Andrzej BANACHOWICZ, Piotr PIELA

# ESTYMACJA WSPÓŁRZĘDNYCH POZYCJI Z WYKORZYSTANIEM RZUTU ORTOGONALNEGO

**Streszczenie**

*W artykule przedstawiono zagadnienia związane z wykorzystaniem twierdzenia o rzucie ortogonalnym do konstrukcji algorytmu metody najmniejszych kwadratów i jej uogólnienia na wektory losowe skorelowane. Uogólnienie prawa przenoszenia błędów pozwala na ujęcie algorytmów estymacji parametrów nawigacyjnych w jednolity schemat jako transformacje liniową wektora losowego. Umożliwia również zastosowanie tego podejścia do estymacji położenia względnego w systemach antykolizyjnych.*

## WSTĘP

W zautomatyzowanych lub zintegrowanych systemach nawigacyjnych jednym z elementów algorytmów przetwarzania danych jest estymacja wartości parametrów nawigacyjnych na podstawie pomiarów pochodzących z różnych urządzeń i systemów nawigacyjnych (sensorów). W algorytmach tych często jest stosowana metoda najmniejszych kwadratów. Wykorzystując twierdzenie o rzucie ortogonalnym można uogólnić metodę najmniejszych kwadratów na przypadek wielowymiarowy (wektory losowe) oraz pomiary niejednorodne i skorelowane.

Modele liniowe estymacji współrzędnych pozycji statku można traktować jako transformacje liniowe wektora losowego, w których stosuje się uogólnione prawo przenoszenia (propagacji) błędów. Pozwala to również na estymowanie położenia względnego. Dotyczy to przypadków położenia względnego statków w systemach antykolizyjnych lub też położenia względnego statku w stosunku do niebezpieczeństw nawigacyjnych. Może również znaleźć zastosowanie w systemach informacji przestrzennej do określania położenia względnego obiektów kartograficznych w analizach przestrzennych. W tych przypadkach wykorzystywana jest macierz kowariancji skrośnej, obliczanej dla wektorów losowych o różnych wymiarach. Macierz ta w przypadku wektorów losowych o tym samym wymiarze redukuje się do klasycznej macierzy kowariancji.

Ważnym zastosowaniem jest również metoda pomiarów różnicowych, bowiem w przypadku pomiarów skorelowanych dodatnio (np. wykorzystywanych tym samym urządzeniem lub systemem nawigacyjnym) dokładność określanych parametrów wzrasta. Odejmują się nie tylko błędy systematyczne, ale również i losowe.

## 1. ZAGADNIENIE LINIOWEJ ESTYMACJI WEKTORA STANU

Bardzo często w nawigacji przyjmuje się modele liniowe (lub zlinearyzowane) do algorytmizacji i badań poszczególnych procesów.

Zadanie liniowej estymacji współrzędnych pozycji (lub wektora stanu w przestrzeni konfiguracyjnej) możemy sformułować następująco. Po wykonaniu *n* pomiarów parametrów nawigacyjnych dysponujemy $n$-wymiarowym wektorem pomiarów **z**, który jest związany funkcyjnie z $m$-wymiarowym wektorem współrzędnych pozycji **x** (wektorem stanu). W ogólnym przypadku wymiary obu wektorów nie są równe i zachodzi nierówność $m \leq n$. Jak pamiętamy, w nawigacji klasycznej wykorzystującej minimalny zbiór pomiarów przyjmuje się, że $m = n = 2$. Po uwzględnieniu wysokości elipsoidalnej h otrzymamy wymiar przestrzeni nawigacyjnej równy 3, czyli $m = 3$. Z kolei w przypadku określania pozycji z wykorzystaniem nawigacyjnych systemów satelitarnych mamy jeszcze wyższy wymiar wektora stanu, równy $m = 4$. Czwartym wymiarem jest poprawka zegara odbiornika $\Delta t$.

Estymację liniową w zagadnieniach nawigacyjnych możemy sformułować następująco. Mamy $n$-wymiarowy wektor pomiarów $\mathbf{z}$, który związany jest z $m$-wymiarowym wektorem wielkości estymowanych $\mathbf{x}$. Związek ten opisuje poniższe przekształcenie liniowe:

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \tag{1}$$

gdzie:
- $\mathbf{G}$ – macierz przekształcenia liniowego (o wymiarach $n \times m$), zazwyczaj jest to macierz Jacobiego odwzorowania przestrzeni wielkości estymowanych w przestrzeń pomiarów o kolumnach niezależnych liniowo,
- $\mathbf{v}$ – $n$-wymiarowy wektor błędów pomiarów.

Kolumny macierzy G wyznaczają (rozpinają) $\boldsymbol{m}$-wymiarową przestrzeń estymacji $\boldsymbol{V_E}$, która jest podprzestrzenią $\boldsymbol{n}$-wymiarowej przestrzeni pomiarów $\boldsymbol{V_P}$. Składowe wektora $\mathbf{x}$ są poszukiwanymi przez nas wartościami parametrów nawigacyjnych w przestrzeni estymacji, której bazą są kolumny macierzy $\mathbf{G}$. Tak więc przestrzeń pomiarów rozkłada się na sumę prostą przestrzeni estymacji $\boldsymbol{V_E}$ i przestrzeni do niej ortogonalnej $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})$-wymiarowej przestrzeni błędów pomiarów $\boldsymbol{V_B}$. Mamy więc

$$\boldsymbol{V_P} = \boldsymbol{V_E} \oplus \boldsymbol{V_B}. \tag{2}$$

Rozwiązaniem równania (1) jest rzut ortogonalny wektora pomiarów $\mathbf{z}$ na podprzestrzeń estymacji [1]. Rzut ten minimalizuje błąd pomiarów $\mathbf{v}$, czyli odchyłki

$$\mathbf{v} = \mathbf{z} - \mathbf{G}\mathbf{x} \tag{3}$$

Zauważy, że rzut ten jest kombinacją liniową kolumn macierzy $\mathbf{G}$. Jeżeli oznaczymy go jako prognozowany wektor pomiarów, to rzut ten możemy opisać zależnością

$$\tilde{\mathbf{z}} = \boldsymbol{Proj}_{\boldsymbol{V_E}}\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{g}^i = \mathbf{G}\mathbf{x}, \tag{4}$$

gdzie:
- $x_i$ – *i*-ta składowa wektora $\mathbf{x}$,
- $\mathbf{g}^i$ – *i*-ta kolumna macierzy $\mathbf{G}$.

Wektor pomiarów otrzyma teraz następującą postać:

$$\boldsymbol{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{v}} \tag{5}$$

Stąd, po przekształceniu, wektor błędów pomiarów będzie równy:

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{z} - \tilde{\boldsymbol{z}} \tag{6}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{V}}$ jest wektorem błędów pomiarów ortogonalnym do przestrzeni estymacji, a tym samym do wektora prognozy pomiarów $\tilde{\mathbf{Z}}$ oraz wszystkich wektorów bazowych $\mathbf{g}^i$ – kolumn macierzy $\mathbf{G}$ $(i = 1,\ldots,n)$ czyli

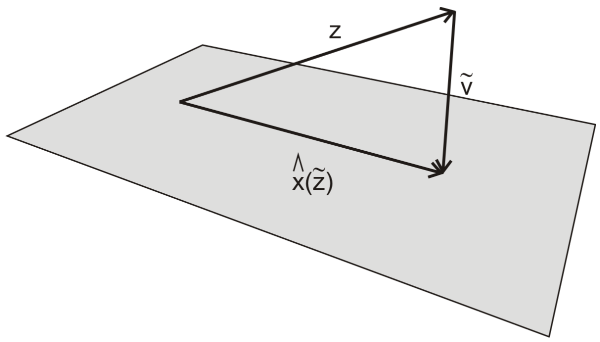
$$\tilde{\mathbf{v}} \perp \mathbf{g} \quad \text{oraz} \quad \tilde{\mathbf{v}} \perp \tilde{\mathbf{z}}. \tag{7}$$

Jak pamiętamy naszym celem jest określenie estymowanego wektora $\hat{\mathbf{x}}$, który dla danego wektora pomiarów $\mathbf{z}$ będzie minimalizował jego wektor błędów $\mathbf{v}$. Wykorzystamy do tego następujące fakty:

1. składowe wektor $\hat{\mathrm{x}}$ są współrzędnymi wektora prognozy pomiarów $\tilde{\mathrm{z}}$ w przestrzeni estymacji $\mathrm{V_E}$ przy bazie $\mathrm{g^i}$ – kolumny macierzy $\mathrm{G}$,
2. wektor błędów pomiarów $\tilde{\mathrm{v}}$ jest ortogonalny do przestrzeni estymacji $\mathrm{V_E}$, a tym samym do każdego wektora bazowego $\mathrm{g^i}$ – kolumny macierzy $\mathrm{G}$, więc tym samym i do wektora prognozy pomiarów $\tilde{\mathrm{z}}$,
3. wektor błędów pomiarów jest opisany równaniem $\tilde{\mathrm{v}} = \mathrm{z} - \tilde{\mathrm{z}}$,
4. ortogonalność dwóch wektorów jest równoważna zerowaniu się ich iloczynu skalarnego, tj.

$$\tilde{\mathbf{v}} \perp \tilde{\mathbf{z}} \quad \Leftrightarrow \quad (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{z}}) = 0 \tag{8}$$

Rysunek 1 ilustruje zasadę rzutu ortogonalnego wektora pomiarów $\boldsymbol{z}$ na przestrzeń estymacji.




***Rys. 1.*** *Rzut ortogonalny wektora pomiarów na przestrzeń estymacji [opr. wł as.].*

Korzystając z faktu, że wektor błędów pomiarów jest ortogonalny do przestrzeni estymacji, a tym samym do jej bazy, otrzymamy $m$ następujących iloczynów skalarnych:

$$(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{g}^j) = (\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{g}^j) = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \boldsymbol{m}. \tag{9}$$

Uwzględniając wzór (4) oraz własności iloczynu skalarnego będziemy mieli

$$\left(\boldsymbol{z} - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{g}^j) - \left(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right) = \mathbf{0} \tag{10}$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j)\boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{g}^j), \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \boldsymbol{m}. \tag{11}$$

Zależność (11) opisuje układ $m$ równań. Uwzględniając iloczyny skalarne poszczególnych wektorów możemy powyższy układ zapisać w postaci równania wektorowo-macierzowego

$$\boldsymbol{G}^T \boldsymbol{G} \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{z}. \tag{12}$$

Wyrażenie $\mathbf{G^T G}$ jest macierzą Grama macierzy $\mathbf{G}$. Ponadto zauważmy, że zależność liniowa jakichkolwiek dwóch kolumn macierzy $\mathbf{G}$ oznacza, że ich iloczyn skalarny jest równy jedności, tj

$$(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j) = \mathbf{1}, \tag{13}$$

dla dowolnych $i, j$ oraz $i \neq j$. Mogą więc zajść dwa następujące przypadki. W pierwszym przypadku, dla $m > 2$, warunek (13) spełniony jest tylko wtedy, gdy gradienty $\mathbf{g}_i$ (wiersze macierzy $\mathbf{G}$) wszystkich hiperpowierzchni pozycyjnych leżą w jednej płaszczyźnie. Natomiast w drugim przypadku, który ma miejsce w przypadku prowadzenia klasycznej nawigacji na powierzchni Ziemi (ściślej powierzchni odniesienia), tj. dla $m = 2$, warunek powyższy jest spełniony, gdy gradienty linii pozycyjnych $\mathbf{g}_i$ są równoległe. Rozbicie rozpatrywanego zagadnienia na dwa przypadki wynika z faktu, że dla przestrzeni nawigacyjnej przyjmujemy często wymiar dim $V_N = 4$ (np. w nawigacyjnych satelitarnych systemach pseudoodległościowych). Zaś przypadki obliczania wektorów współrzędnych pozycji o mniejszych wymiarach odnosimy do jej podprzestrzeni. Okazuje się ponadto, że istnieją związki pomiędzy macierzą Jacobiego $\mathbf{G}$ (gradientów) funkcji nawigacyjnych a jej macierzą Grama. Są one ujęte w twierdzeniu 1 [5].

**Twierdzenie 1.**
Macierz Grama $\mathbf{G^T G}$ o wymiarach $m \; x \; m$ macierzy $\mathbf{G}$ o wymiarach $n \times m$ jest dodatnio określona, gdy rząd macierzy $\mathbf{G}$ jest równy $m$ i dodatnio półokreślona, gdy rząd macierzy $\mathbf{G}$ jest mniejszy od $m$.

Konsekwencje tego twierdzenia są następujące. Jeżeli rząd macierz $\mathbf{G}$ jest równy $m$, to macierz Grama $\mathbf{G^T G}$ jest macierzą nieosobliwą. Istnieje więc macierz do niej odwrotna i tym samym rozwiązanie zagadnienia (12). Z kolei rząd macierz $\mathbf{G}$ zależny jest od liczby niezależnych liniowo kolumn (lub wierszy) tej macierzy. Dobierając taką konfigurację hiperpowierzchni (linii) pozycyjnych, że kolumny tej macierzy będą niezależne liniowo, otrzymamy zawsze rozwiązanie zagadnienia (12), czyli współrzędne pozycji. Dlatego też w praktyce nawigacyjnej interesuje nas ten szczególny przypadek. Rozwiązaniem (12) będzie wtedy estymowany wektor współrzędnych pozycji określony wzorem

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{G}^T \boldsymbol{G})^{-1} \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{z}. \tag{14}$$

Zależność powyższa opisuje metodę najmniejszych kwadratów w ujęciu teorii rzutów ortogonalnych. Określa ona współrzędne pozycji przy wykorzystaniu wszystkich dostępnych i jednakowo dokładnych pomiarów parametrów nawigacyjnych ($n$ hiperpowierzchni pozycyjnych). Ponadto z powyższego twierdzenia wynika, że nawet w przypadku, gdy rząd macierzy $\mathbf{G}$ jest mniejszy od $m$, to jest ona półdodatnio określona i $\det \mathbf{G} = 0$. Wtedy też będzie istniało rozwiązanie zagadnienia (12) metodą najmniejszych kwadratów [6].

## 2. POMIARY O RÓŻNEJ DOKŁADNOŚCI I SKORELOWANE

Powyższe rozważania dotyczą sytuacji, gdy wykonywane pomiary są jednakowo dokładne, co oznacza w nawigacji, że mierzone parametry nawigacyjne są jednorodne i o jednakowej wariancji. Współcześnie, szczególnie w systemach zautomatyzowanych i zintegrowanych, taka sytuacja zazwyczaj nie występuje. Należy więc w procesie estymacji wektora stanu uwzględniać ten fakt w postaci macierzy kowariancji pomiarów $\mathbf{R}$. Nadaje ona poszczególnym składowym wektora pomiarów wagi odwrotnie proporcjonalnej do wartości wariancji (błędu średniego).

Jeśli równanie (5) obustronnie wymnożymy przez macierz nieosobliwą, to wszystkie rozważania i wnioski, aż do zależności (14) będą prawdziwe. Macierz kowariancji pomiarów $\mathbf{R}$ jest z założenia macierzą nieosobliwą, byłaby osobliwa tylko w przypadku deterministycznym. Istnieje więc macierz do niej odwrotna $\mathbf{R}^{-1}$. Uzasadnione jest przyjęcie tej macierzy jako macierzy wag dla wektora pomiarów $\mathbf{z}$. Możemy teraz równanie (5) zapisać w następującej postaci:

$$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{R}^{-1}\tilde{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{R}^{-1}\tilde{\boldsymbol{v}} \tag{5a}$$

Powtarzając dalszy ciąg wcześniejszych rozważań otrzymamy

$$\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} \tag{12a}$$

oraz rozwiązanie tego zagadnienia

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z}. \tag{14a}$$

Zależność (14a) jest uogólnieniem metody najmniejszych kwadratów na przypadek niejednorodnych, niejednakowo dokładnych i skorelowanych pomiarów. Macierz kowariancji estymowanego wektora stanu wyraża się następującą zależnością [2], [3], [5]:

$$\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G})^{-1}. \tag{15}$$

Zależności (14a) i (15) odgrywają istotną rolę w algorytmach estymacji w układów liniowych.

## 3. UOGÓLNIONE PRAWO PRZENOSZENIA BŁĘDÓW

W nawigacji interesuje nas wartość średnia wektora losowego i jego macierz kowariancji. Najczęściej otrzymujemy go jako wartość pośrednią w postaci sumy (ogólniej: kombinacji liniowej) zmiennych losowych oraz stałych (zmiennych nielosowych). Twierdzenie 2 jest uogólnieniem prawa przenoszenia błędów dla skończonej kombinacji liniowej wektorów losowych [3].

**Twierdzenie 2.**
Załóżmy, że:
1. $\mathbf{z}$ – $k$-wymiarowe wektory losowe,
2. $\mathbf{y}$ – $n$-wymiarowe wektory nielosowe,
3. $\mathbf{A}$ – $(m \times k)$-wymiarowe macierze,
4. $\mathbf{B}$ – $(m \times n)$-wymiarowe macierze,
5. $i,\ j, m, n, r, s \in \boldsymbol{N}$,
6. istnieją: wektory średnie $\bar{\mathbf{z}}_i$ oraz macierze kowariancji $\mathbf{P}_{\mathbf{z}_i\mathbf{z}_j}$ (kowariancji skrośnej) dla każdego $i,\ j$.

Wówczas wektor

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{z}_i + \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{B}_j\boldsymbol{y}_j \tag{16}$$

jest $m$-wymiarowym wektorem losowym, o wartości oczekiwanej

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{A}_i\bar{\boldsymbol{z}}_i + \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{B}_j\boldsymbol{y}_j \tag{17}$$

oraz macierzy kowariancji

$$\boldsymbol{P}_x = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{P}_{z_iz_j}\boldsymbol{A}_j^T. \tag{18}$$

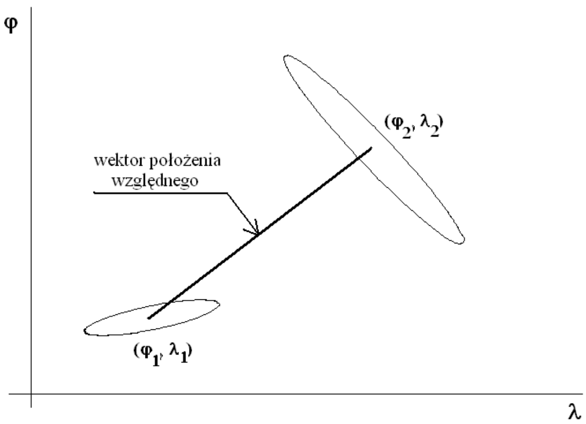
Z twierdzenia 2 wynika następujący wniosek, że jeśli dany wektor jest różnicą dwóch wektorów losowych

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y},$$

to jego wartość średnia i macierz kowariancji wyrażają się zależnościami

$$\bar{\boldsymbol{z}} = \bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}} \text{ oraz } \mathbf{P_z} = \mathbf{P_x} + \mathbf{P_y} - \mathbf{P_{xy}} - \mathbf{P_{xy}^T}. \tag{19}$$

Wniosek ten można wykorzystać miedzy innymi w ocenie sytuacji kolizyjnej w okrętowych systemach antykolizyjnych [2]. Rysunek 2 przedstawia położenie względne dwóch statków, które posiadają określone wektory współrzędnych wraz z ich macierzami kowariancji, np. otrzymane z systemu pozycyjnego GPS, albo też dane o statku obcym pochodzą z systemu AIS (Universal Ship borne Automatic Identification System).




***Rys. 2.*** *Położenie względne dwóch statków w systemie antykolizyjnym [opr. włas.]*

Położenie względne statków wyraża się w postaci wektora położenia względnego, będącego różnicą wektorów ich współrzędnych pozycji

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1. \tag{20}$$

Macierz kowariancji wektora położenia względnego wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{P}_{\Delta x} = \boldsymbol{P}_{x_1} + \boldsymbol{P}_{x_2} - \boldsymbol{P}_{x_1x_2} - \boldsymbol{P}_{x_1x_2}^T \tag{21}$$

Wzory (20) i (21) można również wykorzystywać do estymacji różnicy dwóch dowolnych wektorów losowych. Określają one bowiem składowe wektora różnicowego i pośrednie jego długość oraz kierunek. Przykładem jest określanie położenia obiektów kartograficznych w systemach informacji przestrzennej lub w przypadku autonomicznego określania współrzędnych z wykorzystaniem systemu pozycyjnego GPS. Również na tej samej zasadzie opiera się idea tzw. kompasów satelitarnych, w których dwa odbiorniki GPS na jednej platformie określają wzajemne położenie względne. W tym przypadku wykorzystuje się dodatkowo pomiary fazowe w celu zwiększenia dokładności określanego kierunku.

Twierdzenie 2 wyjaśnia również zalety pomiarów różnicowych, gdy zmienne losowe lub wektory losowe są dodatnio skorelowane. W tym przypadku, zgodnie z zależnością (21), występuje zmniejszenie macierzy kowariancji wektora różnicowego (zwiększenie jego dokładności). Niezależnie od tego, również ewentualne błędy systematyczne też się redukują.

## WNIOSKI

W nawigacji bardzo często stosuje się modele liniowe lub zlinearyzowane, szczególnie w zagadnieniach transformacji danych i estymacji pomiarów. Ważnym jest opracowywanie i badanie różnych metod analizy danych nawigacyjnych z wykorzystaniem aparatu analitycznego algebry liniowej. Istotnym jest też możliwość unifikacji metod i algorytmów, co skutkuje zwiększeniem przejrzystości, spójności i niezawodności oprogramowania nawigacyjnego. Powoduje to również uproszczenie algorytmów numerycznych i wiążące się z tym zmniejszenie błędów obliczeniowych.

Idea rzutu ortogonalnego w przestrzeniach liniowych pozwala na uogólnienie metody najmniejszych kwadratów na wektory losowe z uwzględnieniem korelacji pomiędzy składowymi. Umożliwia tym samym ujednolicenie i rozszerzenie algorytmów estymacji parametrów nawigacyjnych na przypadki pomiarów niejednorodnych (pochodzących z różnych urządzeń i systemów nawigacyjnych) oraz skorelowanych.

Uogólnione prawo przenoszenia błędów skończonej kombinacji liniowej wektorów losowych pozwala na estymację i analizę dowolnych wektorów losowych, w tym również kombinację liniową wektorów o różnych wymiarach. Tym samym rozszerza wykorzystanie takich samych algorytmów do analizy wektorów losowych w przestrzeniach o różnych wymiarach. Ma również zastosowanie w określaniu wzajemnego położenia w okrętowych systemach antykolizyjnych, analizie przestrzennej w systemach informacji geograficznej (GIS) oraz pomiarach różnicowych.

## BIBLIOGRAFIA


1. Banachowicz A., Geometria liniowego modelu nawigacji parametrycznej. Zeszyty Naukowe AMW 1991, nr 109A, Gdynia.
2. Banachowicz A., Dokładność względna. VI Międzynarodowe Sympozjum Nawigacyjne „Nawigacja morska i bezpieczeństwo transportu morskiego". Akademia Morska, Gdynia 2005.
3. Banachowicz A., Uogólnione prawo przenoszenia błędów losowych. Prace Wydziału Nawigacyjnego Akademii Morskiej w Gdyni nr 18, Gdynia 2006.
4. Hsu D.Y., Spatial Error Analysis. IEEE Press, New York 1999.
5. Ogata K., Matody przestrzeni stanów w teorii sterowania. WN-T, Warszawa 1974.
6. Rao C.R., Modele liniowe statystyki matematycznej. PWN, Warszawa 1982.


## COORDINATES ESTIMATION USING ORTHOGONAL PROJECTION


***Abstract***

*This paper presents issues related to use of orthogonal projection theorem to construct method of least squares and its generalization on correlated random vectors. Generalization of propagation of error allows to include algorithms of navigation parameters estimation in homogeneous schema as a linear transformation of random vector. It also allows to apply this approach to relative position estimation in anti-collision systems.*



Autorzy:
dr hab. inż. **Andrzej Banachowicz** prof. ZUT - Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Wydział Informatyki, 71-210 Szczecin: ul. Żołnierska 49. Tel: +48 91 449 5517, abanachowicz@wi.zut.edu.pl
dr inż. **Piotr Piela** - Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Wydział Informatyki, 71-210 Szczecin: ul. Żołnierska 49. Tel: +48 91 449 5584, ppiela@wi.zut.edu.pl