuracy measures of variable resistance R_i and of transfer functions of the open-circuit 4R bridge from Fig. 1 as R/U converter - general case

Zmienna rezystancja	Miara dokł.	błąd bieżący	błąd graniczny	niepewność standardowa
$R_i = R_{i0}(1 + \varepsilon_i)$ (2) $\varepsilon_i \geq -1$	bezwzględna	$\Delta_i = \Delta_{i0}(1 + \varepsilon_i) + R_{i0} \Delta_{\varepsilon_i}$ (3a)	$ \Delta_i = \Delta_{i0}(1 + \varepsilon_i) + R_{i0} \varepsilon_i \delta_{\varepsilon_i} $ (3b)	$\bar{\Delta}_{R_i} = \sqrt{w_{i0}^2 \delta_{i0}^2 + w_{\varepsilon_i}^2 \delta_{\varepsilon_i}^2 + 2w_{i0} w_{\varepsilon_i} \delta_{i0} \delta_{\varepsilon_i}}$ (3c)
	względna	$\delta_i = \frac{\Delta_i}{R_{i0}} = \delta_{i0}(1 + \varepsilon_i) + \varepsilon_i \delta_{\varepsilon_i}$ (4a) $\delta_{R_i} = \frac{\Delta_i}{R_i} = \delta_{i0} + \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i} \delta_{\varepsilon_i}$ (5a)	$ \delta_i = \left \frac{\Delta_i}{R_{i0}} \right = \delta_{i0}(1 + \varepsilon_i) + \varepsilon_i \delta_{\varepsilon_i} $ (4b) $ \delta_{R_i} = \left \frac{\Delta_i}{R_i} \right = \delta_{i0} + \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i} \delta_{\varepsilon_i} $ (5b)	$\bar{\delta}_i = \frac{\bar{\Delta}_i}{R_{i0}} = \sqrt{\delta_{i0}^2 (1 + \varepsilon_i)^2 + \varepsilon_i^2 \delta_{\varepsilon_i}^2}$ (4c) $\bar{\delta}_{R_i} = \frac{\bar{\Delta}_i}{R_i} = \sqrt{\delta_{i0}^2 + \frac{\varepsilon_i^2}{(1 + \varepsilon_i)^2} \delta_{\varepsilon_i}^2}$ (5c)
Rozwarciowe funkcje przetwarzania				
Parametry układu przetwornika 4R		a) prądowo - napięciowa r_{21}		
Warunek równowagi $r_{210} = 0, k_{210} = 0$ $\frac{R_{10} R_{30} = R_{20} R_{40}}{R_{20} = m R_{10}, R_{40} = n R_{10}, R_{30} = mn R_{10}}$ (6, 7a,b,c)		$r_{21} \equiv \frac{U'_{DC}}{I_{AB}} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{\sum R_i} \equiv t_0 f(\varepsilon_i)$ (8) gdzie: $t_0 = \frac{m n R_{10}}{(1+m)(1+n)}, f(\varepsilon_i) = \frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{1 + \varepsilon_{\Sigma R}}, \varepsilon_{\Sigma R} = \frac{\varepsilon_1 + m \varepsilon_2 + n(\varepsilon_3 + m \varepsilon_4)}{(1+m)(1+n)}$ (8a) $\varepsilon_i = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4] \quad \Delta L(\varepsilon_i) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_4$		
		b) napięciowa k_{21}		
		$k_{21} \equiv \frac{U'_{DC}}{U_{AB}} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \equiv k_0 f_E(\varepsilon_i)$ (9) gdzie: $k_0 = \frac{m}{(1+m)^2}, f_E(\varepsilon_i) = \frac{\Delta L(\varepsilon_i)}{(1 + \varepsilon_{12})(1 + \varepsilon_{34})}, \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_1 + m \varepsilon_2}{1+m}, \varepsilon_{34} = \frac{\varepsilon_3 + m \varepsilon_4}{1+m}$ (9a)		
Typ układu	Miara	a) Miary dokładności $\delta_{r21}, \delta_{r21} , \bar{\delta}_{r21}$ funkcji r_{21}		b) Miary dokładności $\delta_{k21}, \delta_{k21} , \bar{\delta}_{k21}$ funkcji k_{21}
Przypadek ogólny $R_1 = R_{10}(1 + \varepsilon_1)$ $R_2 = R_{20}(1 + \varepsilon_2)$ $R_3 = R_{30}(1 + \varepsilon_3)$ $R_4 = R_{40}(1 + \varepsilon_4)$ $\varepsilon_i \geq -1$	błędy bieżące: bezwzględny i względny	$\Delta_{r21} = R_1 \frac{R_3 - r_{21}}{\sum R_i} \delta_{R_1} - R_2 \frac{R_4 + r_{21}}{\sum R_i} \delta_{R_2} + R_1 \frac{R_1 - r_{21}}{\sum R_i} \delta_{R_3} - R_4 \frac{R_2 + r_{21}}{\sum R_i} \delta_{R_4}$		$\Delta_{k21} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} (\delta_{R_1} - \delta_{R_2}) + \frac{R_3 R_4}{(R_3 + R_4)^2} (\delta_{R_3} - \delta_{R_4})$
		$\delta_{r21} \equiv \frac{\Delta_{r21}}{t_0} = \sum_{i=1}^4 w_{R_i} \delta_{R_i} = \sum_{i=1}^4 w_{R_i} \left(\delta_{i0} + \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i} \delta_{\varepsilon_i} \right)$ (10) gdzie: $w_{R_i} = \frac{1 + \varepsilon_i}{1 + \varepsilon_{\Sigma R}} \left[(-1)^{j-1} (1 + \varepsilon_j) - \frac{r_{21}}{R_{j0}} \right] \quad j=3, 4, 1, 2$ dla $i=1, 2, 3, 4$ (10a)		$\delta_{k21} \equiv \frac{\Delta_{k21}}{k_0} = \sum_{i=1}^4 w_{k_i} \delta_{R_i} = \sum_{i=1}^4 w_{k_i} \left(\delta_{i0} + \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i} \delta_{\varepsilon_i} \right)$ (11) gdzie: $w_{R_1} = -w_{R_2} = \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}{1 + \varepsilon_{12}}, w_{R_3} = -w_{R_4} = \frac{(1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_4)}{1 + \varepsilon_{34}}$ n - dowolne
	błęd wzg. graniczny względna niepewność	$ \delta_{r21} = \sum_{i=1}^4 w_{R_i} \delta_{R_i} = \sum_{i=1}^4 w_{R_i} \left(\delta_{i0} + \frac{ \varepsilon_i }{1 + \varepsilon_i} \delta_{\varepsilon_i} \right)$ (12) $\bar{\delta}_{r21} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 w_{R_i}^2 \delta_{R_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 w_{R_i}^2 \left(\delta_{i0}^2 + \frac{\varepsilon_i^2}{(1 + \varepsilon_i)^2} \delta_{\varepsilon_i}^2 \right)}$ (14) współczynniki korelacji $k_{ij}=0$	$ \delta_{k21} = \sum_{i=1}^4 w_{k_i} \delta_{R_i} = \sum_{i=1}^4 w_{k_i} \left(\delta_{i0} + \frac{ \varepsilon_i }{1 + \varepsilon_i} \delta_{\varepsilon_i} \right)$ (13) $\bar{\delta}_{k21} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 w_{k_i}^2 \delta_{R_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 w_{k_i}^2 \left(\delta_{i0}^2 + \frac{\varepsilon_i^2}{(1 + \varepsilon_i)^2} \delta_{\varepsilon_i}^2 \right)}$ (15) współczynniki korelacji $k_{ij}=0$	
			Miary dokł. dla $r_{21}=0, k_{21}=0$ błęd bieżący $\delta_{210} = \delta_{10} - \delta_{20} + \delta_{30} - \delta_{40}$ (16)	błęd graniczny $ \delta_{210} _m = \sum \delta_{i0} $ (17)

Wygodniejsze w użyciu są względne miary dokładności, ale blisko równowagi układu tracą one sens fizyczny, gdyż przy $\Delta_{r210} \neq 0$, $\Delta_{k210} \neq 0$ miary bezwzględne odnoszone do wartości $r_{21} \rightarrow 0$, $k_{21} \rightarrow 0$ dążą do $\pm\infty$. Aby tego uniknąć, w pracach [2], [4 - 11] zaproponowano dwa inne opisy miar mostka.

Podstawowy sposób polega na odniesieniu miar bezwzględnych funkcji przetwarzania do ich czułości początkowych t_0 , k_0 jako parametrów niezależnych dla danego mostka od przyrostów ε_i jego rezystancji R_i [4 - 8]. Opis jest jednakowy dla dowolnych funkcji przetwarzania r_{21} , k_{21} i nazwano go **jednorodnym** [9]. Rozwinięta postać błędu δ_{r21} według (10) zawiera aż 8 składników. Po połączeniu ich w dwie grupy, tj. δ_{210} dla stanu początkowego mostka oraz $\delta_{r21\varepsilon}(\varepsilon_i)$ - poza nim, otrzymuje się

$$\delta_{r21} \equiv \frac{\Delta_{r21}}{t_0} = \sum_{i=1}^4 w'_{Ri} (\delta_{i0} + \frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i} \delta_{\varepsilon i}) \equiv \delta_{210} + \delta_{r21\varepsilon}(\varepsilon_i) \quad (21)$$

gdzie:

- w'_{Ri} według (10a),
- względny błąd początkowy r_{21} (błąd zera) dla $\varepsilon_i=0$

$$\delta_{210} \equiv \frac{\Delta_{r210}}{t_0} = \delta_{10} - \delta_{20} + \delta_{30} - \delta_{40} \quad (21a)$$

- błąd względny dla $r_{21} \neq 0$ po odjęciu od δ_{r21} błędu zera δ_{210}

$$\delta_{r21\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 \left[w'_{Ri}(\varepsilon_i) - (-1)^{i-1} \right] \delta_{i0} + \sum_{i=1}^4 w'_{Ri} \frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i} \delta_{\varepsilon i} \quad (21b)$$

Podobnie błąd dla napięciowej funkcji przetwarzania k_{21} wyniesie

$$\delta_{k21} \equiv \frac{\Delta_{k21}}{k_0} = \delta_{210} + \delta_{k21\varepsilon}(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^4 w'_{ki} (\delta_{i0} + \frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i} \delta_{\varepsilon i}) \quad (22)$$

Współczynniki $w'_{ki} = \frac{1}{k_0} w_{ki}$ w (22) wyznacza się z równania propagacji błędów (11). Postacie błędów i wynikających z nich błędów granicznych i niepewności dla różnych przypadków mostka omówiono i zestawiono w tabelach w [4 - 11].

Wzory (10), (11) i wynikające z nich miary (12) - (15) opisują dokładność mostków bez korekcji ich zera. Napięcie początkowe mostka można korygować bądź w nim samym poprzez analogową lub sterowaną cyfrowo regulację jednej lub równocześnie dwu jego rezystancji (potencjometr z zestykiem w wierzchołku), bądź poza mostkiem, np. bezpośrednio na wyjściu - napięciem przeciwnym lub po przetworzeniu sygnału z mostka na postać cyfrową. Jeśli mostek ma wewnętrzną regulację zera, to po ustawieniu $\delta_{210}=0$ liczba niezależnych błędów δ_{i0} maleje do trzech. Z (21a) wynika, że pomimo korekcji zera mostka, przy nierównowadze $r_{21} \neq 0$ pierwszy składnik błędu $\delta_{r21\varepsilon}$ nadal będzie zależeć od błędów początkowych $\delta_{i0} \neq 0$. Podobnie jest dla błędu $\delta_{k21\varepsilon}$. Korekcja zera nie jest więc skuteczna w całym zakresie zmian rezystancji R_i , nawet gdy błędy $\delta_{\varepsilon i}$ są pomijalne, lub ich wpływy kompensują się [8, 10].

W [9] zaproponowano zmodyfikowany sposób opisu dokładności rozwarciowych funkcji przetwarzania r_{21} , k_{21} przetwornika R/U o układzie mostkowym. Ma on formę dwuskładnikową, taką jak się stosuje dla woltomierzy cyfrowych i innych przyrządów o szerokim zakresie pomiaru. Błąd względny δ_{210} wartości początkowych r_{210} , k_{210} obu funkcji r_{21} , k_{21} , czyli błąd zera, jest jednakowy, a błędy bezwzględne Δ_{r21r} , Δ_{k21k} znamionowych funkcji przetwarzania r_{21} , k_{21} z (19a,b) zmieniają się od zera i wówczas ich wartości odniesione do wartości r_{21} lub k_{21} jako względne błędy δ_{r21r} , δ_{k21k} będą skończone. Z (10a) i (21):

$$\delta_{r21r} \equiv \frac{\Delta_{r21} - \Delta_{r210}}{r_{21}} = \frac{1}{f(\varepsilon_i)} \delta_{r21\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 w'_{r i0} \delta_{i0} + \sum_{i=1}^4 w'_{r \varepsilon i} \delta_{\varepsilon i} \quad (23)$$

gdzie: $w'_{r i0} = (-1)^{i-1} \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_i \varepsilon_j - \varepsilon_{\Sigma R}}{\Delta L(\varepsilon_i)} - t_0 \frac{1 + \varepsilon_i}{R_{j0}(1 + \varepsilon_{\Sigma R})}$;

$w'_{r \varepsilon i} = \left[\frac{(-1)^{i-1}(1 + \varepsilon_j)}{\Delta L(\varepsilon_i)} - \frac{t_0}{R_{j0}(1 + \varepsilon_{\Sigma R})} \right] \varepsilon_i$; mnożnik $(-1)^{i-1} = +1$ dla

i nieparzystych 1, 3, a $(-1)^{i-1} = -1$ dla i parzystych 2, 4.

Wszystkie współczynniki $w'_{r i0}$ w (23) mają wartości skończone, gdyż przy zbliżaniu się do równowagi początkowej $r_{21}=0$, przyrosty w ich licznikach jak i w mianownikach równocześnie zbliżają się do zera, tj. $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$ oraz $\Delta L(\varepsilon_i) \rightarrow 0$ i $w'_{r i\varepsilon} \rightarrow 0$.

Błąd δ_{r21r} jest odpowiednikiem błędu $\delta_{\varepsilon i}$ (4a) dla względnego przyrostu ε_i pojedynczej rezystancji R_i (2).

Z (8a) i (23) otrzymuje się dwuskładnikową formę błędu bezwzględnego Δ_{r21}

$$\Delta_{r21} = \Delta_{r210} + r_{21} \delta_{r21r} = t_0 [\delta_{210} + f(\varepsilon_i) \delta_{r21r}] \quad (24)$$

i podobnie dla Δ_{k21}

$$\Delta_{k21} = \Delta_{k210} + k_{21} \delta_{k21k} = k_0 [\delta_{210} + f_E(\varepsilon_i) \delta_{k21k}] \quad (25)$$

gdzie: $\Delta_{r210}=t_0 \delta_{210}$, $\Delta_{k210}=k_0 \delta_{210}$ - błędy bezwzględne $r_{210}=0$, $k_{210}=0$; δ_{r21r} , δ_{k21k} - błędy względne przyrostów r_{21} - r_{210} , k_{21} - k_{210} ; $\delta_{210} = \delta_{10} - \delta_{20} + \delta_{30} - \delta_{40}$ - błąd zera liczony względem t_0 lub k_0 .

Wzory błędów δ_{r21r} , δ_{k21k} dla przyrostów funkcji przetwarzania są prostsze niż występujące w jednorodnej formie opisu (21), (22) błędy $\delta_{r21\varepsilon} = f(\varepsilon_i) \delta_{r21r}$ oraz $\delta_{k21\varepsilon} = f_E(\varepsilon_i) \delta_{k21k}$ i są łatwiej wyznaczalne. Jako przykład w tabeli 2 podano obie formy opisu błędów współczynnika przetwarzania mostka z czujnikiem różnicowym o sprzężonych przyrostach $\pm \varepsilon$, w ramionach R_1 , R_2 .

Z (21) i (23) wynikają nierówności dla dwuskładnikowego opisu błędów granicznych i niepewności standardowych funkcji przetwarzania r_{21}

$$|\delta_{r21}| \leq |\delta_{210}| + |f(\varepsilon_i)| |\delta_{r21r}| \quad (26)$$

gdzie: $|\delta_{210}| \equiv \frac{|\Delta_{r210}|}{t_0} \leq |\delta_{10}| + |\delta_{20}| + |\delta_{30}| + |\delta_{40}|$ - błąd graniczny zera;

$|\delta_{r21r}| \equiv \delta_{r21\varepsilon} \equiv \sum_{i=1}^4 |w'_{r i0}| |\delta_{i0}| + \sum_{i=1}^4 |w'_{r \varepsilon i}| |\delta_{\varepsilon i}|$ - błąd względny graniczny przyrostu Δ_{r21} ;

oraz

$$\bar{\delta}_{r21} < \sqrt{\delta_{210}^2 + f^2(\varepsilon_i) \bar{\delta}_{r21r}^2} < \bar{\delta}_{210} + |f(\varepsilon_i)| \bar{\delta}_{r21r} \quad (27)$$

gdzie: $\bar{\delta}_{210} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \bar{\delta}_{i0}^2}$; $\bar{\delta}_{r21r} \equiv \frac{\Delta_{r21} - \Delta_{r210}}{|r_{21}|}$.

Producenci podają dla mostków, podobnie jak dla czujników, błędy graniczne lub niepewności dla stanu początkowego oraz dla współczynnika przetwarzania jako parametry niezależne.

Tymczasem z wyodrębnienia w (26) błędu $|\delta_{210}|$ wynika, że przy nierównowadze błąd graniczny $|\delta_{r21r}|$ przyrostu funkcji r_{21} nadal częściowo zależy od błędów $|\delta_{i0}|$ rezystancji początkowych mostka, a odpowiednio skorelowana będzie miara losowa przyrostu $\bar{\delta}_{r21r}$ z (27) z $\bar{\delta}_{i0}$. Wartości miar wyznaczane według prawych stron będą zawyżone, gdyż ich składniki nie są w pełni niezależne i dlatego wyrażenia (26) i (27) są nierównościami.

Miary bezwzględne funkcji przetwarzania mostka można odnieść też do zakresu zmian tych funkcji, ale wówczas wartości względne błędów zależą od rozmiaru tego zakresu [10].

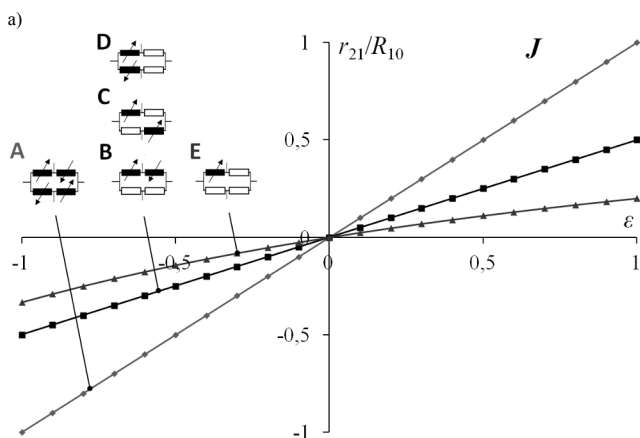
Tab. 2. Błędy bieżące i graniczne współczynników mostka o jednakowych rezystancjach $4R_{10}$ z czujnikiem różnicowym o przyrostach $\pm\varepsilon$
 Tab. 2. Simultaneous and limited errors (worse case) of r_{21} , k_{21} coefficients of the equal resistances $4R_{10}$ bridge with differential sensor $\pm\varepsilon$

1	Sprzężone R_1, R_2 $\varepsilon_1 = \varepsilon = -\varepsilon_2 \quad \varepsilon \leq 1$	J	δ_{0i}, δ_{ei} dowolne	$\delta_{r_{21}} = (1-0,5\varepsilon)[(1+\varepsilon)\delta_{10} + \varepsilon\delta_{e1} - \delta_{40}] - (1+0,5\varepsilon)[(1-\varepsilon)\delta_{20} + \varepsilon\delta_{e2} - \delta_{30}]$	$\delta_{r_{21r}} = \frac{1}{4}[(1-\varepsilon)\delta_{10} + (1+\varepsilon)\delta_{20} + \delta_{30} + \delta_{40} + (2-\varepsilon)\delta_{e1} - (2+\varepsilon)\delta_{e2}]$
2			$ \delta_{10} = \delta_{e1} $ $ \delta_{e1} = \delta_{e2} = \delta_{e3} $	$ \delta_{r_{21}} = 4(1-0,25\varepsilon^2) \delta_{10} + 2 \varepsilon \delta_{e1} $	$ \delta_{r_{21r}} = \delta_{10} + \delta_{e1} $
3	B 	E	δ_{0i}, δ_{ei} dowolne	$\delta_{k_{21}} = (1-\varepsilon^2)(\delta_{10} - \delta_{20}) + \varepsilon(1-\varepsilon)\delta_{e1} + \varepsilon(1+\varepsilon)\delta_{e2} + \delta_{30} - \delta_{40}$	$\delta_{k_{21k}} = -\frac{1}{2}\varepsilon(\delta_{10} - \delta_{20}) + \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\delta_{e1} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\delta_{e2}$
4			$ \delta_{10} = \delta_{e1} $ $ \delta_{e1} = \delta_{e2} = \delta_{e3} $	$ \delta_{k_{21}} = 4(1-0,5\varepsilon^2) \delta_{10} + 2 \varepsilon \delta_{e1} $	$ \delta_{k_{21k}} = \varepsilon \delta_{10} + \delta_{e1} $
5	Błędy wartości początkowych r_{210}, k_{210}		δ_{0i} dowolne	względny błąd bieżący $\delta_{210} = \delta_{10} - \delta_{20} + \delta_{30} - \delta_{40}$	względny błąd graniczny $ \delta_{210} _m = \sum \delta_{i0} $

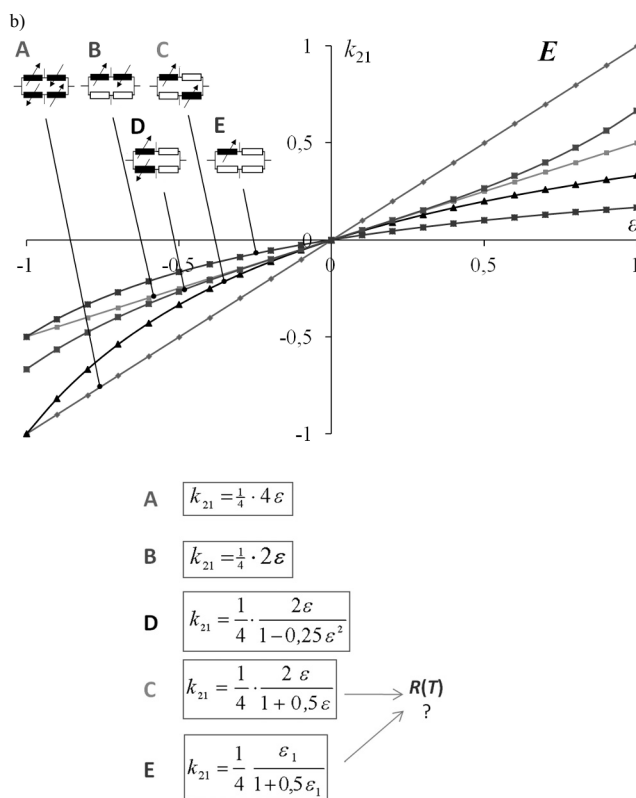
3. Opis dokładności mostków 4R o jednakowych rezystancjach początkowych

W układach pomiarowych z czujnikami, jako przetwornika zmian ich rezystancji na napięcie używa się zwykle czteroramienego mostka z rys. 1 o jednakowych rezystancjach początkowych R_{10} (ich stosunki $m=1, n=1$), oznaczanego dalej przez $4R_{10}$. Z (8a) wynika przy zasilaniu prądowym czułość t_0 dla $m>1, n>1$ wzrasta według funkcji hiperbolicznej aż do czterokrotnej wartości dla $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, ale jeszcze szybciej wzrasta też moc pobierana przez układ i trzeba by używać nietypowych czujników, np. różnicowego o niejednakowych rezystancjach początkowych. W praktyce stosuje się najczęściej pięć podstawowych wariantów mostka $4R_{10}$ do wstępnego kondycjonowania sygnałów dla różnych czujników o czterech, dwu i jednej rezystancji zmiennej, tj.:

- układ A, zwany 'pełnym mostkiem' - dla czujników o czterech przeciwnie sprzężonych przyrostach $\varepsilon_i = \pm\varepsilon$ w ramionach sąsiednich mostka,
- układy B i C ('pół-mostki') z jedną parą przeciwnych przyrostów $\pm\varepsilon$ w ramionach sąsiednich, np. R_1, R_2 lub R_1, R_4 ,
- układ D - o jednakowych przyrostach ε w ramionach przeciwnych R_1, R_3 ,
- układ E - dla czujnika o pojedynczej rezystancji R_1 .



A		$R_1 = R_3 = R_{10}(1+\varepsilon)$ $R_2 = R_4 = R_{10}(1-\varepsilon)$	$r_{21} = \frac{1}{4} R_{10} \cdot 4\varepsilon$
B		$R_1 = R_{10}(1+\varepsilon)$ $R_2 = R_{10}(1-\varepsilon)$ $R_3 = R_4 = R_{10}$	$r_{21} = \frac{1}{4} R_{10} \cdot 2\varepsilon$
D		$R_1 = R_{10}(1+\varepsilon)$ $R_4 = R_{10}(1-\varepsilon)$ $R_2 = R_3 = R_{10}$	$r_{21} = \frac{1}{4} R_{10} \cdot 2\varepsilon$
C		$R_1 = R_3 = R_{10}(1+\varepsilon)$ $R_2 = R_4 = R_{10}$	$r_{21} = \frac{1}{4} R_{10} \cdot 2\varepsilon$
E		$R_1 = R_{10}(1+\varepsilon_1)$ $R_2 = R_3 = R_4 = R_{10}$	$r_{21} = \frac{R_{10}}{4} \frac{\varepsilon_1}{1+0,25\varepsilon_1}$

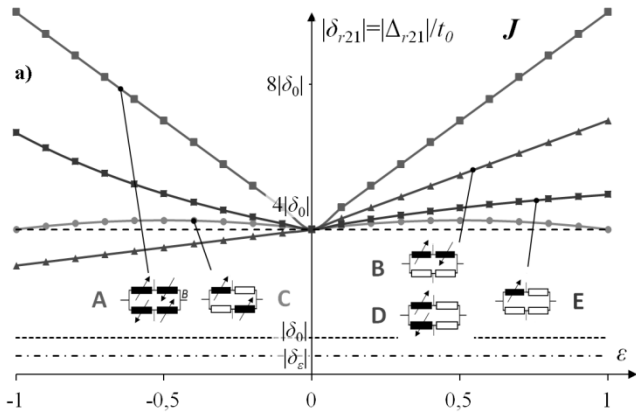


Rys. 2. Zależności rozwarciowych współczynników przetwarzania wariantów A-E mostka $4R_{10}$ od przyrostu względnego ε rezystancji czujnika: a) rezystancji skrośnej r_{21} - dla zasilania prądowego J , b) stosunku napięcie wy/we k_{21} dla zasilania napięciowego E
 Fig. 2. Relations of open circuit transfer coefficients of A-E cases of $4R_{10}$ bridge on relative increment ε of the sensor resistances: a) of transfer resistance r_{21} - for current J supply, b) of output/input voltages ratio k_{21} - for voltage E supply

Rozwarciowe funkcje przetwarzania i obie formy ich miary dokładności dla wariantów A-E mostka $4R_{10}$ wyznaczono i zestawiono w tabelach w [9 - 11]. Ich wzory są prostsze niż zależności ogólne dla dowolnych stosunków rezystancji ramion m i n [5 - 7]. Dla większej przejrzystości na rys. 2a,b przedstawiono przebiegi zależności od przyrostu ε rozwarciowych funkcji przetwarzania wariantów A-E mostka przy zasilaniu prądowym i napięciowym.

Natomiast na rys. 3 i 4 podano w jednostkach względnych przebiegi błędów granicznych i niepewności standardowych współczynników przetwarzania r_{21} , k_{21} jako funkcji przyrostów względnych ε rezystancji czujnika. Wykresy wykonano dla jednakowych wartości względnych miar początkowych rezystancji R_i i o połowę mniejszych miar ich przyrostów ε_i . Rysunki 3a,b dotyczą układów A, B i E przy prądowym J zasilaniu mostka. Obok przytoczonego też wzory ich funkcji. Natomiast rysunki 4a,b dotyczą układów A, B i E przy napięciowym E przetwornika.

Przy zasilaniu prądowym J stosuje się wszystkie warianty mostka, a przy zasilaniu napięciowym - głównie układy A, B i E.

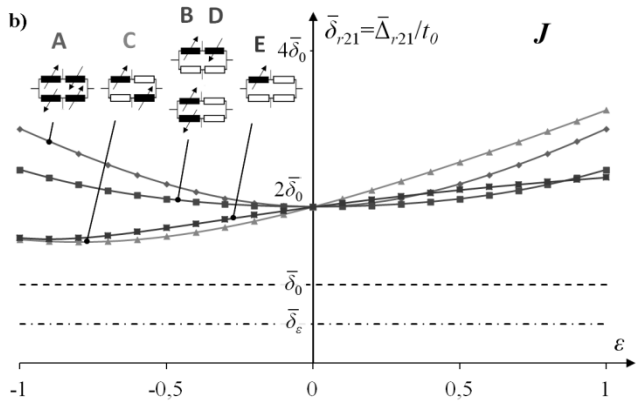


A $|\delta_{r21}| = 4(|\delta_0| + |\varepsilon| |\delta_\varepsilon|)$

B $|\delta_{r21}| = 4(1 - 0,25\varepsilon^2)|\delta_0| + 2|\varepsilon| |\delta_\varepsilon|$

D $|\delta_{r21}| = 4(1 + 0,5\varepsilon)|\delta_0| + 2|\varepsilon| |\delta_\varepsilon|$

E $|\delta_{r21}| = \frac{[4(1 + 0,25\varepsilon_1)^2 + \varepsilon_1]|\delta_0| + |\varepsilon_1| |\delta_{\varepsilon_1}|}{(1 + 0,25\varepsilon_1)^2}$



A $\bar{\delta}_{r21} = 2\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^2 \bar{\delta}_0^2 + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2) \bar{\delta}_\varepsilon^2}$

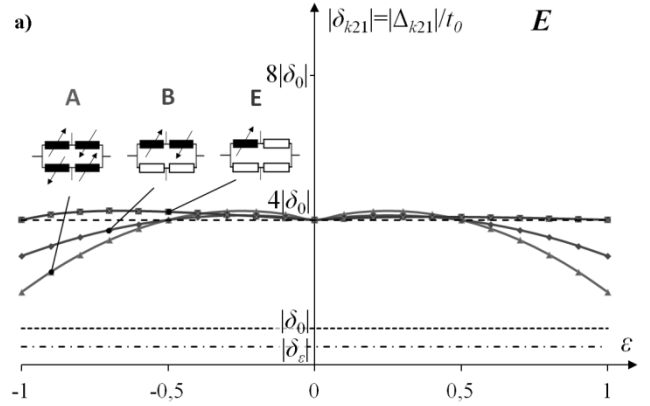
B $\bar{\delta}_{r21} = 2\sqrt{(1 + \varepsilon + 0,5\varepsilon^2)^2 \bar{\delta}_0^2 + 0,5\varepsilon^2 \bar{\delta}_\varepsilon^2}$

D $\bar{\delta}_{r21} = 2\sqrt{[(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2)^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^4] \bar{\delta}_0^2 + 0,5(1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2) \varepsilon^2 \bar{\delta}_\varepsilon^2}$

E $\bar{\delta}_{r21} = \frac{\sqrt{[2\varepsilon_1(1 + 0,5\varepsilon_1) + (1 + (1 + 0,5\varepsilon_1)^2)^2] \bar{\delta}_0^2 + \varepsilon^2 \bar{\delta}_{\varepsilon_1}^2}}{(1 + 0,25\varepsilon_1)^2}$

Rys. 3. Zależności: a) błędów granicznych rezystancji skrośnej r_{21} i b) jej niepewności standardowej, od względnych przyrostów ε rezystancji czujnika dla kilku podstawowych wariantów A-E zasilanego prądowo mostka o jednakowych rezystancjach początkowych $4R_{10}$

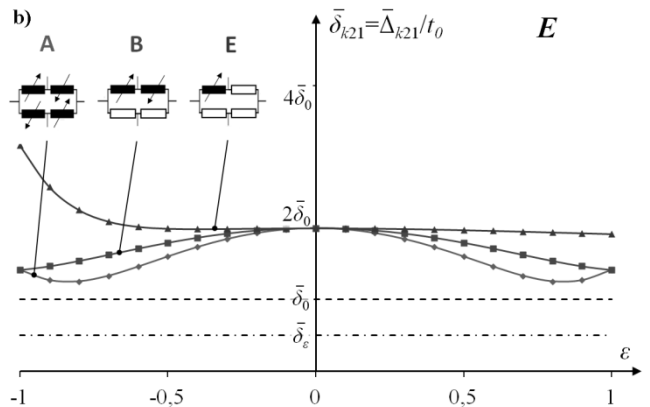
Fig. 3. Relations of: a) limited errors of open-circuit transfer resistance r_{21} and b) its standard uncertainty, on relative increments ε of sensor resistances for I cases A-E of the current supplied bridge with equal four initial resistances R_{10}



A $|\delta_{k21}| = 4[(1 - \varepsilon^2)|\delta_0| + |\varepsilon| |\delta_\varepsilon|]$

B $|\delta_{k21}| = 4(1 - 0,5\varepsilon^2)|\delta_0| + 2|\varepsilon| |\delta_\varepsilon|$

E $|\delta_{k21}| = 4\left[1 - \frac{0,125\varepsilon_1^2}{(1 + 0,5\varepsilon_1)^2}\right]|\delta_0| + \frac{|\varepsilon_1|}{(1 + 0,5\varepsilon_1)^2}|\delta_{\varepsilon_1}|$



A $\bar{\delta}_{k21} = 2\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^2 \bar{\delta}_0^2 + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2) \bar{\delta}_\varepsilon^2}$

B $\bar{\delta}_{k21} = 2\sqrt{(1 - 0,5\varepsilon^2)^2 \bar{\delta}_0^2 + 0,5\varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2) \bar{\delta}_\varepsilon^2}$

E $\bar{\delta}_{k21} = \frac{2}{(1 + 0,5\varepsilon_1)^2} \sqrt{0,5 [(1 + \varepsilon_1)^2 + (1 + 0,5\varepsilon_1)^2] \bar{\delta}_0^2 + 0,5\varepsilon_1^2 \bar{\delta}_{\varepsilon_1}^2}$

Rys. 4. Zależności: a) błędów granicznych współczynnika k_{21} i b) jego niepewności standardowych jako funkcji względnych przyrostów ε rezystancji czujnika dla preferowanych wariantów A, B, E zasilanego napięciowo mostka o jednakowych rezystancjach początkowych $4R_{10}$

Fig. 4. Relations of: a) limited (worse case) errors of the open circuit coefficient k_{21} and b) its standard uncertainty on relative increments ε of sensor resistances for mostly used cases A, B, E of the voltage supplied bridge with equal four initial resistances R_{10}

4. Podsumowanie i wnioski

Z podanych przebiegów funkcji przetwarzania (rys. 2a,b) oraz błędów granicznych i niepewności zasilanego prądowo (rys. 3a,b) lub napięciowo (rys. 4a,b) czteroramiennego układu mostka o jednakowych rezystancjach początkowych $R_{10}=R_{10}$, jednakowych miarach dokładności i różnych wariantach przyrostów względnych $\pm \varepsilon$, wynika, że:

- przy zasilaniu prądowym przebiegi funkcji przetwarzania r_{21} są liniowe dla czterech wariantów mostka A-D, a przy napięciowym przebiegi funkcji $k_{21}(\varepsilon)$ - tylko dla dwu wariantów A i B mostka,
- miary dokładności liniowych wariantów mostka $4R_{10}$ niejednakowo zależą od ε , w tym nieliniowo,
- przy zasilaniu napięciowym mostka B – o zmiennych rezystancjach R_1, R_2 w gałęzi górnej oraz mostka E – o zmiennej tylko rezystancji R_1 , czułość początkowa k_0 i przebieg $k_{21}(\varepsilon)$ nie zależą od n , tj. od stosunku do nich rezystancji dolnej gałęzi R_3, R_4 , a więc i od regulacji zera tymi rezystancjami,
- funkcje przetwarzania i miary dokładności tzw. pół-mostków B i D o przyrostach $\pm\varepsilon$ dla par R_1, R_2 lub R_1, R_4 są podobne, ale rezystancje R_2 i R_4 zamieniają się rolami,
- mostek B ma stałą rezystancję wejściową, a mostek D – wyjściową. Natomiast w mostku A obie te rezystancje są stałe,
- funkcje przetwarzania r_{21} i k_{21} mostka E z czujnikiem o pojedynczej zmiennej rezystancji R_1 są nieliniowe. Stanowią one gałęzie dwu różnych hiperbol przechodzących przez środek układu współrzędnych. Nieliniowość funkcji $r_{21}(\varepsilon_1)$ jest mniejsza, gdyż jej mianownik mniej zmienia się wraz z ε_1 niż mianownik w k_{21} – patrz wzory na rys. 2a,b dla układu E.
- Miary dokładności liniowych mostków $4R_{10}$ niejednakowo zależą od ε , w tym nieliniowo.
- Pomimo korekcji zera, poza równowagą układu, tj. dla $\varepsilon_i \neq 0$, błędy przyrostów współczynników przetwarzania $\delta_{r_{21r}}, \delta_{k_{21k}}$ nadal zależą od błędów początkowych δ_{i0} rezystancji mostka. Z (23) wynika, że przy $\varepsilon_{2R} \neq 0$ (układy C i E) wpływ jest różny dla korekcji w mostku i poza nim [8, 11].
- Przy jednakowych błędach $|\delta_{i0}| = |\delta_0|$ i $|\delta_{ei}| = |\delta_e|$ zasilane prądowo mostki A-D o liniowej funkcji przetwarzania $r_{21}(\varepsilon)$ mają jednakowe i niezależne od przyrostu rezystancji ε względne błędy graniczne $|\delta_{r_{21r}}|$. Błędy bezwzględne $|\Delta_{r_{21}}|$ ich funkcji $r_{21}(\varepsilon)$ są proporcjonalne do liczby zmiennych rezystancji $z_r = (2, 4)$ i do modułu względnego przyrostu rezystancji $|\varepsilon|$. Ując to można uogólnionym wzorem [7]

$$|\Delta_{r_{21}}| \leq 0,25 R_{10} [|\delta_{210}| + z_r |\varepsilon| (|\delta_0| + |\delta_e|)] \quad (28)$$

gdzie: $|\delta_{210}| \leq 4|\delta_0|$ - błąd graniczny zera mostka.

Z (28) wynika, że zależność błędu granicznego $|\Delta_{r_{21}}|$ od przyrostu $|\varepsilon|$ dla mostków zasilanych prądowo o liniowej funkcji przetwarzania (rezystancji skrośnej) $r_{21}(\varepsilon)$ jest również liniowa. Przebiega ona podobnie jak funkcja (3b) dla pojedynczej rezystancji R_i .

- Oba zasilane napięciowo mostki A i B o liniowym współczynniku przetwarzania $k_{21}(\varepsilon)$ mają jednakowe postacie względnych błędów granicznych $|\delta_{k_{21k}}|$. Ich błędy $|\Delta_{k_{21}}|$ można też opisać ogólnie wspólnym wzorem, ale zależą one nieliniowo od ε , tj.:

$$|\Delta_{k_{21}}| \leq 0,25 [|\delta_{210}| + z_v (\varepsilon^2 |\delta_0| + |\varepsilon| |\delta_e|)]. \quad (29)$$

Błąd $|\Delta_{k_{21}}|$ zależy od błędu początkowego $|\delta_0|$ oraz od stałego błędu $|\delta_e|$ ze współczynnikami ε^2 i ε .

- Zależności od ε niepewności standardowych funkcji przetwarzania mostków A-E są różne i inne niż błędów granicznych.
- Postacie wszystkich zależności dla mostków liniowych A-D są prostsze niż dla mostka E z pojedynczym czujnikiem R_1 .

Dwuskładnikową metodę opisu błędu granicznego oraz niepewności funkcji przetwarzania mostków $4R$ można wykorzystać dla wszystkich układów przetworników pomiarowych z czujnikami wieloparametrowymi oraz do opisu dokładności parametrów schematu zastępczego dowolnego układu n -T, wyznaczanych z pomiarów przy różnych kombinacjach połączeń zasilania i przyrządów z n końcówkami badanego układu, np. w tomografii impedancyjnej. Metodę dwuskładnikową autorzy wykorzystali m. in. do opisu dokładności dwuwyjściowych układów mostkowych o zasilaniu ramion przyległych z dwu źródeł prądowych lub jednego przełączanego źródła prądowego [2, 13]. Te niekonwencjonalne układy umożliwiają równoczesny pomiar dwu wielkości, które niejednakowo zmieniają rezystancje pary elementów czujnika.

5. Literatura

- [1] Warsza Z. L.: Właściwości i nieznane zależności mostka rezystancyjnego 4-T jako czwórnika. Pomiary Automatyka Robotyka (PAR) nr 10, s. 9-15, 2004.
- [2] Warsza Z. L.: Immitancyjne układy czterobiegunowe (4T) w pomiarach wieloparametrowych. Monografia. Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów, 291stron, 2004.
- [3] Warsza Z. L.: Unbalanced DC bridges - chapter 127 of "Handbook of Measuring Systems Design. ed. by P. Sydenham and R. Thorn, Jon Wiley & Sons, Ltd., Chichester UK, 2005.
- [4] Warsza Z. L.: Miary dokładności parametrów zewnętrznych czwórnika typu X o zmiennych rezystancjach. Elektronika (wkładka: Technika Sensorowa) Część 1, nr 2, s. 45-52, 2006.
- [5] Warsza Z. L.: Miary dokładności parametrów zewnętrznych czwórnika typu X o zmiennych rezystancjach. Elektronika (wkładka: Technika Sensorowa) Część 2, nr 3, s. 49-53, 2006.
- [6] Warsza Z. L.: Accuracy Measures of the Four Arm Bridge of Broadly Variable Resistances, part 1 and 2. Proc. of IMEKO TC4 15th International Symposium on Novelties in Electrical Measurement, TU Iasi, Romania, vol. 1, p.17-28, 2007.
- [7] Warsza Z. L.: Miary dokładności transmitancji mostka rezystancyjnego w przypadkach szczególnych. Pomiary Automatyka Kontrola (PAK) nr 10, s. 17-24, 2007.
- [8] Warsza Z. L.: Dokładność pomiaru przemysłowymi czujnikami Pt100 w układzie mostka odchyłowego. Pomiary Automatyka Robotyka (PAR), nr 11, s. 46-55, 2008.
- [9] Warsza Z. L.: Miary dokładności układu mostka o dużych zmianach rezystancji w ujęciu dwuskładnikowym, Przegląd Elektrotechniczny, nr 10, s. 171-176, 2009.
- [10] Warsza Z. L.: New approach to the accuracy description of unbalanced bridge circuits - with example for Pt sensors. Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems (JAMRIS), vol. 4, no 2, p. 8-15, 2010.
- [11] Warsza Z.L.: Nowy opis miar dokładności mostków sensorowych o dużych zmianach rezystancji. Pomiary Automatyka Kontrola (PAK) nr 5, s. 457-463, 2010.
- [12] Warsza Z.L.: Description of the accuracy of broadly unbalanced sensor resistance bridges. Proceedings of 20th National Scientific Symposium with international participation "Metrology and Metrology Assurance 2010", 9-13 Sept. 2010, Sozopol, Bulgaria, p. 65-77 oraz Sistiemi Obrobtoki Īnformacii, Vipusk 4 (85) p. 114-125, Kharkiv 2010.
- [13] Idźkowski A.: Konstrukcja i ocena przydatności pomiarowych mostków dwuprądowych DC. Rozprawa doktorska Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, 2012.