

Zwicherungie belek dwuteowych podpartych widelkowo z uwzględnieniem ciągłego usztywnienia na skręcanie

Roman Bijak¹

¹ Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych, Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Świętokrzyska, e-mail: r.bijak@tu.kielce.pl

Streszczenie: W pracy analizowano zwicherungie belek dwuteowych (bisymetrycznych) podpartych widelkowo z uwzględnieniem ciągłego usztywnienia na skręcanie. Przedstawiono sposób wyznaczenia tej sztywności w praktycznym przypadku połączenia blachy trapezowej z belką za pomocą typowych łączników. Zamieszczono uproszczone wzory dla wybranych schematów statycznych, szczególnie przydatne w przypadku analizy zwicherungia ciągłych płatwi dwuteowych. Przedstawiono oszacowanie wpływu miejsca przyłożenia obciążenia poprzecznego po wysokości przekroju w złożonych stanach obciążenia.

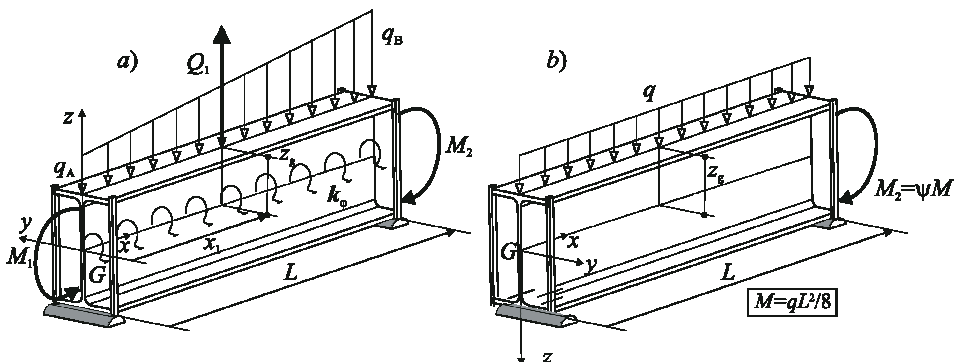
Słowa kluczowe: pręty cienkościenne, przekrój otwarty, moment krytyczny zwicherungia, ciągle usztywnienie na skręcanie.

1. Wprowadzenie

W celu wyznaczenia momentu krytycznego zwicherungia możemy zastosować wzory przedstawione w literaturze [3÷9] lub skorzystać z programu MES [2]. Rozwiązania analityczne są jednak ograniczone do kilku podstawowych schematów statycznych bądź niepoprawne, jak w pracy Trahair i inni [4], w której podjęto próbę uogólnienia na bardziej złożone przypadki obciążenia.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono wyrażenia pozwalające oszacować moment krytyczny zwicherungia pryzmatycznych belek dwuteowych podpartych widelkowo na końcach. Każde z obciążeń poprzecznych może mieć dowolny zwrot. Istotnym rozszerzeniem w stosunku do publikacji innych autorów [3÷6] jest przedstawienie wzoru na współczynnik uwzględniający rzędną miejsca przyłożenia obciążenia poprzecznego po wysokości przekroju [7,8] dla dowolnego schematu statycznego.

Uwzględniono wpływ usztywnienia na skręcanie belki blachą trapezową na moment krytyczny zwicherungia. W przypadku korzystania ze współczynników zamieszczonych w tabelach 2,3 oś z musi pokrywać się z kierunkiem obciążenia (rys.1b), natomiast gdy stosujemy wzory (6,7) zwrot osi z jest dowolny (rys.1a).



Rys.1 Obciążenia belek dwuteowych podpartych widelkowo: a) dowolne obciążenie poprzeczne b) obciążenie równomiernie rozłożone z momentem skupionym na podporze

2. W Moment krytyczny zwichrzenia belek dwuteowych podpartych widelkowo z uwzględnieniem ciągłego usztywnienia na skręcanie

Rozpatrzmy belkę o rozpiętości L podpartą widelkowo na końcach (rys.1a), obciążoną momentami skupionymi na podporach oraz obciążeniem poprzecznym w prześle (G jest środkiem ciężkości przekroju). Po uwzględnieniu warunków brzegowych dla podparcia widelkowego równanie różniczkowe giętno-skrętnej utraty stateczności w zależności od funkcji kąta skręcania $\varphi(x)$, można przedstawić w postaci [5]:

$$-\frac{M_y^2(x)}{EI_z} \varphi + q_z z_g \varphi + \sum_{k=1}^N Q_{zk} z_g \Delta(x - x_k) \varphi + EI_w \varphi^{(4)} - GI_T \varphi^{(2)} + k_\varphi \varphi = 0 \quad (1)$$

gdzie: $M_y(x)$ – rozkład momentu zginającego po długości belki, E , G – odpowiednio moduł sprężystości podłużnej i poprzecznej, I_z – moment bezwładności względem osi z , I_T – moment bezwładności skręcania St. Venanta, I_w – wycinkowy moment bezwładności, z_g – rzędna miejsca przyłożenia obciążenia poprzecznego po wysokości przekroju, q_z – obciążenie rozłożone, N – liczba sił skupionych, Q_{zk} – siła skupiona, x_k – współrzędna miejsca przyłożenia k -tej siły skupionej, Δ – funkcja Dirac’a oraz $\varphi^{(k)} = \partial^k \varphi / \partial x^k$.

W stosunku do pracy [7] równanie różniczkowe (1) zostało rozbudowane o ostatni człon uwzględniający wpływ ciągłego usztywnienia na skręcanie k_φ . W celu oszacowania momentu krytycznego zwichrzenia wykorzystano metodę ortogonalizacji Bubnowa-Galerkina, w sposób analogiczny do przedstawionego w pracy [7,8].

2.1. Moment krytyczny zwichrzenia dla dowolnego rozkładu obciążenia poprzecznego (rys.1a)

Moment krytyczny zwichrzenia w przypadku obciążenia poprzecznego o różnych znakach, przyłożonego na tej samej rzędnej z_g przekroju poprzecznego, możemy zapisać za pomocą wzoru (2) [7,8]:

$$M_{cr} = C_1 N_{cr,z} \left(\sqrt{D + (C_2 z_g)^2} + C_2 z_g \right) \quad (2)$$

gdzie: $N_{cr,z} = \pi^2 EI_z / L^2$ natomiast parametr D obliczamy ze wzoru (3):

$$D = \frac{I_w}{I_z} + \frac{GI_T^*}{N_{cr,z}}, \quad (3)$$

Zmodyfikowaną sztywność na skręcanie I_T^* wyznaczmy ze wzoru (4):

$$I_T^* = I_T + \frac{k_\varphi L^2}{G\pi^2} \quad (4)$$

Współczynnik C_1 obliczamy za pomocą wzoru (5) na podstawie rozkładu momentu zginającego opisanego przez funkcję $M_y(x)$:

$$C_1 = \frac{M_0}{\sqrt{\frac{2}{L} \int_0^L M_y^2(x) \sin^2(\pi x/L) dx}} \quad (5)$$

gdzie M_0 – jest maksimum wartości bezwzględnych momentu zginającego w belce ($M_0 = \max |M_y(x)|$ dla $0 \leq x \leq L$).

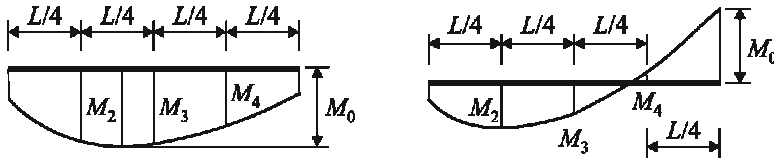
Współczynnik C_2 zależy od współczynnika C_1 , rozkładu obciążenia poprzecznego oraz miejsca jego przyłożenia po długości elementu [7]:

$$C_2 = C_1 \frac{a_2}{2}, \quad (6)$$

gdzie (oznaczenia wg rys. 1a):

$$a_2 = \frac{2L}{M_0 \pi^2} \left[\frac{q_B + q_A}{4} L + \sum_{k=1}^N Q_k \sin^2 \left(\frac{\pi x_k}{L} \right) \right] \quad (7)$$

Współczynnik C_1 możemy oszacować na podstawie momentów zginających w $1/4$, $1/2$ oraz $3/4$ rozpiętości belki oznaczonych odpowiednio przez M_2 , M_3 , M_4 oraz maksymalnego co do wartości bezwzględnej momentu zginającego M_0 (rys. 2) [4,6,8].



Rys. 2. Momenty zginające przyjęte we wzorze (8)

Wyrażenie (5) można aproksymować na wiele sposobów [4,6,8]. W pracy przyjęto zależność opisaną wzorem (8) :

$$C_1 = \sqrt{\frac{21M_0^2}{M_0^2 + 6M_2^2 + 8M_3^2 + 6M_4^2}} \quad (8)$$

Analiza wielu przypadków rozkładu momentu zginającego przedstawiona w [8] pokazuje, że oszacowanie współczynnika C_1 za pomocą wzoru (8) w przypadku obciążenia skupionego (lub jednoczesnego skupionego i rozłożonego) jest bliższe rozwiązaniu MES w porównaniu do analogicznego wzoru zaproponowanego przez Trahair i inni [4] oraz Serna i inni [6].

2.2. Wyznaczenie współczynnika sztywności k_ϕ ciągłego usztywnienia na skręcanie belki blachą trapezową [3,9÷11]

Przedstawiony poniżej sposób oszacowania sztywności ciągłego usztywnienia na skręcanie belki za pomocą blachy trapezowej wynika z normy [10]. Jedyne modyfikacja parametru $c_{\phi A}$ została przyjęta wg pracy [11] na podstawie badań doświadczalnych dla łączników Hilti ENP2-21L15 (typowych dla tego rodzaju połączeń). Sztywność ciągłego usztywnienia na skręcanie belki (rys 1a) możemy wyznaczyć na podstawie wzoru (9) [10]:

$$k_\phi = \frac{1}{1/c_{\phi M} + 1/c_{\phi P} + 1/c_{\phi A}} \quad (9)$$

Wpływ sztywności na zginanie blachy trapezowej szacujemy za pomocą wzoru (10):

$$c_{\phi M} = 2 \frac{EI_a}{a} \text{ [kNm/m]} \quad (10)$$

gdzie: a – odległość między belkami, I_a – moment bezwładności pasma blachy trapezowej o szerokości $1m$ (współczynnik przed wyrażeniem EI_a/a przyjęto konserwatywnie [10]).

Wpływ sztywności belki dwuteowej można uwzględnić za pomocą wzoru (11) [3]:

$$c_{\phi P} = \frac{5770}{h/s^3 + 0,5b/t^3} \text{ [kNm/m]} \quad (11)$$

gdzie: h, b odpowiednio rozstaw osiowy pasów i szerokość profilu dwuteowego, s – grubość środnika, t – grubość półki (wymiary geometryczne przekroju podstawiamy w $[cm]$).

Wpływ łączników i sposobu połączenia blachy trapezowej z belką można oszacować pomocą wzoru (12) [11]:

$$c_{\phi A} = \bar{c}_{\phi A} k_b \text{ [kNm/m]} \quad (12)$$

gdzie: współczynnik $k_b = (b/100)^2$ dla $b/100 \leq 1,15$ i $k_b = 1,15b/100$ dla $b/100 \geq 1,15$ z

zastrzeżeniem, że do obliczeń przyjmujemy $b/100 \leq 1,6$. W porównaniu z normą [10] mamy ograniczenie $b/100$ do wartości 1,6 zamiast 2,0.

Współczynnik k_b oraz parametr $\bar{c}_{\varphi A}$ zestawiony w tabeli 1 przyjęto wg [11] dla łączników Hilti ENP2-21L15.

Tabela 1. Parametr sztywności połączenia blachy trapezowej z belką $\bar{c}_{\varphi A}$ [kNm/m]

Lp.	Ułożenie blachy faldowej		Mocowanie blachy do belki		$\bar{c}_{\varphi A}$
	zwykle*	odwrotne	w każdej faldzie	w co drugiej faldzie	
1)	x		x		4,0
2)	x			x	3,1
3)		x	x		3,1
4)		x		x	2,0

* ułożenie blachy faldowej pasem węższym na belce (pozytyw)

W przykładach 3.1, 3.3 rozpatrywano (analogicznie jak w [11]) belkę IPE 500 w rozstawie $a=6\text{m}$ połączoną z blachą trapezową E100/1.0 ($I_a=195\text{ cm}^4/\text{m}$, ułożenie pozytywem) za pomocą łączników Hilti ENP2-21L15. Mocowanie blachy trapezowej do belki w co drugiej faldzie. Podstawiając powyższe dane do wzorów (9÷12) otrzymujemy [11]:

$$\begin{aligned} c_{\varphi M} &= 2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot (195/6,0) \cdot 10^{-8} &&= 137 \text{ kNm/m} \\ c_{\varphi P} &= 5770 / (48,4/1,02^3 + 0,5 \cdot 20/1,6^3) &&= 120 \text{ kNm/m} \\ c_{\varphi A} &= 3,1 \cdot 1,15 \cdot 1,6 &&= 5,24 \text{ kNm/m} \\ k_{\varphi} &= 1 / (1/137 + 1/120 + 1/5,24) &&= 4,84 \text{ kNm/m} \end{aligned}$$

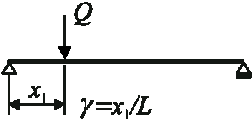
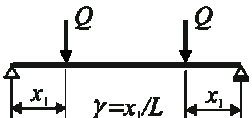
W przykładzie 3.2 rozpatrywano belkę IPE 400 w rozstawie $a=6\text{m}$ połączoną z blachą trapezową E100/1.0 (ułożenie pozytywem) również za pomocą łączników Hilti ENP2-21L15. Mocowanie blachy trapezowej do belki w co drugiej faldzie. Podstawiając powyższe dane do wzorów (9÷12) otrzymujemy takie same wyrażenia jak powyżej na współczynniki $c_{\varphi M} = 137 \text{ kNm/m}$ oraz $c_{\varphi A} = 5,24 \text{ kNm/m}$. Różnica tkwi jedynie w współczynniku określającym wpływ sztywności belki $c_{\varphi P}$:

$$\begin{aligned} c_{\varphi P} &= 5770 / (38,65/0,86^3 + 0,5 \cdot 18/1,35^3) &&= 89,6 \text{ kNm/m} \\ k_{\varphi} &= 1 / (1/137 + 1/89,6 + 1/5,24) &&= 4,79 \text{ kNm/m} \end{aligned}$$

2.3. Moment krytyczny zwichrzenia dla wybranych przypadków obciążenia poprzecznego

Współczynniki C_1 , C_2 możemy wyznaczyć analitycznie na podstawie wzorów (5÷7) jedynie dla kilku podstawowych schematów statycznych (tabela 2,3).

Tabela 2. Współczynniki C_1 , C_2 dla wybranych schematów obciążenia skupionego

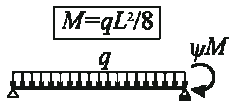
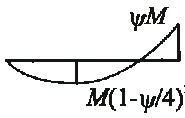
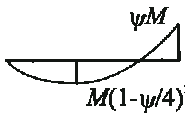
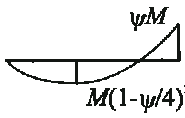
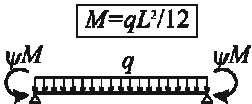
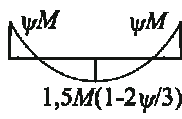
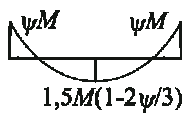
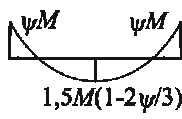
Lp.	Schemat statyczny	Współczynniki C_1 , C_2			
		$0 \leq \gamma \leq 0,5$	$\gamma = 1/4$	$\gamma = 1/3$	$\gamma = 1/2$
1)		$C_1 = 1,36 + 0,42(1-2\gamma)^2$	1,46	1,41	1,36
		$C_2 = 0,41C_1 \frac{\sin^2(\pi\gamma)}{4\gamma(1-\gamma)}$	0,40	0,49	0,56
2)		$C_1 = 1,0 + 2,82\gamma^3$	1,04	1,10	1,35
		$C_2 = 0,41C_1 \frac{\sin^2(\pi\gamma)}{2\gamma}$	0,43	0,51	0,55

W celu uproszczenia obliczeń (kosztem pewnej dokładności) możemy podzielić zakres zmienności wybranego parametru (w tym przypadku momentu skupionego) na przedziały, a następnie aproksymować współczynnik C_1 np. liniowo w tych przedziałach (Trahair i inni[4]). I tak w przypadku momentu skupionego na jednym końcu belki (tabela

3, poz.1) wyznaczono analitycznie ze wzoru (5) współczynnik C_1 dla $\psi = 0; 0,7; 1,0$, a następnie aproksymowano go przedziałami funkcją liniową.

Parametr $\psi = 0,7$ wybrano z tego powodu, że w zakresie $0 \leq \psi \leq 0,7$ maksimum momentu zginającego jest w przęśle, natomiast dla $0,7 \leq \psi \leq 1,0$ na podporze. Analogicznie postąpiono w przypadku momentów skupionych przyłożonych na obu podporach (tabela 3, poz 2).

Tabela 3. Współczynniki C_1, C_2 dla wybranych schematów obciążenia rozłożonego

Lp.	Schemat statyczny	Zakres	Współczynniki C_1, C_2	
1)		$\psi = 0$	$C_1 = 1,13$	$C_2 = 0,46$
		$0 \leq \psi \leq 0,70$	$C_1 = 1,13 + 0,10\psi$	$C_2 = \frac{0,41 C_1}{(1-\psi/4)^2}$
		$0,70 \leq \psi \leq 1$	$C_1 = -1,25 + 3,5\psi$	$C_2 = \frac{0,41 C_1}{\psi}$
		$\psi = 1$	$C_1 = 2,25$	$C_2 = 0,92$
2)		$\psi = 0$	$C_1 = 1,13$	$C_2 = 0,46$
		$0 \leq \psi \leq 0,75$	$C_1 = 1,13 + 0,12\psi$	$C_2 = \frac{0,41 C_1}{1-2\psi/3}$
		$0,75 \leq \psi \leq 1$	$C_1 = -2,8 + 5,4\psi$	$C_2 = \frac{0,61 C_1}{\psi}$
		$\psi = 1$	$C_1 = 2,60$	$C_2 = 1,58$

W przypadku liniowego rozkładu momentu zginającego moment krytyczny zwichrzenia możemy oszacować na podstawie wzoru (13) [3]:

$$C_1 = 1,77 - 1,04\psi + 0,27\psi^2 \text{ lecz } C_1 \leq 2,60 \quad C_2 = 0 \quad (13)$$

gdzie ψ jest stosunkiem momentów zginających na końcach belki ($-1 \leq \psi \leq 1$).

Podstawowa różnica we wzorach zamieszczonych w tablicy 2,3 w stosunku do pracy Trahair i inni [4], tkwi we współczynniku C_2 uwzględniającym rzędną miejsca przyłożenia obciążenia poprzecznego po wysokości przekroju. W pracy Trahair i inni [4] błędnie rozszerzono poprawne wyniki zawarte monografii Trahair [12] na przypadek dowolnego schematu statycznego, aproksymując ten współczynnik za pomocą wzoru:

$$C_2 = 0,4C_1 \quad ? \quad (14)$$

Jak pokazuje przykład 3.4 jest to podejście nieprawidłowe, a błąd w obliczaniu momentu krytycznego zwichrzenia w przypadku obciążenia przyłożonego do górnej półki jest istotny. Najwyraźniej widać to dla schematu statycznego przedstawionego w Tabeli 4, dla którego w pracy [4] błędnie oszacowano również współczynnik C_1 w zakresie $0,75 \leq \psi \leq 1$. Powinno być tak jak jest w Tabeli 3 poz. 2, co pokazano poniżej.

Tabela 4. Porównanie wyników numerycznych dla IPE 500 [2] w przypadku schematu statycznego pokazanego w tabeli 3 poz.2 ($C_2=0$)

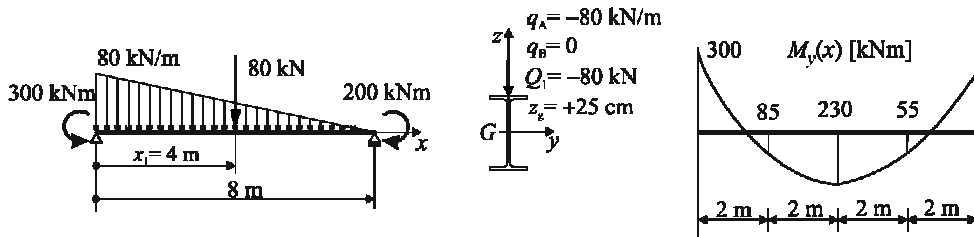
Lp	Metoda	C_1 ($0,75 \leq \psi \leq 1$)	C_1 ($\psi=1$)	M_{cr} [kNm] / błąd względny %					
				$L=8m$	$L=10m$	$L=12m$			
	LTBEAM [2]	-	-	728,7	-	543,4	-	433,8	-
1)	Tabela 3 poz.2	$C_1 = -2,8 + 5,4\psi$	2,60	726,9	/-0,2	542,4	/-0,2	433,3	/-0,1
	Tabela 6.7 [4]	$C_1 = -2,38 + 4,8\psi$	2,42	676,6	/-6,9	504,9	/-6,9	403,3	/-6,9

Przykłady liczbowe

W przykładach 3.1, 3.3 analizowano belkę podpartą widelkowo na końcach, wykonaną z dwuteownika IPE 500. Przyjęto charakterystyki geometryczne wg [2]: $I_z=2141,7 \text{ cm}^4$, $I_T=89,665 \text{ cm}^4$, $I_w=1254,3 \cdot 10^3 \text{ cm}^6$ oraz stałe materiałowe: $E=210 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$, $G=81 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$. W tym przypadku $N_{cr,z}=693,5 \text{ kN}$ oraz $D=1632,8 \text{ cm}^2$.

2.4. Moment krytyczny zwichrzenia w przypadku dowolnych obciążeń poprzecznych [8]

Rozpatrzmy belkę o rozpiętości $L=8 \text{ m}$ wykonaną z dwuteownika IPE 500 i obciążoną w sposób pokazany na rys.3. Obliczenia wykonujemy w kN i m (z wyjątkiem wyznaczania charakterystyk skrętnych).



Rys. 3. Schemat statyczny analizowany w p.3.1

Podstawiając $M_2=85$, $M_3=230$, $M_4=55$ oraz $M_0=300$ do wzoru (8) otrzymujemy:

$$C_1 = \sqrt{\frac{21 \cdot 300^2}{300^2 + 6 \cdot 85^2 + 8 \cdot 230^2 + 6 \cdot 55^2}} = 1,813$$

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy obciążenie jest przyłożone do środka ciężkości przekroju ($z_g=0$). Wówczas wzór na moment krytyczny zwichrzenia ma postać:

$$M_{cr} = C_1 N_{cr,z} \sqrt{D} = 1,813 \cdot 693,5 \cdot \sqrt{1632,8 \cdot 10^{-2}} = 508,1 \text{ kNm}$$

Moment krytyczny wyznaczony za pomocą programu LTBEAM wynosi 512,2 kNm. Błąd zastosowanej metody wynosi więc -0,8%.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy obciążenie poprzeczne jest przyłożone do górnej półki. Wyznaczamy wtedy a_2 ze wzoru (7) i podstawiamy do wzoru na współczynnik C_2 (6):

$$a_2 = \frac{2 \cdot 8}{300\pi^2} \left[\frac{(-80) \cdot 8}{4} + (-80) \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot 4}{8} \right) \right] = -1,297$$

$$C_2 = 1,813 \cdot (-1,297) / 2 = -1,176$$

Moment krytyczny zwichrzenia obliczamy ze wzoru (2):

$$M_{cr} = 1,813 \cdot 693,5 \cdot \left(\sqrt{1632,8 + (-1,176 \cdot 25)^2} + (-1,176) \cdot 25 \right) \cdot 10^{-2} = 258,6 \text{ kNm}$$

Moment krytyczny wyznaczony za pomocą programu LTBEAM wynosi 257,6 kNm. Błąd zastosowanej metody wynosi więc 0,4%.

W celu uwzględnienia wpływu blachy trapezowej ($k_\varphi=4,84 \text{ kNm/m}$ wg obliczeń w pkt. 2.2) wyznaczamy zmodyfikowaną sztywność skrętną przekroju wg wzoru (4):

$$I_T^* = 89,665 + \frac{4,84 \cdot 800^2}{8100\pi^2} = 128,41 \text{ cm}^4$$

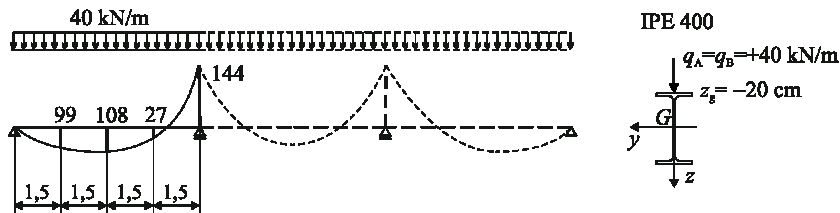
Parametr D wyznaczony ze wzoru (3) wynosi teraz 2085,2 cm².
Moment krytyczny zwężenia obliczamy ze wzoru (2) dla zmienionej wartości D :

$$M_{cr} = 1,813 \cdot 693,5 \cdot \left(\sqrt{2085,2 + (-1,176 \cdot 25)^2} + (-1,176) \cdot 25 \right) \cdot 10^{-2} = 313,2 \text{ kNm}$$

Moment krytyczny wyznaczony za pomocą programu LTBEAM wynosi 311,9 kNm. Błąd zastosowanej metody wynosi więc 0,4%.

2.5. Moment krytyczny zwężenia płatwi ciągłej [9]

Rozpatrzmy belkę ciągłą o rozpiętości przęsła $L=6\text{ m}$ podpartą widełkowo na podporach i obciążoną w sposób pokazany na rys.4. Przyjęto charakterystyki geometryczne wg [9]: $I_z=1320\text{ cm}^4$, $I_T=52,4\text{ cm}^4$, $I_w=490 \cdot 10^3\text{ cm}^6$. W tym przypadku $N_{cr,z}=759,9\text{ kN}$ oraz $D=929,7\text{ cm}^2$.



Rys. 4. Schemat statyczny analizowany w p.3.2 [9]

Współczynniki C_1 , C_2 wg metody ogólnej wyznaczamy jak w pkt. 3.1. W przypadku korzystania z tabeli 3 poz.1, najpierw wyznaczamy $M=qL^2/8=40 \cdot 6^2/8=180\text{ kNm}$ a następnie parametr $\psi=144/180=0,80$. W celu uwzględnienia wpływu blachy trapezowej postępujemy jak w p 3.1. (z tym, że w tym przypadku $k_\varphi=4,79\text{ kNm/m}$ wg pkt. 2.2). W tym przypadku, po modyfikacji wynikającej ze wzorów (3,4), parametr D wynosi 1159,6 cm². Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 5.

Tabela 5. Moment krytyczny zwężenia dla schematu statycznego wg rys.4. (M_{cr} [kNm])

Lp	k_φ	M_{cr} LTBEAM	M_{cr} wg [9]	Metoda ogólna			Tabela 3 poz.1		
				C_1	C_2	M_{cr}	C_1	C_2	M_{cr}
1)	0	219,0	213,2	1,567	0,794	220,3	1,55	0,79	217,8
2)	4,79	256,5	–	1,567	0,794	258,3	1,55	0,79	255,5

2.6. Sprawdzenie poprawności metody zaproponowanej przez Trahair i inni [4] na podstawie wzorów z tabeli 4

Rozpatrzmy belkę o rozpiętości $L=8\text{ m}$ wykonaną z dwuteownika IPE 500. Belka jest obciążona w sposób pokazany w tabeli 4 (przyjmujemy, że $q=30\text{ kN/m}$). Moment skupiony na podporze wynosi ψM , gdzie $M=qL^2/12=30 \cdot 8^2/12=160\text{ kNm}$. W celu uwzględnienia wpływu blachy trapezowej postępujemy jak w p 3.1 (wszystkie charakterystyki są takie same). Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 6.

Tabela 6. Moment krytyczny zwężenia dla schematu statycznego wg tabeli 4.

Lp	Metoda	Parametr $\psi=0,8$			Parametr $\psi=1,0$		
		C_1	C_2	M_{cr} [kNm]	C_1	C_2	M_{cr} [kNm]
1)	LTBEAM	–	–	213,4	–	–	305,8
2)	Metoda ogólna	1,518	1,154	219,0	2,566	1,560	305,3
3)	Tabela 3	1,52	1,16	219,3	2,60	1,59	306,4
4)	Tabela 6.7 [4]	1,46	0,58	288,5 (35,2%)	2,42	0,97	385,6 (26,1%)
5)	LTBEAM (k_φ)	–	–	257,7	–	–	375,9
6)	Metoda ogólna (k_φ)	1,518	1,154	264,9	2,566	1,560	374,6
7)	Tabela 3 (k_φ)	1,52	1,16	265,5	2,60	1,59	376,4
8)	Tabela 6.7 [4] (k_φ)	1,46	0,58	339,2 (31,6%)	2,42	0,97	462,9 (23,1%)

3. Podsumowanie

W pracy przedstawiono wzory na moment krytyczny zwichrzenia dwuteowej belki o przekroju bisymetrycznym podpartej widelkowo na końcach. Uwzględniono wpływ ciągłego usztywnienia na skrećanie. Przedstawiono sposób wyznaczenia tej sztywności w praktycznym przypadku połączenia blachy trapezowej z belką za pomocą typowych łączników. Zamieszczono uproszczone wzory dla wybranych schematów statycznych (tabele 2,3). Przedstawione w pracy przykłady pokazują, że przedstawiona metoda prowadzi do wystarczająco dokładnego oszacowania momentu krytycznego zwichrzenia.

Literatura

- 1 PN-EN 1993-1-1:2006. Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- 2 Galéa Y. Moment critique de déversement élastique de poutre fléchies –Présentation du logiciel LTBEAM. *Revue Construction Métallique.CTICM*, 2 (2003).
- 3 Stahlbau-Kalender 2009. Herausgegeben von Kuhlman U. Ernst & Sohn, Berlin 2009.
- 4 Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot D.A., Gardner L. The behaviour and design of steel structures to EC3. Furth edition, Taylor & Francis, London and New York 2008.
- 5 Mohri F., Brouki A., Roth J.C.: Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono symmetric thin-walled beams. *Journal of Constructional Steel Research* 59 (2003) 63–90.
- 6 Serna M.A., López A., Puente I., Yong D.J.: Equivalent uniform moment factors for lateral-torsional buckling of steel members. *Journal of Constructional Steel Research* 62 (2006) 566–580.
- 7 Bijak R.: Ogólny przypadek zwichrzenia belek o dwuteowym przekroju bisymetrycznym podpartych widelkowo. *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej* 276, Budownictwo i Inżynieria Środowiska 58 (3/2011/II) 201-208.
- 8 Bijak R.: Moment krytyczny zwichrzenia niestężonych bisymetrycznych belek dwuteowych podpartych widelkowo. ICMS2011 Conference, Wrocław 2011.
- 9 Pałkowski Sz.: Konstrukcje stalowe. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2010.
- 10 DIN 18800 Teil 2. Stahlbauten. Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken. Nov. 1990.
- 11 Lindner J., Groeschel F.: Drehbettungswerte für die Profilblechbefestigung mit Seltzbolzen bei unterschiedlich großen Auflasten. *Stahlbau* 65 (1996) 218-224.
- 12 Trahair, N.S.: Flexural-Torsional Buckling of Structures, CRC Press, Boca Raton 1993.

The lateral buckling of steel I-shape beams with continuous torsional elastic restraints

Roman Bijak¹

¹ *Department of Mechanics, Metal Structures and Computer Methods,
Faculty of Civil Engineering and Architecture, Kielce University of Technology,
e-mail: r.bijak@tu.kielce.pl*

Abstract: A simple model of the lateral buckling of steel I-shape beams with elastic and continuous torsional restraints was developed. The lateral buckling beams with free warping were formulated as differential equations in terms of torsion angle. The stability equations were approximately solved with the use of the Bubnow-Galerkin orthogonalization method. The proposed approximate formulas provide the estimation of lateral buckling moment with good enough accuracy for designing purposes.

Keywords: thin-walled bars, open cross-section, continuous torsional elastic restraints.