

INTERDYSCYPLINARNE MODELOWANIE PROCESÓW NIEUSTALONYCH W LOKALNYM UKŁADZIE ELEKTROENERGETYCZNYM ZAWIERAJĄCYM LINIE ZASILANIA O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Streszczenie

W pracy, wychodząc z podejść wariacyjnych, proponuje się model matematyczny lokalnego układu energetycznego, który składa się z dwu minisystemów elektroenergetycznych połączonych między sobą przez długą linię zasilania o parametrach rozłożonych. Podukłady energetyczne składają się z linii zasilania o parametrach skupionych, transformatorów mocy oraz obciążenia o charakterze rezystancyjno-indukcyjno-pojemnościowym. Wyjściowe równania przedstawione są w normalnej postaci Cauchy'ego. Wyniki symulacji komputerowej podano w postaci rysunków, które są zinterpretowane i opisane w pracy.

WSTĘP

Rozwój ekonomiki większości krajów praktycznie nie jest możliwy bez wykorzystania teorii modelowania matematycznego. Analiza układów dynamicznych wymaga wykonania dość kosztownych eksperymentów, które w przypadkach układów wielkiej mocy, mogą być niebezpieczne. Elektroenergetyka tutaj nie jest wyjątkiem. Mając na uwadze wymienione względy możemy na pewno twierdzić nie tylko o celowości wykorzystania zasad modelowania matematycznego w energetyce, ale również w praktycznych zastosowaniach.

Model matematyczny układu dynamicznego w przypadku ogólnym przedstawia sobą wirtualny prototyp, który zbudowany jest na podstawie podstawowych praw fizyki stosowanej z wykorzystaniem różnego rodzaju równań matematycznych. Najczęściej wykorzystywanymi są równania różniczkowe, co jest powiązane z doskonałym aparatem całkowania wymienionych równań za pomocą metod numerycznych. Aby opisać rzeczywistą postać obiektu należy opisać i obliczyć procesy fizyczne zachodzące w tym obiekcie. W takim przypadku adekwatność zbudowanego modelu zależy od prawidłowości i pełni opisu procesów w rozpatrywanym modelu.

Istnieje kilka podejść do budowania modeli układów dynamicznych, w tym i układów elektroenergetycznych [5]. W niniejszej pracy skoncentrowano uwagę na dwu metodach budowania modelu: w klasycznym podejściu i w metodzie wariacyjnej. W klasycznej metodzie wykorzystuje się zasadę zachowania energii, natomiast w metodzie wariacyjnej korzystamy z integralnych zasad wariacyjnych, najczęściej stosując zasadę Hamiltona-Ostrogradskiego [1, 5]. Każde z wymienionych podejść ma swoje wady i zalety. Główną wadą w metodzie klasycznej jest dekompozycja jednolitego układu dynamicznego na odrębne podukłady. Następnie każdy z tych podukładów opisuje się równaniami stanu, które z kolei łączy się między sobą za pomocą tak zwanych równań stacjonarnych powiązań. Ponadto w niektórych przypadkach nie zawsze wymienione równania można wyodrębnić, w szczególności w układach o parametrach rozłożonych [5].

Wymienionej wady pozbawiona jest metoda wariacyjna, gdzie wyjściowe równania stanu układu uzyskuje się automatycznie, bez znalezienia jakichkolwiek dodatkowych równań powiązań. Dlatego buduje się tak zwany funkcjonal działania, który zawiera funkcję Lagrange'a. Natomiast wymienione podejścia mają swoje wady, z których główną jest to, że klasyczną funkcję Lagrange'a, rozpatruje się, jako różnicę między energiami kinetyczną i potencjalną, nie uwzględniając rozproszenia energii oraz energii sił niepotencjalnych [1].

W pracy [5] zaproponowano dołączenie do niekonserwatywnego lagrangianu dwóch składników w sposób następujący: do energii kinetycznej włącza się tak zwany składnik koenergii niekonserwatywnej, która uwzględni siły dyssypacyjne, a do energii potencjalnej włącza się niekonserwatywną energię potencjalną, która uwzględni wpływ zewnętrznych sił niepotencjalnych. Wprowadzenie powyższych składników zdaniem autorów pozwala na zastosowanie zasady Hamiltona-Ostrogradskiego [5], co w efekcie, wykorzystując zaproponowaną teorię, rozszerza strefę zastosowania podejść wariacyjnych dla budowania modeli matematycznych układów dynamicznych. Dla układów o parametrach rozłożonych zaproponowana przez [5] idea nie zawsze jest możliwa do zastosowania, co ogranicza jej wykorzystanie.

Wymienioną wadę wyeliminowano, co zostało przedstawione w pracy [1], w której wykorzystano inne podejście, które usuwa ograniczenia zawarte w pracy [5]. Do niekonserwatywnego lagrangianu bezpośrednio dołącza się dwie zależności funkcjonalne: pierwsza – energia dyssypacji w układzie, a druga – energia sił o charakterze niepotencjalnym. Należy tutaj zaznaczyć, że wymienione podejście zaproponowano nie jako aksjomat, a udowodniono je matematycznie [1]. W tym kontekście możemy wnioskować o całkowitej możliwości zastosowania zmodyfikowanej zasady Hamiltona-Ostrogradskiego do modelowania praktycznie wszystkich układów dynamicznych. Jedynie ograniczenia polegają na tym, że rozpatrywany system powinien być holonomicznym [5].

Analiza nieustalonych procesów elektromagnetycznych w liniach zasilania to temat dość popularny w artykułach. Przykładowo w pracy [4] dokonano analizy porównawczej procesów elektromagnetycznych na poprawnych i niepoprawnych modelach systemu energetycznego.

W pracy niniejszej, dla zaprojektowanego układu elektroenergetycznego, zostanie wykorzystana opracowana przez nas [1] wymieniona powyżej metoda.

1. MODEL MATEMATYCZNY UKŁADU

Aby prawidłowo i na wysokim poziomie adekwatności zbudować model matematyczny elektroenergetycznego układu przedstawionego na rys. 1 należy podczas budowania energetycznych funkcji niekonserwatywnego lagrangianu prawidłowo wykorzystać podstawowe prawa fizyki stosowanej i podstaw elektrodynamiki.

Głównym elementem zmodyfikowanej zasady Hamiltona-Ostrogradskiego jest budowa składników niekonserwatywnego lagrangianu, którego postać analityczna określona jest zależnością [1]:

$$L^* = \tilde{T}^* - P^* + \Phi^* - D^* \quad (1)$$

gdzie: L^* – zmodyfikowana funkcja Lagrange'a, \tilde{T}^* – koenergia kinetyczna, P^* – energia potencjalna, Φ^* – energia sił dyssypacyjnych (rozproszenia), D^* – energia sił niepotencjalnych, zewnętrznych.

Proces budowy modelu matematycznego układu elektroenergetycznego komplikuje to, że w skład funkcji Lagrange'a wchodzi nie tylko funkcje energetyczne, a także i ich gęstości liniowe. Uwzględniając ten fakt zapiszemy:

$$T^* = \int_0^{i_{L1}} \Psi_{L1} di_{L1} + \int_0^{i_{L2}} \Psi_{L2} di_{L2} + \int_0^{i_{P1}} \Psi_{P1} di_{P1} + \int_0^{i_{P2}} \Psi_{P2} di_{P2} + \frac{L_L i_{EL}^2}{2} + \frac{L_{LO} i_{LO}^2}{2} + \frac{L_P i_{EP}^2}{2} + \frac{L_{PO} i_{PO}^2}{2}; \quad (2)$$

$$P^* = \frac{Q_{LO}^2}{2C_{LO}} + \frac{Q_{PO}^2}{2C_{PO}}; \quad (3)$$

$$\Phi^* = \frac{1}{2} \int_0^t (r_{L1} i_{L1}^2 + r_{L2} i_{L2}^2) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t (r_{P1} i_{P1}^2 + r_{P2} i_{P2}^2) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t (R_L i_{EL}^2 + R_{LO} i_{LO}^2 + R_P i_{EP}^2 + R_{PO} i_{PO}^2) d\tau; \quad (4)$$

$$D^* = \frac{1}{2} \int_0^t (u_L i_{L2} - V_L i_{L1} + e_L i_{EL}) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t (u_P i_{P1} - V_P i_{P2} + e_P i_{EP}) d\tau; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} \equiv T_l = \frac{L_0 i^2}{2}, \quad \frac{\partial P^*}{\partial x} \equiv P_l = \frac{1}{2C_0} Q_x^2, \quad (6)$$

$$Q_x \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad Q_t \equiv \frac{\partial Q}{\partial t} = i;$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \equiv \Phi_l = \Phi_{lZ} - \Phi_{lW} = \int_0^t \left(\frac{R_0}{2} Q_x^2 - \frac{g_0}{2C_0^2} Q_x^2 \right) d\tau, \quad (7)$$

gdzie: L – stosuje się do lewej strony zasilania linii, P – prawej, Ψ – strumienie skojarzone, $i(t)$ – prądy, $i(x,t)$ – prąd w linii zasilania, R_0, g_0, C_0, L_0 – rozproszone parametry linii, Φ_{lZ} – zewnętrzna dyssypacja energii (gęstość liniowa), Φ_{lW} – wewnętrzna dyssypacja energii, $Q(x,t)$ – ładunek linii, O – indeks, który stosuje się w gałęziach obciążenia, E – gałęzi dodatkowych źródeł energii.

W wyrażeniach (4) i (5) prądy lewej i prawej strony $i_{LO} = i_{CO} = i_K$ – rozpatrują się, jako oczkowe [1]. Chcemy zwrócić uwagę na fakt, że w równaniu (7) figuruje znak „minus”. Przyczyną

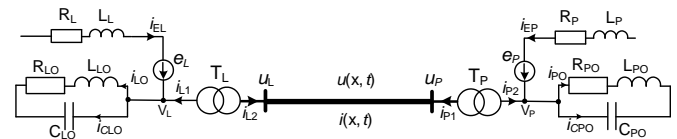
tego jest to, że energię elektromagnetyczną przez linię zasilania doprowadza się od źródła energii do konsumenta wyłącznie za pośrednictwem pola elektromagnetycznego. Przewody linii tylko wykorzystuje się, jako wskaźniki kierunku pola. Wtedy podczas przekształcenia energii, linia uzyska energię z zewnątrz, przez prądy upływu [3].

Równanie (8) przedstawia zasadę Hamiltona-Ostrogradskiego dla układu elektroenergetycznego z uwzględnieniem podanych powyżej założeń (patrz dodatkowo rys.1 i rys. 2).

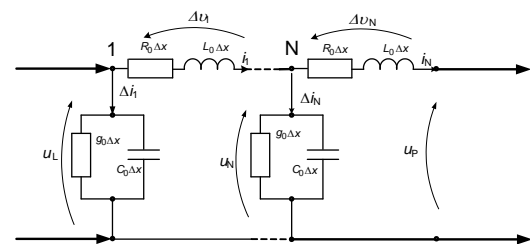
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L^* dt + \int_l \int_l L_l dl dt, \quad I = \int_l L_l dl, \quad (8)$$

gdzie: S – funkcjonal działania wg Hamiltona-Ostrogradskiego, L_l – liniowa gęstość zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a, I – funkcjonal energetyczny.

Rys. 1 przedstawia schemat analizowanego układu.



Rys. 1. Zasadniczy schemat energosystemu



Rys. 2. Obliczeniowy schemat dla linii zasilania

Rozpatrując drugi składnik w równaniu (8) i korzystając z obliczonych wyrażen (6) – (8) wyznaczamy funkcjonal energetyczny I :

$$I = \int_l \left\{ \frac{L_0}{2} Q_x^2 - \frac{1}{2C_0} Q_x^2 + \int_0^t \left(\frac{R_0}{2} Q_x^2 - \frac{g_0}{2C_0^2} Q_x^2 \right) d\tau \right\} dl. \quad (9)$$

Przyrównując wariację funkcjonału I do zera z uwzględnieniem teorematu Gaussa-Ostrogradskiego i wykorzystując prawo całkowania przez części oraz słynny teoremat o pochodnej od całki za jej górnym brzegiem [6, 8], otrzymamy:

$$\delta I = \int_l \left\{ \frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{g_0}{C_0^2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} d\tau - L_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - R_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial Q}{\partial t} d\tau \right\} \delta Q dl + \Omega = 0, \quad \Omega = \Omega_l + \Omega_x, \quad (10)$$

gdzie: $\Omega = \Omega_l + \Omega_x$ – warunki brzegowe dla funkcjonału.

Analizując wyrażenie (10) stwierdzamy, że wariacja energetycznego funkcjonału może być równa zero tylko w przypadku, gdy wyrażenie podcałkowe jest równe zero. Ponieważ δQ nigdy nie równa się zero to równanie Eulera-Poissona, uwzględniające równania powiązań [1 – 3, 7] przyjmuje wartość:

$$-\frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + R_0 \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (11)$$

Zależności uogólnionych współrzędnych i ich prędkości określa równanie (12):

$$\int_0^t \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \Big|_{t=\tau} d\tau = \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \int_0^t \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=\tau} d\tau = Q. \quad (12)$$

W końcowym efekcie otrzymamy równanie telegrafistów. W przypadku ogólnym równanie może być zapisane w trzech zależnościach funkcjonalnych: funkcja ładunku, funkcja prądu, funkcja napięcia. Doświadczenia pokazują, że optymalną jest funkcja napięcia [1, 3, 7].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = (C_0 L_0)^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v - g_0 R_0 u \right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v \quad (13)$$

Prowadząc podobne operacje z pierwszym składnikiem w wyrażeniu (8), a także wykorzystując teorię Lagrange'a o zamianie współrzędnych, przekształcimy model matematyczny we współrzędnych strumieni skojarzonych (model Ψ -typu) w model we współrzędnych prądów (model A-typu) [1]. Natomiast równania innych elementów pozostawimy bez zmian bezpośrednio drogą wariacji funkcjonalu działania. W takim przypadku pierwotne uzwojenia transformatorów rozpatrujemy na podstawie rys. 2 (do końców linii):

$$\frac{di_{L1}}{dt} = A_{11L}(V_L - r_{L1}i_{L1}) + A_{12L}(u_L - r_{L2}i_{L2}), \quad u_L \equiv u_1; \quad (14)$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = A_{21L}(V_L - r_{L1}i_{L1}) + A_{22L}(u_L - r_{L2}i_{L2}), \quad u_L \equiv u_1; \quad (15)$$

$$\frac{di_{P1}}{dt} = A_{11P}(u_P - r_{P1}i_{P1}) + A_{12P}(V_P - r_{P2}i_{P2}), \quad i_{P1} \equiv i_N; \quad (16)$$

$$\frac{di_{P2}}{dt} = A_{21P}(u_P - r_{P1}i_{P1}) + A_{22P}(V_P - r_{P2}i_{P2}), \quad i_{P1} \equiv i_N, \quad (17)$$

gdzie: A_{km} – współczynniki, które zależą od odwrotnych indukcyjności transformatorów mocy [1].

$$\frac{du_{CLO}}{dt} = \frac{i_{CLO}}{C_{LO}}, \quad u_{CLO} = V_L; \quad (18)$$

$$\frac{du_{CPO}}{dt} = \frac{i_{CPO}}{C_{PO}}, \quad u_{CPO} = V_P; \quad (19)$$

$$\frac{di_{LO}}{dt} = \frac{1}{L_{LO}}(u_{CLO} - R_{LO}i_{LO}); \quad (20)$$

$$\frac{di_{PO}}{dt} = \frac{1}{L_{PO}}(u_{CPO} - R_{PO}i_{PO}); \quad (21)$$

$$\frac{di_{EL}}{dt} = \frac{1}{L_L}(e_L - R_L i_{EL} - u_{CLO}); \quad (22)$$

$$\frac{di_{EP}}{dt} = \frac{1}{L_P}(e_P - R_P i_{EP} - u_{CPO}); \quad (23)$$

We wzorach wszystkie zależności funkcjonalne (prądy oraz napięcia) są przedstawione na rysunkach 1 i 2.

Prądy przez węzły V wyznaczamy na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa w następujący sposób:

$$i_{EL} + i_{L1} - i_{LO} - i_{CLO} = 0; \quad (24)$$

$$i_{EP} + i_{P1} - i_{PO} - i_{CPO} = 0. \quad (25)$$

Uwzględniając warunki brzegowe w równaniu (13) (wychodząc z drugiego prawa Kirchhoffa dla obwodów elektrycznych o parametrach rozłożonych [3]) otrzymamy:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_0 i(x,t) + L_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}. \quad (26)$$

Rozwiązywanie równania telegrafistów prowadzimy za pomocą metody różnic skończonych [2]. Dlatego dyskretyzujemy pochodne przestrzenne w równaniach (13), (26) i otrzymujemy:

$$\frac{dv_j}{dt} = (C_0 L_0)^{-1} \left(\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{(\Delta x)^2} - (g_0 L_0 + C_0 R_0)v_j - g_0 R_0 u_j \right), \quad \frac{du_j}{dt} = v_j, \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad (27)$$

$$-\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = R_0 i_j + L_0 \frac{di_j}{dt}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (28)$$

gdzie: u_0, u_{N+1} – napięcia fikcyjnych węzłów dyskretyzacji [2, 7]. Poszukiwanie wymienionych napięć jest najbardziej skomplikowanym zadaniem. Wymienione napięcia występują jako niewiadome funkcji dla określenia warunków brzegowych w równaniu (27) [2]. Zapisując równania stacjonarnych powiązań dla lewego ($k = 1$) oraz prawego ($k = N$) końca linii zasilania, (patrz rys. 2) otrzymamy:

$$i_{L2} - i_1 - \Delta i_1 = 0; \quad i_{P1} - i_N = 0, \quad (29)$$

Uwzględniając warunki początkowe [1] otrzymamy:

$$\Delta i_1 = \Delta i_{ig} + \Delta i_{ic} \Rightarrow \frac{d\Delta i_1}{dt} = \frac{d\Delta i_{ig}}{dt} + \frac{d\Delta i_{ic}}{dt}; \quad (30)$$

$$\Delta i_{ig} = \Delta x g_0 u_1, \quad \Delta i_{ic} = \Delta x C_0 \frac{du_1}{dt} = \Delta x C_0 v_1. \quad (31)$$

Różniczkując względem czasu, równania (28) (z uwzględnieniem warunków początkowych [1, 8]), otrzymamy:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_0} \left(\frac{u_0 - u_2}{2\Delta x} - R_0 i_1 \right), \quad \frac{di_N}{dt} = \frac{1}{L_0} \left(\frac{u_{N-1} - u_{N+1}}{2\Delta x} - R_0 i_N \right) \quad (32)$$

Z równań (30), (31) (z uwzględnieniem warunków początkowych [1, 8]), otrzymamy:

$$\frac{d\Delta i_{ig}}{dt} = \Delta x g_0 \frac{du_1}{dt} = \Delta x g_0 v_1, \quad \frac{d\Delta i_{ic}}{dt} = \Delta x C_0 \frac{dv_1}{dt}; \quad (33)$$

$$\frac{di_N}{dt} = \frac{1}{\Delta x L_0} (\Delta u_N - \Delta x R_0 i_N) = \frac{1}{L_0} \left(\frac{u_N - u_P}{\Delta x} - R_0 i_N \right). \quad (34)$$

Po przekształceniu równań (29) – (34) otrzymamy:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_{L2}}{dt} - \Delta x g_0 v_1 - \Delta x C_0 \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{L_0} \left(\frac{u_0 - u_2}{2\Delta x} - R_0 i_1 \right); \quad (35)$$

$$\frac{di_N}{dt} = \frac{di_{P1}}{dt} = \frac{1}{L_0} \left(\frac{u_{N-1} - u_{N+1}}{2\Delta x} - R_0 i_N \right). \quad (36)$$

Zapiszemy równanie (35) po uwzględnieniu wyrażań (15), (27, gdy $j=1$) w postaci:

$$\begin{aligned} & (A_{21L}(V_L - r_{L1}i_{L1}) + A_{22L}(u_1 - r_{L2}i_{L2})) - \\ & - \Delta x g_0 v_1 - \frac{\Delta x}{L_0} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (u_0 - 2u_1 + u_2) - \right. \\ & \left. - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v_1 - g_0 R_0 u_1 \right] = \frac{1}{L_0} \left(\frac{u_0 - u_2}{2\Delta x} - R_0 i_1 \right) \end{aligned} \quad (37)$$

W efekcie otrzymujemy ostatecznie wyrażenie dla znalezienia napięcia w pierwszym fikcyjnym węźle dyskretyzacji:

$$\begin{aligned} u_0 = \frac{2\Delta x L_0}{3} \left\{ (A_{21L}(V_L - r_{L1}i_{L1}) + \right. \\ \left. + A_{22L}(u_1 - r_{L2}i_{L2})) - \Delta x g_0 v_1 - \frac{\Delta x}{L_0} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (-2u_1 + u_2) - \right. \right. \\ \left. \left. - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v_1 - g_0 R_0 u_1 \right] + \frac{1}{L_0} \left(\frac{u_2}{2\Delta x} + R_0 i_1 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Napięcie ostatniego węzła dyskretyzacji znajdujemy na podstawie drugiego wyrażenia w zależności (32) z uwzględnieniem (36), poprzez przyrównanie tych równań:

$$u_{N+1} = u_{N-1} - 2(u_N - u_P). \quad (39)$$

Napięcie u_P – prawej szyny linii zasilania jest niewiadomą. Aby wyznaczyć to napięcie korzystamy z równania (16) i z drugiego wyrażenia w równaniu (32) w wyniku czego otrzymamy:

$$\frac{di_N}{dt} = \frac{u_N - u_P}{\Delta x L_0} - \frac{R_0}{L_0} i_N = A_{11P}(u_P - r_{P1}i_{P1}) + A_{12P}(V_P - r_{P2}i_{P2}) \quad (40)$$

Napięcie u_P określone jest zależnością:

$$u_P = \left(\frac{1}{\Delta x L_0} + A_{11P} \right)^{-1} \left(\frac{u_N}{\Delta x L_0} - \frac{R_0}{L_0} i_N + A_{11P} r_{P1} i_{P1} - A_{12P} (V_P - r_{P2} i_{P2}) \right) \quad (41)$$

Wyznaczając napięcia węzłów V_L, V_P różniczkujemy względem czasu równania (24), (25) (uwzględniając warunki początkowe [1]) otrzymamy:

$$\frac{dV_L}{dt} \equiv \frac{du_{CLO}}{dt} = \frac{i_{EL} + i_{L1} - i_{LO}}{C_{LO}}; \quad (42)$$

$$\frac{dV_P}{dt} = \frac{du_{CPO}}{dt} = \frac{i_{EP} + i_{P2} - i_{PO}}{C_{PO}}. \quad (43)$$

Prądy w linii zasilania znajdujemy drogą dyskretyzacji wyrażenia (26) za pomocą metody prostych z wykorzystaniem prawej pochodnej [1]

$$\frac{di_j}{dt} = \frac{1}{L_0 \Delta x} (u_j - u_{j+1}) - \frac{R_0}{L_0} i_j, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (44)$$

Wspólnemu całkowaniu podlega następujący układ równań różniczkowych: (14) – (23), (27), (35), (40), (42) – (44) uwzględniający wyrażenia: (24), (25), (29), (38), (39), (41).

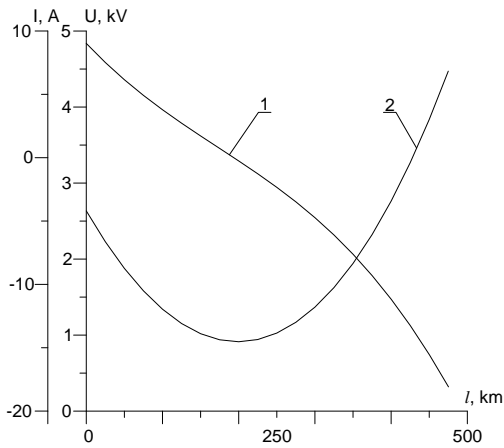
2. WYNIKI SYMULACJI KOMPUTEROWEJ

Jako przykład analizowanego obiektu wykorzystamy następujący układ elektroenergetyczny, którego parametry są następujące:
 – główna linia zasilania: napięcie linii 750 kV, rozproszone parametry linii $R_0 = 1.9 \cdot 10^{-5} \Omega / m$, $L_0 = 9.24 \cdot 10^{-7} H/m$, $C_0 = 1.3166 \cdot 10^{-11} F/m$, $g_0 = 3.25 \cdot 10^{-11} S/m$ oraz długość linii $l = 500$ km,
 – transformatory mocy (lewy i prawy – jednakowe): typ АОДЦТН-267000/750/220, $R_T = 0.79 \Omega$, $L_T = 0.31 H$,
 – dodatkowe linie zasilania: $R_L = R_P = 0.12 \Omega / km$, $L_L = L_P = 1.349 \cdot 10^{-3} H$, $E_L = E_P = 220 kV$,
 – obciążenia: $R_{LO} = R_{PO} = 33.7 \Omega$, $L_{LO} = L_{PO} = 0.044 H$, $C_{LO} = 0,0001017 F$, $C_{PO} = 0,0000548 F$.

Do modelowania niestabilnych procesów elektromagnetycznych rozpatruje się obiekt elektrodynamiczny przedstawiony na rys. 1,2 o parametrach podanych powyżej. W momencie komutacji włączane są źródła energii elektromagnetycznej.

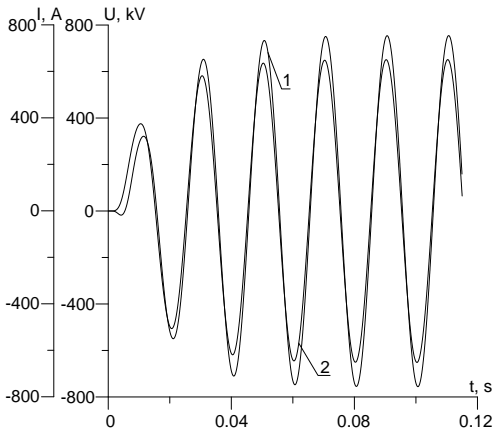
Układ równań różniczkowych jest sztywny. Dlatego została wykorzystana ukryta metoda Eulera razem z metodą prostej iteracji. Krok dyskretyzacji czasowej wynosił – 0,00002 s. Wyniki symulacji komputerowej przedstawione są w postaci rysunków.

Na rys. 3 przedstawiono przestrzeny rozkład funkcji prądu (1) oraz funkcji napięcia (2) w wybranym momencie czasu $t = 0,002$ s. Analizując wymieniony rysunek możemy stwierdzić, że fala elektromagnetyczna w takim krótkim czasie nie zdążyła osiągnąć swojej prędkości znamionowej, a tylko zaczyna swój wzrost. W takim przypadku szczególnie wyraźnie widać procesy fizyczne, zachodzące w linii: na końcach linii napięcie ma maksymalną wartość, a w środku – minimalną i nie zmienia swojego znaku. Natomiast prąd zmienia swój znak. Krzywa prądu nie osiąga ekstremum.



Rys. 3. Przestrzenny rozkład funkcji prądu (1) i napięcia (2) w linii zasilania w momencie czasu $t = 0,002$ s

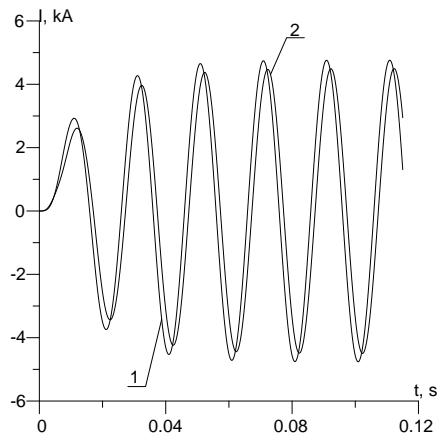
Na rysunku 4 przedstawiono proces przejściowy funkcji napięcia oraz prądu w środkowej części linii w przedziale czasowym $[0; 0,12]$ s. Ze wzrostem czasu, fala elektromagnetyczna przyjmuje wartość ustaloną i układ ze stanu przejściowego przechodzi w stan ustalony. Ten czas wynosi ok. $t = 0,1$ s.



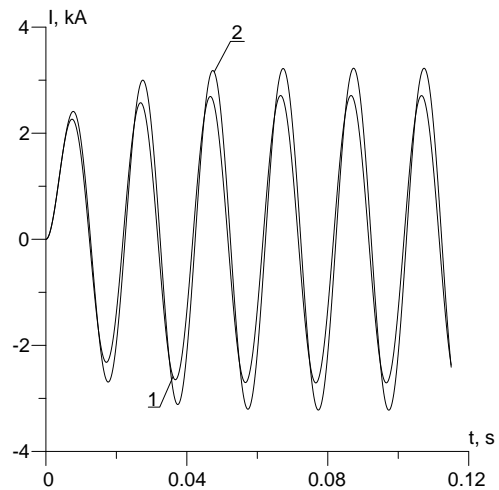
Rys. 4. Przejściowa funkcja prądu (1) i napięcia (2) w środkowej części linii

Rysunki 5 i 6 przedstawiają przebiegi funkcji prądu w gałęzi obciążenia zarówno z lewej strony linii jak i z prawej, a także przebiegi funkcji prądu w krótkiej linii zasilania także zarówno z lewej strony linii jak i z prawej. Nieco inne parametry pojemności prowadzą do zmiany wymienionych zależności funkcjonalnych. Ponieważ praktyczne ilości parametrów lewej i prawej stron są jednakowe, to i wymienione zależności zmieniają się w niewielkim zakresie.

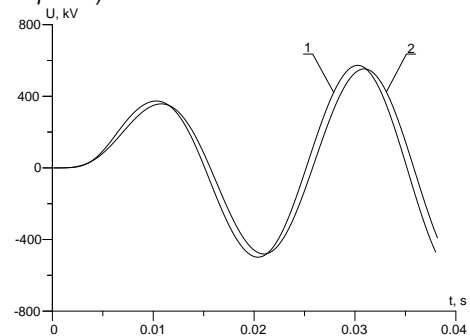
Na rysunku 7 przedstawiono przejściowe funkcje napięcia na początku (1) oraz końcu (2) linii zasilania w przedziale czasowym $[0; 0,04]$ s. Analizując wymieniony rysunek stwierdzamy, że funkcja napięcia na początku linii oraz na jej końcu ma niewielkie przesunięcie fazowe, częstotliwość przy tym, w miarę przechodzenia do stanu ustalonego nie zmienia się. Kąt przesunięcia fazowego powiązany ze skomplikowanymi procesami w linii i w energetyce nazywany jest, jako kąt obciążenia energosystemu δ . Oczywiście jest fakt, że podczas analizy procesów elektromagnetycznych w linii wymieniony kąt należy uwzględnić.



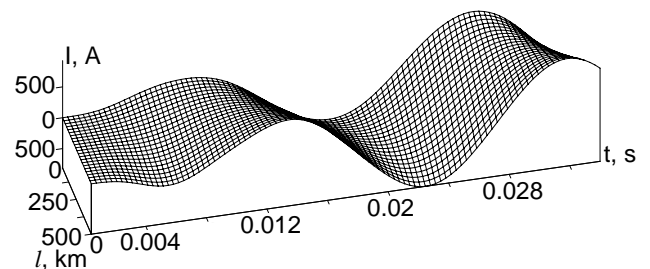
Rys. 5. Przejściowe funkcje prądu w gałęzi obciążenia R-L (1 – lewa strona, 2 – prawa)



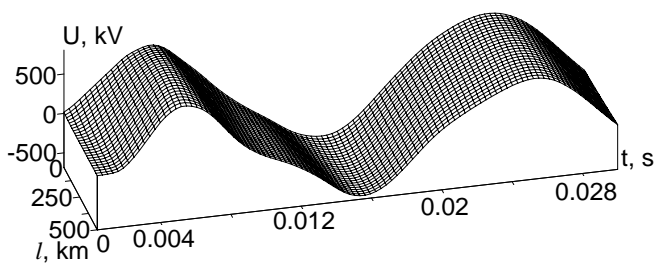
Rys. 6. Przejściowe funkcje prądu w krótkiej linii zasilania (1 – lewa strona, 2 – prawa)



Rys. 7. Przejściowe funkcje napięcia na początku (1) oraz końcu (2) linii zasilania



Rys. 8. Czasowo-przestrzenny rozkład prądu w linii zasilania w przedziale czasowym $t \in [0; 0,034]$ s



Rys. 9. Czasowo-przestrzenny rozkład napięcia w linii zasilania w przedziale czasowym $t \in [0; 0,03]$ s

W konkluzji, na rysunkach 8 i 9 przedstawiono czasowo-przestrzenne rozkłady funkcji prądu (rys. 8) w przedziale czasowym $t \in [0; 0,034]$ s oraz funkcji napięcia (rys. 9) w przedziale czasowym $t \in [0; 0,03]$ s dla długiej linii zasilania. Wymienione rysunki przedstawione są w formacie 3D, co jest najbardziej informacyjnym przedstawieniem wyników analizy procesów falowych w liniach zasilania oraz uzwojeniach transformatorów mocy. Należy także zaznaczyć, że rysunki w formacie 3 D należy analizować razem z rysunkami 3 i 4. Ważnym argumentem na korzyść celowości budowy czasowo-przestrzennych rozkładów funkcji prądów i napięć jest to, że tylko na tych rozkładach możemy zobaczyć proces przesunięcia fali elektromagnetycznej (prędkość ruchu fali) względem czasowej jak i przestrzennej współrzędnej.

WNIOSKI

1. Zastosowanie modyfikowanej zasady Hamiltona-Ostrogradskiego do modelowania skomplikowanych układów dynamicznych o parametrach rozłożonych daje możliwość uniknięcia dekompozycji jednolitego systemu oraz stworzenia równania stanu rozpatrywanego obiektu wyłącznie z ogólnoenerygetycznego podejścia, biorąc za podstawę prawo najmniejszego działania Maupertuisa.
2. Podczas analizy procesów nieustalonych w skomplikowanych układach elektroenergetycznych długie linii zasilania proponujemy rozpatrywać, jako system o parametrach rozłożonych. Daje to możliwość analizowania falowych procesów w liniach zasilania oraz w uzwojeniach transformatorów mocy.
3. Wyniki symulacji komputerowej dla modelu matematycznego układu energetycznego o parametrach rozłożonych dają możliwość budowy rysunków w formacie 3D, co jest bardzo korzystne z punktu widzenia analizy procesów falowych w układzie, przepływu mocy czynnej i biernej, kontroli kąta obciążenia systemu, rozkładu funkcji napięcia i prądu w funkcji czasowej i przestrzennej współrzędnej.

BIBLIOGRAFIA

1. Czaban A.: Zasada Hamiltona-Ostrogradskiego w układach elektromechanicznych. – Lwów: W-wo T. Soroki 2015 – 464 s. (w języku Ukraińskim).
2. Czaban A, Lis M, Sosnowski J., Levoniuk V.: Model dwuprzewodowej linii zasilania z wykorzystaniem modyfikowanej zasady Hamiltona. Maszyny elektryczne. Zeszyty Problemowe, 2016, Nr 109, S. 31 – 36.

3. Simoni K.: Theoretische elektrotechnik. Berlin, 1956.
4. Sowa P., Kumala R., Łuszcz K.: Modeling of Power System Components During Electromagnetic Transients // International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology – 2014. – 716-719.
5. White D.C., Woodson H.H.: Electromagnetic Energy Conversion, New-York, John Wiley & Sons, Inc, 1958.
6. Васидзу К.: Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
7. А. Чабан, В. Левонюк та ін. Математичне моделювання перехідних процесів у лінії Лехера в стані неробочого ходу // Електротехніка і Електромеханіка. – 2016. – № 3. – с. 30-35.
8. Эльсгольц Л.Э.: Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

MATHEMATICAL MODELING OF TRANSIENTS IN POWER SYSTEM CONSISTING OF TWO SUBSYSTEMS CONNECTED AMONG THEMSELVES TRANSMISSION LINE WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Abstract

In this paper based on variation approaches the mathematical model of the local power system that consists of two mini power systems, which are interconnected via a long transmission line with distributed parameters. The energy subsystem consists of power lines with concentrated parameters, power transformers and load equivalent to connection active-inductive-capacitive elements. Initial state equation represented in normal Cauchy form. The results of computer simulations are presented in the form of figures that is analyzed.

Autorzy:

dr hab. inż. **Andriy Czaban**, prof. nadzw. - Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Wydział Transportu i Elektrotechniki; 26-600 Radom; ul. Malczewskiego 29. atczaban@gmail.com

dr inż. **Andrzej Szafraniec** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Wydział Transportu i Elektrotechniki; 26-600 Radom; ul. Malczewskiego 29. Tel: + 48 48 361-77-60, a.szafraniec@uthrad.pl

mgr inż. **Vitaliy Levoniuk** Lwow (Dublany) Lwowski Narodowy Uniwersytet Rolniczy, ul. W. Wielkiego, 1., Bacha1991@ukr.net