MINUT 2021 (3), s. 74–86
ISSN 2719-3063

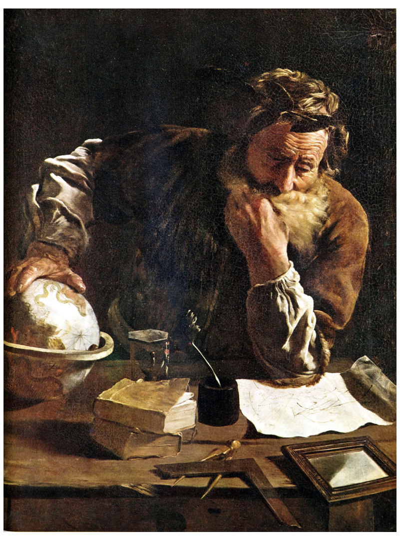
Czesław BAGIŃSKI[1]

[1]Katedra Informatyki Teoretycznej, Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok

O Archimedesie i jego niektórych odkryciach

Streszczenie. W artykule opisano burzliwe dzieje dokumentów zawierających odkrycia Archimedesa, w szczególności słynnego Palimpsestu, a także wybrane osiągnięcia tego wielkiego uczonego.

Słowa kluczowe: Kodeksy Archimedesa, Palimpsest Archimedesa.



Zamyślony Archimedes
Domenico Fetti (1589 - 1623)[1]

Przynajmniej przez część historyków nauki Archimedes jest uważany za największego uczonego w dziejach ludzkości. Można z tym poglądem dyskutować, bo nie ma uniwersalnej miary pozwalającej na obiektywne oceny, ale pewne jest, że jego prace przez około dwa tysiące lat miały istotny wpływ na rozwój matematyki i fizyki. Jednym z najważniejszych matematycznych osiągnięć Archimedesa było stworzenie idei *rachunku nieskończenie małych* oraz *metody wyczerpywania*, dzięki którym podał kompletne i ścisłe dowody wielu ważnych twierdzeń z geometrii, i które prawie dwa tysiące lat później, w XVII wieku, stały się fundamentem dla rachunku różniczkowego i całkowego, opracowanego niezależnie przez I. Newtona i W. G. Leibniza. Archimedes jako pierwszy zastosował matematyczne metody do opisu zjawisk fizycznych, tym samym tworząc podstawy fizyki. Do idei Archimedesa odwołuje się Galileusz w jednym ze swych najwybitniejszych dzieł, *Rozmowy i dowodzenia w zakresie dwóch nowych umiejętności*, wydanym w 1638 roku. Wyrazem uznania dla dokonań Archimedesa było określenie jednego z najwybitniejszych matematyków przełomu XVII i XVIII w. Johanna Bernoulliego Archimedesem jego czasów[2]. Warto wreszcie podkreślić, że najwyższe wyróżnienie, jakie może otrzymać matematyk, Medal Fieldsa, ma na awersie wizerunek Archimedesa. Medal przyznawany jest raz na cztery lata przez Międzynarodową Unię Matematyczną najwybitniejszym matematykom, którzy nie osiągnęli czterdziestego roku życia.

[1]Zdjęcie pobrane z Wikipedii: `https://pl.wikipedia.org/wiki/Archimedes`.

[2]Na grobie J. Bernoulliego znajduje się inskrypcja „Archimedes jego wieku” [6].

Autor korespondencyjny: Cz. Bagiński (c.baginski@pb.edu.pl).
Data wpłynięcia: 01.07.2021.

O życiu Archimedesa wiadomo niewiele i jest to wiedza oparta głównie na kilku anegdotycznych opowieściach, odnoszących się do epizodycznych zdarzeń, przytaczanych w odmiennych wersjach, czasem mocno się różniących. Taki charakter ma również przekaz o jego roli w obronie Syrakuz, obleganych przez Rzymian, w czasie drugiej wojny punickiej. Być może ich źródłem jest biografia Archimedesa napisana przez współczesnego mu Herakleidesa, która się jednak nie zachowała (o ile w ogóle istniała). Imię Herakleidesa jest wymieniane w kilku źródłach, w tym w pracy Archimedesa *O stożkowych*.

Ojcem Archimedesa był astronom o imieniu Fidiasz[3]. Jak wynika z historycznych analiz, to imię nadawano w rodzinach artystów, co może sugerować, że dziadek Archimedesa był artystą. Historycy podają, że Archimedes był również spokrewniony z władcą Syrakuz Hieronem II.

Archimedes urodził się w 287 r. p.n.e. a zmarł w 212 r. p.n.e. w Syrakuzach na Sycylii. Data narodzin jest przyjęta na podstawie niepewnej informacji podawanej m.in. przez Plutarcha[4], że Archimedes, w chwili śmierci, miał 75 lat. Data śmierci jest pewna, ponieważ jest to data zdobycia Syrakuz przez Rzymian, w czasie drugiej wojny punickiej (218-201 r. p.n.e.). Chronologia tej wojny, której głównymi stronami były Rzym i Kartagina, jest wiarygodnie opisana i udokumentowana.

W młodości Archimedes pobierał nauki w Aleksandrii, co można wnosić na podstawie jego późniejszej korespondencji z uczonymi z Aleksandrii, pochodzącym z Cyreny Eratostenesem – trzecim z kolei głównym bibliotekarzem Biblioteki Aleksandryjskiej, Cononem z Samos – astronomem, wielce cenionym przez Archimedesa i wreszcie Dositeusem z Pelusium – uczniem Conona. Część owych listów zachowała się dzięki temu, że były wstępami do prac, jakie Archimedes wysyłał do swoich naukowych przyjaciół i dlatego razem z pracami były kopiowane przez kopistów. Zapewne tam, w Aleksandrii, dogłębnie przestudiował *Elementy* Euklidesa, do których odwoływał się w swoich późniejszych pracach, jak do elementarza wiedzy matematycznej. Jego prace były dalece bardziej zaawansowane i są w nich odwołania do wyników innych uczonych poprzedników, zwłaszcza do prac Eudoksosa, którego dorobek niestety przepadł w czeluściach dziejów, a jak wynika z uwag innych autorów znacznie wykraczał poza treść *Elementów* Euklidesa.

Dwie najbardziej znane anegdoty są związane właśnie z Hieronem II. Pierwsza z nich mówi o tym jak to król zlecił złotnikowi wykonanie królewskiej korony. Po jej otrzymaniu zaczął podejrzewać, że złotnik zawłaszczył część złota zastępując je innym metalem. Polecił Archimedesowi zbadanie, czy jego podejrzenia są słuszne. Problem całkowicie pochłonął Archimedesa i gdy po wielu długich rozmyślaniach wpadł wreszcie na rozwiązanie, a było to w czasie kąpieli, wybiegł nago na ulicę krzycząc z entuzjazmem, „Eureka! Eureka!”. Archimedes doszedł do wniosku, że różne ciała o tej samej masie muszą mieć różne objętości. Jeśli zatem weźmiemy tyle złota ile waży korona i porównamy objętość tego złota z objętością korony, to otrzymamy odpowiedź. Objętości zaś, można zmierzyć ilością wypartej wody przez każde z tych ciał. Wedle legendy, korona wyparła więcej wody, niż ważące tyle samo złoto, zatem korona miała większą objętość, co dowodzi tego, że część złota została zastąpiona lżejszym metalem.

Ta anegdota zwykle przytaczana jest w szkole podstawowej na lekcji fizyki, gdy omawia się prawo Archimedesa: *Każde ciało zanurzone w cieczy traci na wadze tyle, ile waży ciecz wyparta przez to ciało.* W szkole podstawowej nie mówi się natomiast – w każdym razie, nie mówiono tego w mojej szkole – że Archimedes był pierwszym, który wyznaczył pole koła, pole powierzchni i objętości kuli, walca i stożka, nie mówiąc o innych ważnych matematycznych odkryciach.

Druga anegdota mówi o tym, jak Archimedes opracował system dźwigni, który pozwolił na zwodowanie okrętu zbudowanego na rozkaz Hierona II. Statek był tak duży i ciężki, że budowniczowie nie potrafili go zwodować. Znowu zwrócono się o pomoc do Archimedesa. System dźwigni, jaki zbudowano wedle

[3]Takie imię nosił również najwybitniejszy rzeźbiarz Starożytnej Grecji żyjący w V w. p.n.e.

[4]Plutarch (ok. 50 n.e. – ok. 125 n.e.) – jeden z najwybitniejszych historyków i pisarzy czasów, w których żył.

jego projektu, pozwolił na zwodowanie okrętu jednej osobie i król Hieron II uczynił to osobiście. Od tej anegdoty pochodzi sentencja przypisywana Archimedesowi: *Dajcie mi punkt oparcia, a poruszę Ziemię.*

Król Sycylii, Hieron, był sojusznikiem Kartaginy i z tego powodu od 214 r. p.n.e. wojska rzymskie pod wodzą Marka Klaudiusza Marcellusa oblegały jej stolicę, Syrakuzy. Jednym z głównych architektów skutecznej, długiej obrony Syrakuz był Archimedes. Jego techniczne pomysły, usprawniające obronę sprawiły, że zyskał niezwykłe uznanie nie tylko u króla i obywateli Syrakuz, ale również u Rzymian. Różne katapulty i wyrzutnie miotające głazy i kamienie, raziły wroga zarówno z dalszej, jak i bliższej odległości, a dzięki pomysłowym dźwigom i dźwigniom obrońcy wywracali okręty podpływające do murów od strony morza. Przypisywano Archimedesowi również skonstruowanie ogromnych wklęsłych luster, dzięki którym można było doprowadzić do zapalenia okrętu z pewnej odległości, co jest już z pewnością fantazją.

Mozaika pochodząca z I w. n.e.[5]

Cyceron odnajdujący grób Archimedesa
Benjamin West (1738 – 1820)[6]

Gdy w końcu, dzięki podstępowi, Rzymianie wtargnęli do Syrakuz, a zwykle takim okolicznościom towarzyszyły potworne rzezie, Archimedes, jak wielu jego współobywateli, poniósł śmierć. Legenda głosi, że Marcellus nakazał sprowadzenie Archimedesa przed swoje oblicze, by wyrazić swoje uznanie dla jego niezwykłych pomysłów. Rzymscy żołnierze znaleźli go zagłębionego w rozmyślaniach, i gdy odmówił żądaniu pójścia z nimi, bo chciał dokończyć rozwiązanie pewnego problemu, jeden z żołnierzy ugodził go mieczem. Śmierć Archimedesa na pewno odbiła się wielkim echem w starożytnym świecie. Prawie półtora wieku później, w 75 r. p.n.e. Cyceron odszukał zaniedbany, zarośnięty krzakami grób Archimedesa. Było to swego rodzaju spotkanie najwybitniejszych postaci Starożytnego Rzymu i Starożytnej Grecji. Cyceron odnotował to w swoich tekstach, a po wielu wiekach kilku malarzy poświęciło temu zdarzeniu swoje obrazy. Na nagrobku, zgodnie z życzeniem Archimedesa, wyryto rysunek ilustrujący jedno z twierdzeń, z którego był szczególnie dumny: *Pole powierzchni i objętość kuli są równe dwóm trzecim, odpowiednio, pola powierzchni i objętości walca opisanego na tej kuli.* Grób Archimedesa nie zachował się do dzisiaj, co może być efektem braku troski mieszkańców Syrakuz o pamięć o swoim obywatelu, jednym z najwybitniejszych uczonych w historii ludzkości, ale też może być efektem sąsiedztwa Etny, widocznej w oddali na obrazie Westa.

Jednym z najważniejszych źródeł wiedzy o matematycznych dokonaniach Archimedesa jest pergaminowy palimpsest odkryty ok. 1890 roku w Konstantynopolu. Nie zachowały się żadne prace Archimedesa w oryginale. Ich treść przetrwała pierwsze stulecia, dzięki pracy skrybów cierpliwie przepisujących ważne teksty, w ośrodkach rozwoju nauki tamtych czasów. Na pewno kopie jego prac powstały w Aleksandrii, w tamtejszej Bibliotece. Początkowo były to kopie, jak sam oryginał, spisane na papirusie, później – na dużo trwalszym pergaminie. Pod koniec IV w.n.e., w czasie burzliwych zdarzeń, Biblioteka Aleksandryjska została zburzona i w krótkim czasie Aleksandria przestała odgrywać rolę centrum rozwoju nauki. Tę rolę stopniowo zaczął przejmować założony w połowie czwartego wieku n.e. Konstantynopol, stolica Wschodniego Imperium Rzymskiego, późniejsza stolica Cesarstwa Bizantyjskiego i wreszcie państwa

[5]Obraz pobrany ze strony: `https://www.math.nyu.edu/ crorres/Archimedes/Death/DeathIllus.html`. Mozaika znajduje się w Städtische Galerie Liebieghaus we Frankfurcie nad Menem w Niemczech.

[6]Obraz pobrany ze strony Yale University Art Gallery: `https://artgallery.yale.edu/collections/objects/53032`.

tureckiego. Około 530 roku n.e. (a więc około 750 lat po śmierci Archimedesa), jeden z architektów wspaniałej konstantynopolskiej budowli, świątyni Hagia Sofia, Izydor z Miletu zebrał wszystkie zachowane do tego czasu prace w jednym manuskrypcie. Przez kilka kolejnych wieków nie było sprzyjających warunków do rozwoju nauki. Z tego okresu nie ma nawet wzmianki o pracach Archimedesa. Do dzisiaj zachowały się tylko trzy różne kopie manuskryptu Izydora z Miletu. Wszystkie powstały w Konstantynopolu w IX i X wieku. Nazywane są Kodeksami Archimedesa A, B i C. Ich treści w znacznej części się pokrywają. Niektóre prace Archimedesa są zawarte tylko w dwóch kodeksach, niektóre tylko w jednym z nich.

Burzliwe dzieje Konstantynopola miały kluczowy wpływ na losy wszystkich kopii. W 1204 r. jedna z wypraw krzyżowych, zanim dotarła do Ziemi Świętej „zbłądziła" do Konstantynopola. Krzyżowcy złupili to chrześcijańskie miasto i, jak większość cennych ruchomości, manuskrypty zmieniły swojego właściciela. W efekcie kolejnych wędrówek jeszcze w XIII wieku Kodeksy A i B znalazły się w Bibliotece Watykańskiej. Tam ich treść została przetłumaczona na łacinę przez franciszkańskiego mnicha Wilhelma z Moerbeke. Kodeks B zaginął w XIV wieku. Kodeks A został ponownie przetłumaczony na łacinę przez Jacopa z Cremony na polecenie papieża Mikołaja V. Potem kilkakrotnie zmieniał właściciela. Pod koniec XV wieku na polecenie Medyceusza, Wawrzyńca Wspaniałego, księcia Toscanii, został skopiowany, a kopia znajduje się w Bibliotece Laurenziana we Florencji. Oryginał Kodeksu A zaginął w drugiej połowie XVI wieku. Pierwsze drukowane wydanie dzieł Archimedesa, oparte na drugim ze wspomnianych łacińskich tłumaczeń ukazało się w Bazylei w 1544 roku.

Po 1204 roku, Kodeks C w nieznany sposób znalazł się w Ziemi Świętej, w jednym z greckich klasztorów. Tam dzieło okazało się bezużyteczne, bo zapewne nikt, kto miał do niego dostęp, nie rozumiał ani treści ani ich wagi. Pergamin był cennym materiałem – ze skóry jednej owcy można było uzyskać średnio osiem kartek pergaminu, zatem na przygotowanie takiego manuskryptu potrzebowano skór z całego stada liczącego co najmniej 24 owce. Dlatego też nikt nie wyrzucał niepotrzebnych manuskryptów. Rozdzielano je na oddzielne kartki i wywabiano tekst na ile było to możliwe bez zniszczenia pergaminu. Część kartek ulegała zniszczeniu, ale większość była prawie pełnowartościowym materiałem. Rozcinano kartki na pół i po uzupełnieniu braków z innych, tak „odzyskanych" manuskryptów, zszywano ponownie tworząc kodeks dwukrotnie mniejszy. Jego karty zapełniano pisząc teksty prostopadle do ledwo widocznych tekstów oryginalnych. W taki właśnie sposób potraktowano Kodeks C. W 1229 roku powstał z niego modlitewnik, nowy manuskrypt, który obecnie nazywany jest Palimpsestem Archimedesa. Nie wiadomo w jakich okolicznościach powrócił do Konstantynopola[7], do metochionu – filii jerozolimskiego klasztoru. W klasztornej bibliotece został odkryty w 1899 roku w czasie katalogowania manuskryptów. Kilkadziesiąt lat wcześniej, w 1846 roku miał go w rękach wybitny znawca manuskryptów, niemiecki uczony, Constantin Tischendorf, który prawdopodobnie wyrwał zeń potajemnie jedną kartkę. Dwadzieścia lat później, jego potomkowie sprzedali ją bibliotece uniwersytetu w Cambridge. W 1906 roku wybitny znawca dorobku Archimedesa, duński filolog i historyk, Johan Ludwig Heiberg, przeprowadził szczegółowe badania pierwotnych treści manuskryptu i w latach 1910-1915 przedstawił greckie teksty zawartych w nim prac.

Turcja brała aktywny udział w I Wojnie Światowej, a po jej zakończeniu Konstantynopol znalazł się pod jurysdykcją państw alianckich. Powstanie Turków pod wodzą późniejszego prezydenta Atatürka doprowadziło do wyzwolenia. Władze tureckie rozwiązały greckie bractwa zakonne, a patriarchę Konstantynopola skazały na powieszenie. Cała biblioteka metochionu została przez Greków potajemnie wywieziona, głównie do Aten. Część manuskryptów, w tym Palimpsest Archimedesa, została nielegalnie sprzedana. Na ok. 80 lat słuch o Palimpseście zaginął. W 1998 roku pojawił się na aukcji w domu aukcyjnym Christie's wywołując sensację. Patriarchat greckiego kościoła zablokował aukcję twierdząc, że przedmiot aukcji został wcześniej skradziony. Sąd, oddalił zastrzeżenia, bo francuska rodzina, która wystawiła Palimpsest

[7]Konstantynopol, w latach 1453-1922, był stolicą państwa osmańskiego, a w roku 1930 jego nazwę zmieniono na Stambuł.

na licytację przedstawiła wiarygodne dla sądu dowody posiadania go od co najmniej 30 lat, bez ukrywania tego faktu. Zgodnie z prawem francuskim wystarcza to do uznania własności i chociaż był to sąd nowojorski, to swoje orzeczenie uzasadnił odwołując się do prawa francuskiego. Palimpsest został zlicytowany za 2 miliony USD, a nabywcą został anonimowy Amerykanin, który przekazał go do badań i prac konserwatorsko-restauracyjnych do Walters Museum of Art w Baltimore.

W okresie tych 80 lat Palimpsest uległ poważnym uszkodzeniom, większym niż przez wszystkie poprzednie wieki od momentu powstania. Złe warunki przechowywania, wilgoć i pleśń doprowadziły do nieodwracalnych uszkodzeń. Dodatkowo, już po szczegółowych badaniach Heiberga, cztery karty zamalowano wizerunkami ewangelistów, najwyraźniej z myślą o upiększeniu modlitewnika i tym samym podniesieniu jego wartości. Mimo to, badania Palimpsestu przeprowadzone ostatnio, z użyciem najnowocześniejszych technologii przyniosły nowe informacje, których Heiberg, posługujący się dosłownie „szkiełkiem i okiem", nie był w stanie odczytać. Barwny opis historii Palimpsestu oraz prac nad jego konserwacją i odczytaniem zawiera monografia [7].

Archimedes był autorem kilkunastu prac:

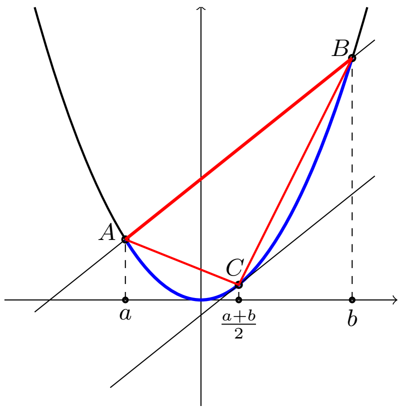
1. *O równowadze płaszczyzn (2 prace);*
2. *O kwadraturze paraboli;*
3. *O sferze i walcu (2 prace);*
4. *O spiralach;*
5. *O konoidach i sferoidach;*
6. *O ciałach pływających (2 prace);*
7. *O mierzenie okręgu;*
8. *O liczeniu piasku;*
9. *O metodzie;*
10. *Stomachion;*
11. *O równowadze dźwigni;*
12. *O lustrach.*

Treści dwóch ostatnich, wymienionych na powyższej liście nie zachowały się do dzisiaj. Wszystkie pozostałe można znaleźć w Kodeksach A, B i C. Jak wspomnieliśmy, Kodeksy A i B nie zachowały się, ale istnieje kopia Kodeksu A, przechowywana we Florencji oraz tłumaczenia łacińskie, które obejmują treści obu kodeksów. Angielskie wersje tych prac oparte na łacińskich tłumaczeniach zostały wydane pod koniec XIX wieku [1]. Suplement tej monografii [2], wydany w 1912 roku zawiera pracę *O metodzie*, chyba najważniejszą z prac Archimedesa, która zachowała się wyłącznie dzięki Palimpsestowi. Drugą pracą, której nie zawierały Kodeksy A i B, a znalazła się w Kodeksie C jest Stomachion.

Nie będziemy omawiać wszystkich prac Archimedesa, ograniczając się tylko do prezentacji jego wybranych odkryć. Nie będziemy się przy tym silić na śledzenie rozumowania samego Archimedesa. Zarówno notacja, jak i wiedza do której się będziemy odwoływać, jest powszechnie znana, ale niekoniecznie elementarna.

Kwadratura paraboli.

Pole ograniczone łukiem paraboli i jej cięciwą łączącą końce tego łuku jest równe $\frac{4}{3}$ *pola największego trójkąta, którego podstawą jest owa cięciwa, a trzeci wierzchołek leży na łuku paraboli.*



Rozważania wystarczy przeprowadzić dla paraboli o równaniu $y = px^2$, gdzie p jest ustaloną liczbą dodatnią. Niech dalej a, b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, $a < b$, natomiast $A = (a, pa^2)$ i $B = (b, pb^2)$, punktami naszej paraboli. Trójkąt o podstawie AB, którego trzeci wierzchołek $C = (c, pc^2)$ leży na paraboli między punktami A i B ma największe pole, gdy styczna do paraboli w tym punkcie jest równoległa do prostej AB. Niech

$$y = mx + n$$

będzie równaniem tej stycznej. Jej współczynnik kierunkowy jest zatem równy $m = \frac{pb^2 - pa^2}{b-a} = p(a+b)$. Do obliczenia wyrazu wolnego n równania stycznej skorzystajmy z tego, że układ równań:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = px^2 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązując je przy tym założeniu otrzymujemy najpierw n

$$px^2 - mx - n = 0, \quad \Delta = m^2 + 4pn = 0, \quad n = -\frac{m^2}{4p} = -\frac{p^2(a+b)^2}{4p} = -p\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

a po rozwiązaniu równania dostajemy pierwiastek $c = \frac{a+b}{2}$. Czyli $C = (\frac{a+b}{2}, \frac{p(a+b)^2}{4})$. Mamy zatem interesującą obserwację:

prosta styczna do paraboli, równoległa do prostej AB, jest wystawiona w punkcie, który jest średnią arytmetyczną pierwszych współrzędnych punktów A i B.

Jak łatwo zauważyć, prosta AB ma równanie $p(a+b)x - y - pab = 0$, więc jej odległość od punktu C, czyli wysokość trójkąta ABC wystawiona z punktu C do podstawy AB jest równa

$$h = \frac{\left|\frac{p(a+b)^2}{2} - \frac{p(a+b)^2}{4} - pab\right|}{\sqrt{p^2(a+b)^2 + 1}} = \frac{p(a-b)^2}{4\sqrt{p^2(a+b)^2+1}}.$$

Policzmy teraz pole trójkąta ABC:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(b-a)^2 + p^2(b^2-a^2)^2} \cdot \frac{p(a-b)^2}{4\sqrt{p^2(a+b)^2+1}} = \frac{p(b-a)^3}{8}.$$

Widać zatem, że pole trójkąta wyznaczonego przez punkty A i B paraboli zależy tylko od wzajemnej odległości ich rzutów na oś OX. W szczególności otrzymujemy więc, że pola analogicznych trójkątów zbudowanych na cięciwach AC i BC są równe $\frac{1}{8} \cdot \frac{p(b-a)^3}{8}$. Aby policzyć pole wycinka paraboli sumujemy kolejno pola trójkąta ABC, dwóch trójkątów zbudowanych na bokach AC i BC, czterech trójkątów zbudowanych na ramionach dwóch poprzednich trójkątów i tak dalej. Otrzymamy

$$\frac{p(b-a)^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{p(b-a)^3}{8} = \frac{4}{3} \cdot P.$$

To sumowanie pól kolejnych trójkątów nazywamy metodą wyczerpywania. Jej odkrycie Archimedes przypisuje Eudoksosowi z Knidos[8], o którym wyraża się z najwyższym uznaniem. Niestety do naszych czasów nie zachowało się żadne dzieło tego uczonego. Jego metoda jest swego rodzaju pra-całkowaniem.

Żart Archimedesa.

Wstęp do traktatu *O spiralach* ma formę listu skierowanego do Dositeusa. Archimedes wspomina w nim twierdzenia, jakie sformułował w jednym z poprzednich listów. W istocie były to wyzwania rzucone matematykom aleksandryjskim, by udowodnili fakty, które on, Archimedes, udowodnić potrafi. Zapewne ci uczeni chełpili się, że również znają dowody, ale żadnego z nich nikt mu nie przysłał. Dlatego Archimedes zdradza, że dwa z przesłanych twierdzeń były fałszywe, co zapewne wprawiło jego oponentów w zakłopotanie poddające w wątpliwość ich matematyczne umiejętności. Oto jedno z zadań.

Załóżmy, że płaszczyzna dzieli kulę na dwie części, tak że części sfery ograniczające odpowiednie części kuli mają pola odpowiednio a i b. Udowodnić, że stosunek objętości tych części jest równy $\frac{a^2}{b^2}$.

Jakimi umiejętnościami dysponował Archimedes, że potrafił pokazać fałszywość tego twierdzenia? Dzisiaj dysponujemy rozbudowanymi technikami pozwalającymi na obliczenie stosownych wielkości. Jednak trudno obejść się bez rachunku całkowego. Załóżmy, że promień kuli ma długość R, natomiast promień koła przekroju – r, $r \leqslant R$. Najpierw policzmy pole a górnej części sfery. Górna półsfera zadana jest równaniem $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Stąd $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ i wobec tego na mocy wzorów znanych z rachunku całkowego szukane pole S jest równe

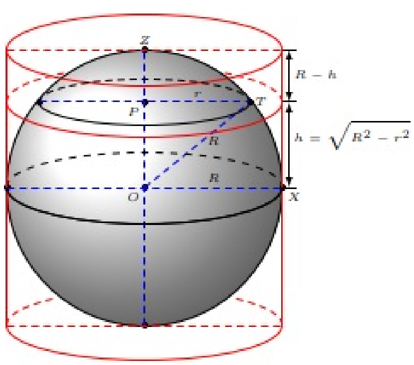
$$S = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant r} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\, dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant r} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

Przejście na zmienne biegunowe:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

prowadzi do całki

$$\begin{aligned} a &= R \iint\limits_{\substack{0 \leqslant \rho \leqslant r \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi}} \frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho d\varphi = R \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^r \frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho \right) d\varphi = \\ &= 2\pi R \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=r} = 2\pi R \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right). \end{aligned}$$



Zauważmy, że $\sqrt{R^2 - r^2}$ jest odległością płaszczyzny przekroju od płaszczyzny XY, zatem otrzymany wzór mówi, że pole powierzchni czaszy jest równe polu powierzchni bocznej walca z podstawą o promieniu R i wysokością równą wysokości czaszy. Z tego już łatwo wywnioskować, że jeśli dwie płaszczyzny równoległe przecinają kulę o promieniu R, to część sfery znajdującej się między płaszczyznami ma pole równe polu powierzchni bocznej walca o promieniu R i wysokości równej odległości płaszczyzn. To jest właśnie obserwacja Archimedesa, z której był bardzo dumny, ale rzecz jasna w swoim dowodzie nie korzystał z rachunku całkowego, bo ten został wynalezio-

[8]Eudoksos z Knidos żył w latach 408-355 p.n.e.

ny dopiero w XVII w. prawie dwa tysiące lat po śmierci Archimedesa, niezależnie przez I. Newtona i W. Leibniza.

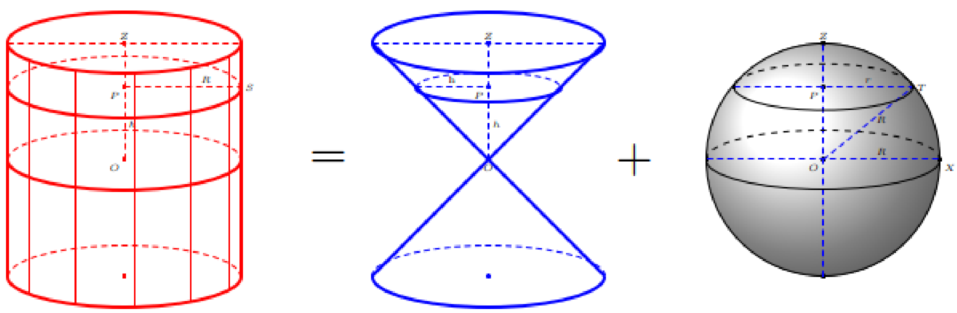
Druga część sfery ma pole równe

$$b = 4\pi R^2 - 2\pi R\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right) = 2\pi R\left(R + \sqrt{R^2 - r^2}\right).$$

Jeśli przyjmiemy oznaczenie $s = \frac{r}{R}$, to dostaniemy

$$\frac{a}{b} = \frac{R - \sqrt{R^2 - r^2}}{R + \sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - s^2}}{1 + \sqrt{1 - s^2}}.$$

Do wyznaczenia objętości tych części na które kula została podzielona wykorzystamy obserwację poczynioną przez Archimedesa.



Dla części górnej jest równa całce z funkcji $z = f(x, y)$ po kole $x^2 + y^2 \leqslant r$, pomniejszonej o objętość walca o podstawie w tym kole i wysokości $h = \sqrt{R^2 - r^2}$. Mamy zatem

$$A = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy - \pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$$

i po zamianie zmiennych na biegunowe, jak w poprzednim przypadku dostajemy

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^r \rho\sqrt{R^2 - \rho^2}d\rho\right)d\varphi - \pi r^2\sqrt{R^2 - r^2} = \\ &= \left[\tfrac{1}{3}(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_r^0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi - \pi r^2\sqrt{R^2 - r^2} = \\ &= \tfrac{2}{3}\pi\left(R^3 - (R^2 - r^2)\sqrt{R^2 - r^2}\right) - \pi r^2\sqrt{R^2 - r^2} = \\ &= \tfrac{2}{3}\pi R^2\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right) - \tfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}. \end{aligned}$$

Druga część kuli ma objętość

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{4}{3}\pi R^3 - \left(\tfrac{2}{3}\pi R^2\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right) - \tfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}\right) = \\ &= \tfrac{2}{3}\pi R^2\left(R + \sqrt{R^2 - r^2}\right) + \tfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}, \end{aligned}$$

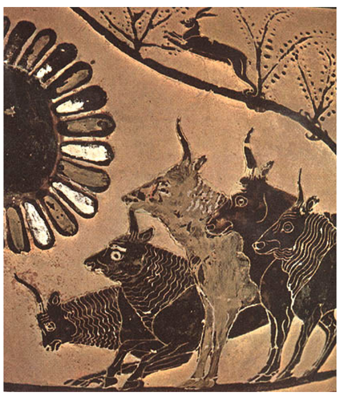
a zatem stosunek tych objętości jest równy

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{\frac{2}{3}\pi R^2\left(R-\sqrt{R^2-r^2}\right)-\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}}{\frac{2}{3}\pi R^2\left(R+\sqrt{R^2-r^2}\right)+\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}} = \\ &= \frac{2\left(1-\sqrt{1-s^2}\right)-s\sqrt{1-s^2}}{2\left(1+\sqrt{1-s^2}\right)+s\sqrt{1-s^2}} = \\ &= \frac{2-(2+s)\sqrt{1-s^2}}{2+(2+s)\sqrt{1-s^2}}.\end{aligned}$$

Teraz już nietrudno policzyć, że równość $\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2}$ zachodzi tylko w dwóch przypadkach, a mianowicie, dla $s = 1$ oraz $s = \sqrt{3} - 1$.

Stada bydła Boga Słońca pasące się na równinach Sycylii.

W dwunastej pieśni swojego poematu, Homer opisuje przygody Odyseusza, jakie spotkały go m. in. na wyspie Trinakii[9], po przepłynięciu w pobliżu Skylli i Charybdy. Oto jak wyglądała zapowiedź losów, wypowiedziana przez boginię Kirkę:



Bydło Heliosa
(Malowidło na greckiej wazie pochodzącej z VI p.n.e. znajdującej się obecnie w Luwrze)[10]

(...)
Dalej ostrów Trinakii trafisz: tam na łące
Do boga słonecznego stada należące
Pasą się; jest stad siedem owczych, siedm wołowych,
A w każdym po pięćdziesiąt; nigdy liczba owych
Nie zwiększa się, nie zmniejsza. Dwie nimfy je pasą:
Lampetia z Faetusą, obie cudne krasą.
Helios je miał z Neajrą. O swe córki dbała
Matka, gdy już podrosły, daleko wysłała
Aż na ostrów Trinakii, by trzody ojcowskie
I woły ciężkorogie pasły dziewy boskie.
Jeśli, na powrót pomny, oszczędzisz te trzody,
To wrócisz, chociaż nędzarz, do swojej zagrody.
Lecz jeśli je naruszysz, twój okręt z drużyną
Zginąć musi - ty ujdziesz, ale cię nie miną
Nieszczęścia, i choć wrócisz do dom i rodziny,
To późno, biedny bardzo, sam jeden, jedyny.[11]
(...)

Ten fragment Odysei najpewniej zainspirował Archimedesa do sformułowania zadania dotyczącego liczebności stad bydła Heliosa. Nie uwierzył Homerowi i podał swoje własne szacunki w postaci wiersza o 22 wersach, który wysłał do Aleksandrii, do głównego bibliotekarza Aleksandryjskiej Biblioteki, Eratostenesa z Cyreny. Oto moja, uproszczona wersja tego listu:

Bądź pozdrowiony, Mój Przyjacielu.
Niech Helios rozświetla Ci umysł.
Pozwolisz, bym się z Tobą podzielił,
Zadaniem na miarę twej dumy.

[9] W greckiej tradycji przyjmuje się, że była to obecna Sycylia.

[10] Obraz pobrany ze strony: `https://www.math.nyu.edu/ crorres/Archimedes/Cattle/CattleBig.jpg`. Zdjęcie całej wazy, na której znajduje się malowidło można zobaczyć na stronach Muzeum w Luwrze, pod adresem `https://collections.louvre.fr/en/ark:/53355/cl010268297`.

[11] tłum. Lucjan Siemieński, patrz [3].

Ufam, że praca Ci jeszcze nie zbrzydła,
A umysł wciąż lubi wyzwania.
Zlicz ile boski Helios miał bydła,
A zyskasz u niego uznanie.

Bydło się pasło – jak Homer pisał,
Na żyznych równinach Sycylii,
Przez którą wiodła podróż Odysa,
Gdy umknął Charybdzie i Skylli.

Cztery miał stada nasz cesarz światła:
Łaciate, żółte, czarne i białe.
Aby odpowiedź nieco ułatwić,
W równaniach te liczby schowałem:

Białe byki $= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ *czarnych byków* + *żółte byki,*
Czarne byki $= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ *łaciatych byków* + *żółte byki,*
Łaciate byki $= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$ *białych byków* + *żółte byki,*
Białe krowy $= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$ *czarne stado,*
Czarne krowy $= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ *łaciate stado,*
Łaciate krowy $= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$ *żółte stado,*
Żółte krowy $= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$ *białe stado.*

Gdy użyjemy stosownych oznaczeń dla liczby poszczególnych części stada otrzymujemy następujący układ siedmiu równań liniowych.

$$\left\{\begin{array}{lcllcl}
B & = & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot C & + & Y & \\
C & = & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot X & + & Y & \\
X & = & \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\cdot B & + & Y & \\
b & = & \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot (C & + & c) & \\
c & = & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot (X & + & x) & \\
x & = & \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\cdot (Y & + & y) & \\
y & = & \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\cdot (B & + & b) &
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrcl}
-6B & & +5C & & & & +6Y & & = & 0\\
 & & -20C & & +9X & & +20Y & & = & 0\\
13B & & & & -42X & & +42Y & & = & 0\\
 & -12b & +7C & +7c & & & & & = & 0\\
 & & & -20c & +9X & +9x & & & = & 0\\
 & & & & & -30x & +11Y & +11y & = & 0\\
13B & +13b & & & & & & -42y & = & 0
\end{array}\right.$$

Mamy zatem do czynienia z układem równań liniowych, który można rozwiązać standardowymi metodami, dysponując kartką, ołówkiem i odrobiną uporu. Rozwiązanie w liczbach wymiernych daje następujące wyniki

$$\begin{array}{llllllllllll} B &=& \frac{828\,946}{604\,357}\cdot y, & C &=& \frac{3\,455\,494}{1\,813\,071}\cdot y, & X &=& \frac{7\,358\,060}{5\,439\,213}\cdot y, & Y &=& \frac{461\,043}{604\,357}\cdot y,\\ b &=& \frac{543\,694}{604\,357}\cdot y, & c &=& \frac{2\,402\,120}{1\,813\,071}\cdot y, & x &=& \frac{1\,171\,940}{1\,813\,071}\cdot y. \end{array}$$

Ale zadanie ma być rozwiązane w liczbach całkowitych nieujemnych. Najmniejsze z nich otrzymamy, gdy y jest najmniejszą wspólną wielokrotnością mianowników otrzymanych ułamków. Otrzymamy wówczas

$$\begin{array}{llllllllllll} B &=& 7\,460\,514, & C &=& 10\,366\,482, & X &=& 7\,358\,060, & Y &=& 4\,149\,387,\\ b &=& 4\,893\,246, & c &=& 7\,206\,360, & x &=& 3\,515\,820, & y &=& 5\,439\,213. \end{array} \tag{1}$$

Daje to łącznie 50 389 082 sztuk bydła. Inne rozwiązania są całkowitymi wielokrotnościami uzyskanych. Zauważmy, że pierwsze cztery liczby są wielokrotnościami liczby 4 657, która pojawia się przy rozwiązaniu zadania z dodatkowymi ograniczeniami, bo Archimedes na tym nie kończy zadania. Dotychczasową część uznaje tylko za test, którego rozwiązanie nie upoważnia do tego, by chełpić się swoimi umiejętnościami.

Zanim urosną Ci z pychy skrzydła,
Zanurz się jeszcze w dalszych rachunkach,
I oblicz znowu liczebność bydła,
Przy dwóch dodatkowych warunkach:

Białe byki + czarne byki = kwadrat liczby naturalnej,
Łaciate byki + żółte byki = liczba trójkątna.

Przypomnijmy, że n-ta liczba trójkątna t_n jest zdefiniowana wzorem

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zadanie sprowadza się zatem, do znalezienia liczby naturalnej k, dla której istnieją takie liczby naturalne u i v, że

$$\begin{array}{lllll} Bk &+& Ck &=& u^2\\ Xk &+& Yk &=& \frac{v(v-1)}{2} \end{array} \tag{2}$$

Jeśli uwzględnimy wartości minimalnego rozwiązania wskazane w (1), po lewej stronie pierwszego równania otrzymamy (2)

$$(B + C)k = (7\,460\,514 + 10\,366\,482)k = 17\,826\,996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot k.$$

Liczba ta jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,657 \cdot l^2$, dla pewnej liczby naturalnej l. Podobnie, lewa strona drugiego równania ma postać

$$(X + Y)k = (7\,358\,060 + 4\,149\,387) \cdot k = 11\,507\,447 \cdot k = 7 \cdot 353 \cdot 4\,657 \cdot k$$

i zgodnie z życzeniem Heliosa ma być liczbą trójkątną. Nietrudno dowieść, że liczba t jest trójkątna wtedy i tylko wtedy, gdy $8t + 1$ jest kwadratem, czyli $8t + 1 = s^2$ dla pewnej liczby całkowitej s. Oznacza to zatem, że

$$8 \cdot 7 \cdot 353 \cdot 4\,657 \cdot k + 1 = m^2.$$

Po wstawieniu w miejsce k wyrażenia wyliczonego z pierwszego równania otrzymujemy

$$(8 \cdot 7 \cdot 353 \cdot 4\,657) \cdot (3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,657 \cdot) l^2 + 1 = m^2$$

lub inaczej $m^2 - 2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4\,657^2 \cdot l^2 = 1$.
Otrzymujemy stąd, że para (m, l) jest rozwiązaniem równania postaci

$$m^2 - An^2 = 1$$

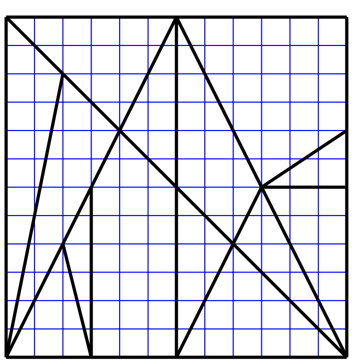
dla $A = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (2 \cdot 4\,657)^2 = 410\,286\,423\,278\,424$.

Równanie tego typu nazywamy równaniem Pella. Jego historia jest równie ciekawa, co długa i wykracza poza zakres tego opracowania. Zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a ma ono nieskończenie wiele rozwiązań, ale wystarcza jedno, by pozostałe zeń otrzymać. To rozwiązanie bazowe można otrzymać rozwijając w ułamek łańcuchowy liczbę $\sqrt{A}$. Taki ułamek jest okresowy i wystarczy wyznaczyć ów okres. W 1867 roku niemiecki matematyk C. F. Meyer podjął próbę jego wyznaczenia, ale po 240 krokach zrezygnował. Jak pisze Lenstra w [4], nie wykazał się wystarczającą cierpliwością. Okazuje się, że wymagało to „ledwie” 203 254 kroków. Ogólne rozwiązanie drugiej części zadania jako pierwszy podał A. Amthor w 1880 r. Najmniejsze rozwiązanie zostało oszacowane jedynie co do liczby cyfr zapisu dziesiętnego. Jest ono wielkości $7.76 \times 10^{206\,544}$.
Archimedes kończy swój list mówiąc: jeśli udało się ci rozwiązać część drugą, to

Teraz, Cię, druhu, już nie zje pycha.
Tego dokonać nieliczni mogą.
Bo ona tylko na słabych czyha,
A nie poświęconych bogom.

Stomachion.

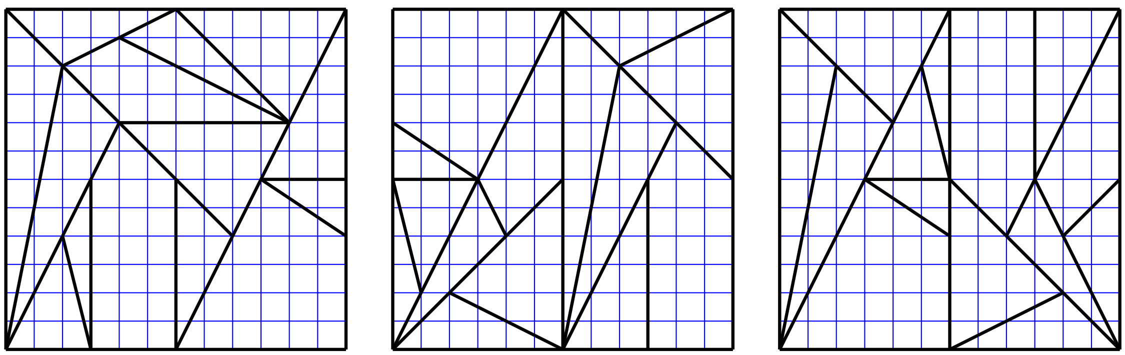
Ostatnia z zachowanych kart Palimpsestu Archimedesa, mocno zniszczona i trudna do odczytania, zawiera początek traktatu o geometrycznej łamigłówce wymyślonej w starożytności. Nie ma podstaw, by jej autorstwo przypisać Archimedesowi, ale wiele wskazuje na to, że poświęcił on jej sporo uwagi i przemyśleń.



W Starożytności nazwano ją słowem „*stomachion*”, co w jednej z przyjętych interpretacji oznacza „ból żołądka”, to zaś miałoby podkreślać, jak jest trudna – próby jej rozwikłania zmuszają do tak dużego wysiłku myślowego, że wywołują fizyczne dolegliwości. Łamigłówka jest kwadratem wykonanym ze sztywnego materiału, podzielonym na 14 części, z których jedna ma kształt pięciokąta, dwie są czworokątami, a 11 pozostałych – to trójkąty. Jeśli przyjmiemy, że bok kwadratu ma długość 24, to wszystkie figury mają pola będące liczbami całkowitymi. W swoim traktacie Archimedes rozważa następujące kombinatoryczne zadanie:

Na ile różnych sposobów, z części na które kwadrat podzielono, można ponownie ułożyć kwadrat przystający do wyjściowego?

Zadanie można zaliczyć do geometrii obliczeniowej. Nie jest łatwe i nie wiadomo, czy Archimedes znał jego rozwiązanie. Ani zachowane szczątki traktatu, ani inne wzmianki o stomachionie nie dają wystarczającej wiedzy, by to rozstrzygnąć. Pierwsze kompletne rozwiązanie podał B. Cutler [9]. Zgodnie z nim istnieje 536 istotnie różnych sposobów, jeśli zaś uwzględnimy również takie, które można uzyskać z danego układu przy pomocy izometrii całego kwadratu lub jego części, to otrzymamy ich aż 17 152. Poniżej kilka przykładów takich ułożeń.



Literatura

1. T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, Cambridge University Press, London 1897.
2. T. L. Heath, *The Method of Archimedes. A Supplement to „The Works of Archimedes"*, Cambridge University Press, London 1912.
3. Homer, *Odyseja*, `https://wolnelektury.pl/media/book/pdf/homer-odyseja.pdf`.
4. H. W. Lenstra Jr., *Solving the Pells Equation*, Notices of AMS, 49 no. 2 (2002), 182-192.
5. MacTutor History of Mathematics archive, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk`.
6. MacTutor Histoy of Mathematics archive, *Biography of Johann Bernoulli*, `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann/`.
7. R. Netz, W. Noel, *Kodeks Archimedesa. Tajemnice Najsłynniejszego Palimpsestu Świata*, Wydawnictwo Magnum, Warszawa 2007.
8. Ch. S. Slichter, *The recently discovered manuscript of Archimedes*, Bull. Amer. Math. Soc. 14 no. 8 (1908), 382–393.
9. `http://pi.math.cornell.edu/~mec/GeometricDissections/1.2%20Archimedes%20Stomachion.html`.