ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII MARYNARKI WOJENNEJ
ROK LIV NR 1 (192) 2013

Hubert Wysocki
Akademia Marynarki Wojennej
Wydział Mechaniczno-Elektryczny, Katedra Matematyki i Fizyki
81-103 Gdynia, ul. J. Śmidowicza 69
e-mail: H.Wysocki@amw.gdynia.pl

MODEL RACHUNKU OPERATORÓW DLA RÓŻNICY WSTECZNEJ PRZY PODSTAWACH a, b

STRESZCZENIE

W pracy skonstruowano dyskretny model rachunku operatorów Bittnera, w którym pochodna rozumiana jest jako operacja różnicowa $\nabla_{a,b}u(k) = a(k)u(k) - b(k)u(k-1)$. Stanowi on uogólnienie ∇-modelu z różnicą wsteczną $\nabla u(k) = u(k) - u(k-1)$.

Słowa kluczowe:
rachunek operatorów, pochodna, pierwotne warunki graniczne, różnica wsteczna, element wykładniczy.

PODSTAWY RACHUNKU OPERATORÓW

Rachunkiem operatorów Bittnera [1–3] nazywamy zespół

$$CO(L^0, L^1, S, T_q, s_q, Q), \tag{1}$$

gdzie L^0 i L^1 są przestrzeniami liniowymi (nad tym samym ciałem skalarów Γ[1]) takimi, że $L^1 \subset L^0$. Operacja liniowa $S\colon L^1 \longrightarrow L^0$ (co zapisujemy $S \in \mathscr{L}(L^1, L^0)$), nazywana *pochodną* (abstrakcyjną), jest surjekcją. Ponadto Q jest zbiorem wskaźników q dla operacji $T_q \in \mathscr{L}(L^0, L^1)$ takich, że $ST_q w = w, w \in L^0$, zwanych *pierwotnymi* i dla operacji $s_q \in \mathscr{L}(L^1, L^1)$ takich, że $s_q u = u - T_q S u, u \in L^1$, zwanych *warunkami granicznymi*.

[1] Będziemy zakładali, że L^0 i L^1 są przestrzeniami rzeczywistymi, tzn. $\Gamma := \mathbb{R}$.

Jądro operacji S, tzn. $\operatorname{Ker} S$ nazywamy zbiorem *stałych* dla pochodnej S. Nietrudno sprawdzić, że warunki graniczne $s_q, q \in Q$ są rzutami L^1 na podprzestrzeń $\operatorname{Ker} S$.

Przez indukcję określa się ciąg przestrzeni $L^n, n \in \mathbb{N}$ [2] w taki sposób, że

$$L^n := \{u \in L^{n-1} : Su \in L^{n-1}\}.$$

Wówczas

$$\ldots \subset L^n \subset L^{n-1} \subset \ldots \subset L^1 \subset L^0$$

oraz

$$S^n(L^{m+n}) = L^m,$$

gdzie

$$\mathscr{L}(L^n, L^0) \ni S^n := \underbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n-\text{razy}}, \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

W pracy wykorzystane zostaną następujące twierdzenia pomocnicze [3]:

Lemat 1. *Abstrakcyjne równanie różniczkowe*

$$S^n u = v, \quad v \in L^0, u \in L^n$$

z warunkami granicznymi

$$s_q S^i u = u_{i,q} \in \operatorname{Ker} S, \quad i \in \overline{0, n-1} \ ^1$$

ma jednoznaczne rozwiązanie

$$u = u_{0,q} + T_q u_{1,q} + \cdots + T_q^{n-1} u_{n-1,q} + T_q^n v. \tag{2}$$

Lemat 2. *Przy danej pochodnej* $S \in \mathscr{L}(L^1, L^0)$ *rzut* $s_q \in \mathscr{L}(L^1, \operatorname{Ker} S)$ *wyznacza pierwotną* $T_q \in \mathscr{L}(L^0, L^1)$ *z warunku*

$$u = T_q v \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad Su = v, s_q u = 0.$$

Ponadto rzut s_q *jest warunkiem granicznym przy pierwotnej* T_q.

Każdy rachunek operatorów określony przez zadanie obiektów (1) nazywamy jego *reprezentacją* lub *modelem*.

Przykład 1. Niech $\mathbb{Z}$ będzie zbiorem liczb całkowitych. Jest oczywiste, że zbiór $C(\mathbb{Z})$ nieskończonych ciągów rzeczywistych $\{u(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ze zwykłymi działaniami

[2] $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich.

dodawania ciągów i mnożenia ciągów przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową. W pracy [8] wykazano, że zespół (1), gdzie $u = \{u(k)\} \in L^0 = L^1 := C(\mathbb{Z})$, $q \equiv k_0 \in Q := \mathbb{Z}$ oraz

$$Su \equiv \nabla u := \{u(k) - u(k-1)\}, \tag{3}$$

$$T_{k_0}u := \begin{cases} -\sum\limits_{i=k+1}^{k_0} u(i) & \text{dla} \quad k < k_0 \\ \qquad 0 & \text{dla} \quad k = k_0 \\ \sum\limits_{i=k_0+1}^{k} u(i) & \text{dla} \quad k > k_0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

$$s_{k_0}u := \{u(k_0)\} \tag{5}$$

tworzy *dyskretny* ∇*-model rachunku operatorów Bittnera* z pochodną jako różnicą wsteczną ∇[3].

$\nabla_{a,b}$-MODEL

Uogólnieniem pochodnej (3) jest operacja

$$S_{a,b}\{u(k)\} \equiv \nabla_{a,b}\{u(k)\} := \{a(k)u(k) - b(k)u(k-1)\}^4, \tag{6}$$

gdzie $a = \{a(k)\}, b = \{b(k)\} \in C(\mathbb{Z})$ są ciągami danymi i takimi, że

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{Z}} a(k), b(k) \neq 0. \tag{7}$$

Operację (6) będziemy nazywali *różnicą wsteczną przy podstawach* a, b (por. 4]).

Łatwo sprawdzić, że

$$\nabla_{a_1,b_1} \pm \nabla_{a_2,b_2} = \nabla_{a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2}$$

oraz

$$\frac{1}{2}\left(\nabla_{a_1,b} + \nabla_{a_2,b}\right) = \nabla_{\frac{a_1+a_2}{2},b},$$

$$\frac{1}{2}\left(\nabla_{a,b_1} + \nabla_{a,b_2}\right) = \nabla_{a,\frac{b_1+b_2}{2}},$$

o ile ciągi $a, b, a_1, b_1, a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2$ spełniają warunek (7).

---

[3] Z uwagi na definicję pierwotnych T_{k_0}, zakłada się, że $\sum_{i=k_0+1}^{k_0} u(i) := 0$.

[4] W pracy tej mnożenie ciągów oznacza zwykłe mnożenie po współrzędnych.

Do konstrukcji modelu rachunku operatorów związanego z pochodną (6) wykorzystamy ideę rozwiązywania równania $u(k+1) - b(k)u(k) = v(k)$ opisaną w pracy [6].

Niech $L^0 = L^1 := C(\mathbb{Z})$. Nietrudno sprawdzić, że ciągi $\{c(k)\} \in \operatorname{Ker} S_{a,b}$ mają postać

$$c(k) = \begin{cases} C \displaystyle\prod_{i=k+1}^{0} \frac{a(i)}{b(i)} & \text{dla} \quad k < 0 \\ C & \text{dla} \quad k = 0 \\ C \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{b(i)}{a(i)} & \text{dla} \quad k > 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Niech $\{e(k)\}$ będzie ciągiem $\{c(k)\}$ dla $C = 1$. W związku z tym przyjmijmy również, że $\prod_{i=1}^{0}(\cdot) := 1$.

Rozważmy równanie różnicowe

$$S_{a,b}\{u(k)\} \equiv \nabla_{a,b}\{u(k)\} = \{v(k)\},$$

tzn.

$$a(k)u(k) - b(k)u(k-1) = v(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Mamy stąd

$$\frac{a(k)u(k)}{e(k)} - \frac{b(k)u(k-1)}{e(k)} = \frac{v(k)}{e(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Ponieważ

$$a(k)e(k) - b(k)e(k-1) = 0 \Longleftrightarrow a(k)e(k) = b(k)e(k-1), \quad k \in \mathbb{Z},$$

więc z (10) otrzymujemy

$$\frac{u(k)}{e(k)} - \frac{u(k-1)}{e(k-1)} = \frac{v(k)}{a(k)e(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ostatecznie

$$y(k) - y(k-1) = w(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

gdzie

$$y(k) := \frac{u(k)}{e(k)}, \quad w(k) := \frac{v(k)}{a(k)e(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Równanie (11) możemy przedstawić w postaci

$$S\{y(k)\} \equiv \nabla\{y(k)\} = \{w(k)\}. \tag{13}$$

Z lematu 1. (dla $n = 1$) wynika, że rozwiązaniem równania (13) jest ciąg

$$\{y(k)\} = s_{k_0}\{y(k)\} + T_{k_0}\{w(k)\},$$

gdzie T_{k_0} są pierwotnymi (4), natomiast s_{k_0} warunkami granicznymi (5). Z (12) otrzymujemy $u(k) = e(k)y(k), k \in \mathbb{Z}$. Zatem

$$\{u(k)\} = \{e(k)\}s_{k_0}\{\frac{u(k)}{e(k)}\} + \{e(k)\}T_{k_0}\{\frac{v(k)}{a(k)e(k)}\} \tag{14}$$

jest rozwiązaniem równania (9).

Niech

$$s_{a,b,k_0}\{u(k)\} := \{e(k)\}s_{k_0}\{\frac{u(k)}{e(k)}\}, \quad k_0 \in Q := \mathbb{Z}, \{u(k)\} \in C(\mathbb{Z}). \tag{15}$$

Korzystając z definicji (5) warunków granicznych s_{k_0}, otrzymujemy

$$S_{a,b}s_{a,b,k_0}u(k) = S_{a,b}[e(k)s_{k_0}[\frac{u(k)}{e(k)}]] = S_{a,b}[e(k)]\frac{u(k_0)}{e(k_0)}$$
$$= 0 \cdot \frac{u(k_0)}{e(k_0)} = 0, \quad k_0, k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem $s_{a,b,k_0} \in \mathscr{L}(L^1, \operatorname{Ker} S_{a,b})$. Ponadto

$$s^2_{a,b,k_0}u(k) = s_{a,b,k_0}[e(k)s_{k_0}[\frac{u(k)}{e(k)}]] = e(k)s_{k_0}\Big[\frac{e(k)s_{k_0}[\frac{u(k)}{e(k)}]}{e(k)}\Big]$$
$$= e(k)s_{k_0}[\frac{u(k)}{e(k)}] = s_{a,b,k_0}u(k), \quad k_0, k \in \mathbb{Z},$$

ponieważ $s^2_{k_0} = s_{k_0}$. Ostatecznie s_{a,b,k_0} jest rzutem L^1 na $\operatorname{Ker} S_{a,b}$ dla każdego $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Z lematu 2. wynika, że rzut s_{a,b,k_0} wyznacza *pierwotną* T_{a,b,k_0} ze wzoru (14). Mianowicie

$$T_{a,b,k_0}\{u(k)\} := \{e(k)\}T_{k_0}\{\frac{u(k)}{a(k)e(k)}\}, \quad k_0 \in \mathbb{Z}, \{u(k)\} \in C(\mathbb{Z}). \tag{16}$$

Ponadto s_{a,b,k_0} jest *warunkiem granicznym* odpowiadającym pierwotnej (16). W ten sposób otrzymujemy:

Wniosek 1. *Zespół* (6), (15), (16) *tworzy dyskretny* $\nabla_{a,b}$*-model rachunku operatorów Bittnera*

$$CO(C(\mathbb{Z}), C(\mathbb{Z}), S_{a,b}, T_{a,b,k_0}, s_{a,b,k_0}, \mathbb{Z}). \tag{17}$$

Przykład 2. W modelu (17), dla

$$a=\{2^k\}, b=\{3^k\}, v=\left\{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{k(k+1)}}\right\},$$

równanie różnicowe

$$S^2_{a,b}u=v \tag{18}$$

przyjmuje postać

$$4^k u(k)-\frac{3}{2}\cdot 6^k u(k-1)+3^{2k-1}u(k-2)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{k(k+1)}}, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{19}$$

Wyznaczymy takie rozwiązanie $u=\{u(k)\}$ równania (19), żeby

$$u(-1)=u_{-1}, \quad u(0)=u_0, \tag{20}$$

gdzie $k_0=0$ oraz $u_{-1},u_0\in\mathbb{R}$ są danymi wartościami początkowymi.

Z lematu 1. wynika, że równanie (18) z warunkami granicznymi

$$s_{a,b,0}u=u_{0,0}, \quad s_{a,b,0}S_{a,b}u=u_{1,0} \tag{21}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorem (2) dla $n=2$, tzn.

$$u=u_{0,0}+T_{a,b,0}u_{1,0}+T^2_{a,b,0}v. \tag{22}$$

Z (15) wynika, że warunki początkowe (20) jednoznacznie określają warunki graniczne (21). Mianowicie

$$u_{0,0}=\{u_0 e(k)\}, \quad u_{1,0}=\{(u_0-u_{-1})e(k)\},$$

gdzie $e(k)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{k(k+1)}}, k\in\mathbb{Z}$.

Korzystając z (22), otrzymujemy następujące rozwiązanie zagadnienia (19), (20):

$$u(k)=\left[u_0+(u_0-u_{-1})\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\frac{2}{3}-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3\cdot 4^k}\right]\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{k(k+1)}}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$\nabla_{a,b}$-model (17) możemy również uzyskać z dyskretnej reprezentacji rachunku operatorów

$$CO(C(\mathbb{Z}),C(\mathbb{Z}),S_{1,b},T_{1,b,k_0},s_{1,b,k_0},\mathbb{Z})^5 \tag{23}$$

wprowadzonej przez autora w pracy [8].

[5] Index „1” występujący w operacjach modelu (23) oznacza ciąg $\{1\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Mamy bowiem

$$S_{a,b}\{u(k)\} = \{a(k)\}\big\{u(k) - \frac{b(k)}{a(k)}u(k-1)\big\} = \{a(k)\}S_{1,b/a}\{u(k)\}$$

oraz

$$T_{a,b,k_0}\{u(k)\} = T_{1,b/a,k_0}\big\{\frac{u(k)}{a(k)}\big\}, \quad s_{a,b,k_0}\{u(k)\} = s_{1,b/a,k_0}\{u(k)\}.$$

ELEMENT WYKŁADNICZY

Niech c i λ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $c \neq 0$ oraz

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{Z}} a(k) \neq \lambda.$$

Rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} S_{a,b}x = \lambda x \\ s_{a,b,k_0}x = c \end{cases} \iff \begin{cases} (a(k)-\lambda)x(k) - b(k)x(k-1) = 0 \\ x(k_0) = c \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \tag{24}$$

nazywamy *elementem wykładniczym* (*o wykładniku* λ)[6].

Ponieważ $x \in \operatorname{Ker} S_{a-\lambda,b}$, zatem na podstawie (8) wnioskujemy, że rozwiązaniem zagadnienia (24) jest ciąg

$$x(k) = \begin{cases} c\displaystyle\prod_{i=k-k_0+1}^{0} \frac{a(i)-\lambda}{b(i)} & \text{dla} \quad k < k_0 \\ c & \text{dla} \quad k = k_0 \\ c\displaystyle\prod_{i=1}^{k-k_0} \frac{b(i)}{a(i)-\lambda} & \text{dla} \quad k > k_0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{25}$$

W szczególności element wykładniczy odpowiadający różnicy wstecznej $S_{1,1} \equiv \nabla$ ma postać

$$x = \{(1-\lambda)^{k_0-k}c\}. \tag{26}$$

[6] W (24) liczbę c utożsamiamy z ciągiem stałym $\{c\}$.

Ciąg (25) jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia (24). Istotnie, gdyby istniały dwa rozwiązania $x_1(k), x_2(k)$ zagadnienia (24), to dla $u(k) := x_1(k) - x_2(k)$ mielibyśmy $s_{k_0} u(k) = 0$, czyli $u(k_0) = 0$. Ponadto byłoby

$$u(k) = \frac{b(k)}{a(k) - \lambda}\, u(k-1) \quad \text{dla} \quad k > k_0,$$

$$u(k-1) = \frac{a(k) - \lambda}{b(k)}\, u(k) \quad \text{dla} \quad k \leqslant k_0,$$

skąd wynika, że $u(k) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3. Niech $\{x(k)\} \in C(\mathbb{Z})$ będzie rozwiązaniem bilateralnego niejednorodnego równania różnicowego rzędu n

$$x(k) = \alpha_1\, x(k-1) + \alpha_2\, x(k-2) + \cdots + \alpha_n\, x(k-n) + \beta, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{27}$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ są danymi liczbami rzeczywistymi oraz $\alpha_n \neq 0$.

Relacja (27) określa ciąg $\{x(k)\}$ jednoznacznie, jeżeli dla pewnego $k_0 \in \mathbb{Z}$ znanych jest n kolejnych jego wyrazów

$$x(k_0 - n + 1) = x^0_{k_0-n+1}, x(k_0 - n + 2) = x^0_{k_0-n+2}, \ldots,$$
$$x(k_0 - 1) = x^0_{k_0-1}, x(k_0) = x^0_{k_0}. \tag{28}$$

Wówczas, na podstawie (27), pozostałe wyrazy wyznaczamy rekurencyjnie, stosując wzory

$$x(k) = \alpha_1\, x(k-1) + \alpha_2\, x(k-2) + \cdots + \alpha_n\, x(k-n) + \beta \quad \text{dla} \quad k > k_0$$

oraz

$$x(k-n) = \frac{1}{\alpha_n}[\, x(k) - \alpha_1\, x(k-1) - \cdots - \alpha_{n-1}\, x(k-n+1) - \beta\,] \quad \text{dla} \quad k \leqslant k_0.$$

Niech $\gamma := \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. Nietrudno sprawdzić, że dla $\gamma \neq 1$ podstawienie

$$y(k) := x(k) - \delta \Longleftrightarrow x(k) = y(k) + \delta,$$

gdzie $\delta := \beta/(1-\gamma)$, pozwala sprowadzić (27) do równania jednorodnego

$$y(k) = \alpha_1\, y(k-1) + \alpha_2\, y(k-2) + \cdots + \alpha_n\, y(k-n), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Uwzględniając (28), równaniu (29) odpowiadają warunki początkowe

$$y(k_0 - i) = x^0_{k_0-i} - \delta, \quad i \in \overline{0, n-1}. \tag{30}$$

Stosując model rachunku operatorów z pochodną S jako różnicą wsteczną ∇ (przykład 1.), równanie (29) możemy przedstawić w postaci

$$a_n\, S^n y + a_{n-1}\, S^{n-1} y + \cdots + a_1\, Sy + a_0\, y = 0, \tag{31}$$

gdzie $y := \{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ oraz

$$a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad a_j = (-1)^{j+1} \sum_{i=j}^{n} \tbinom{i}{j} \alpha_i, \quad j \in \overline{1, n}, \tag{32}$$

co wynika z twierdzenia 1 [9]. Z kolei na podstawie wniosku 1 [9] stwierdzamy, że warunkom początkowym (30) odpowiadają równoważne warunki graniczne postaci

$$c_i := s_{k_0} S^i y = \Big\{ \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \tbinom{i}{j} (x^0_{k_0-j} - \delta) \Big\}, \quad i \in \overline{0, n-1}. \tag{33}$$

Zagadnienie (31), (33) możemy rozwiązać w tzw. *przestrzeni wyników* generowanej przez ciągi dwustronne [9]. Mówiąc najogólniej, wyniki powstają przez „dzielenie" ciągów dwustronnych przez injekcyjne endomorfizmy przestrzeni $C(\mathbb{Z})$. Rezultatem takiego działania mogą być *wyniki regularne*, czyli ciągi dwustronne oraz *wyniki singularne*, które nie są elementami przestrzeni $C(\mathbb{Z})$ [7]. Na przykład

$$\frac{c}{T_{k_0}} \equiv P_{k_0} c, \quad c \neq \{0\}$$

jest wynikiem singularnym [3], natomiast element wykładniczy (26) jest wynikiem regularnym postaci

$$\frac{c}{I - \lambda T_{k_0}}, \quad c \neq \{0\},$$

tzn.

$$\{(1-\lambda)^{k_0-k} c\} = \frac{P_{k_0}}{P_{k_0} - \lambda I}\, c, \tag{34}$$

gdzie $P_{k_0} := \frac{I}{T_{k_0}}$ jest tzw. *operatorem Heaviside'a*, natomiast I jest operacją identycznościową określoną na przestrzeni $C(\mathbb{Z})$ [9].

Szczególnym przypadkiem równania postaci (27) jest równanie określające tzw. ciąg soczewkowy [5].

Formalnym *ciągiem soczewkowym* generowanym przez uporządkowaną trójkę liczb $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ nazywamy ciąg $\{x(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ będący rozwiązaniem zagadnienia

$$x(k) = \alpha\, x(k-1) - x(k-2) + \beta, \quad k \in \mathbb{Z}; \tag{35}$$

$$x(-1) = \mathfrak{a}, \;\; x(0) = \mathfrak{b}, \tag{36}$$

gdzie

$$\alpha := \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}^2} - 1, \quad \beta := \frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}.$$

Wówczas $x(1) = \mathfrak{c}$. Ponadto stałe α i β są „niezmiennikami" ciągu $\{x(k)\}$ w tym sensie, że ich wartości mogą być wyznaczone na podstawie każdych trzech kolejnych wyrazów tego ciągu.

Jeżeli $\alpha \neq 2$, to (35) jest równoważne równaniu jednorodnemu

$$y(k) = \alpha\, y(k-1) - y(k-2), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{37}$$

gdzie

$$y(k) := x(k) - \delta, \quad \delta = \frac{\beta}{2-\alpha},$$

natomiast (36) odpowiadają warunki początkowe

$$y(-1) = \mathfrak{a} - \delta, \;\; y(0) = \mathfrak{b} - \delta. \tag{38}$$

Z kolei w ∇-modelu zagadnienie (37), (38) przyjmuje postać

$$a_2\, S^2 y + a_1\, Sy + a_0\, y = 0$$
$$c_0 = s_0 y = \mathfrak{b} - \delta, \;\; c_1 = s_0 S y = \mathfrak{b} - \mathfrak{a},$$

gdzie $y = \{y(k)\}$ oraz

$$a_0 = 2 - \alpha, a_1 = \alpha - 2, a_2 = 1.$$

Dla ustalenia uwagi rozważmy zagadnienie

$$x(k) = 8x(k-1) - x(k-2) - 7, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$x(-1) = 6, \;\; x(0) = 2$$

generowane przez trójkę $(6, 2, 3)$. Jest ono równoważne zagadnieniu

$$S^2 y + 6Sy - 6y = 0; \tag{39}$$

$$c_0 = \{\frac{5}{6}\}, \;\; c_1 = \{-4\}, \tag{40}$$

gdzie $y = \{y(k)\} = \{x(k) - \frac{7}{6}\}$.

Działając na równanie (39) obustronnie operacją T_0^2, po uwzględnieniu warunków granicznych (40), otrzymujemy

$$P_0^2 y + 6P_0 y - 6y = P_0^2\{\frac{5}{6}\} + P_0\{1\},$$

czyli

$$y = P_0 \, \frac{P_0\{\frac{5}{6}\} + \{1\}}{P_0^2 + 6P_0 - 6I},$$

gdzie P_0 jest operatorem Heaviside'a odpowiadającym pierwotnej T_0.

Stąd, po rozkładzie na ułamki proste, uzyskujemy ciąg y w postaci wyniku

$$y = \frac{P_0}{P_0 - \Lambda I}\{M\} - \frac{P_0}{P_0 - \lambda I}\{\mu\}, \tag{41}$$

gdzie

$$M := \frac{-9 + 5\sqrt{15}}{12\sqrt{15}}, \quad \mu := \frac{-9 - 5\sqrt{15}}{12\sqrt{15}}$$

$$\Lambda := -3 + \sqrt{15}, \quad \lambda := -3 - \sqrt{15}.$$

Porównując (41) z (34), stwierdzamy, że y wyraża się przez elementy wykładnicze. Ostatecznie wyraz ogólny dwustronnego ciągu soczewkowego

$$\{\ldots, 18462, 2346, 299, 39, \mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 15, 110, 858, 6747, \ldots\}$$

generowanego przez uporządkowaną trójkę liczb $(6, 2, 3)$ ma postać

$$x(k) = M(1 - \Lambda)^{-k} - \mu(1 - \lambda)^{-k} + \frac{7}{6}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

skąd, po prostych przekształceniach, otrzymujemy (por. 5])

$$x(k) = \frac{(25 - 3\sqrt{15}\,)(4 + \sqrt{15}\,)^k + (25 + 3\sqrt{15}\,)(4 - \sqrt{15}\,)^k}{60} + \frac{7}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Bittner R., *On certain axiomatics for the operational calculus*, 'Bull. Acad. Polon. Sci.', 1959, Cl. III, 7(1), pp. 1–9.

[2] Bittner R., *Algebraic and analytic properties of solutions of abstract differential equations*, 'Dissertationes Math.', 41, PWN, Warszawa 1964.

[3] Bittner R., *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*, PWN, Warszawa 1974.

[4] Hosseinzadeh H., Afrouzi G. A., *Backward (r, s)-difference operator $\nabla_{r,s}$ and solving difference equations*, 'Int. J. Contemp. Math. Sci.', 2008, Vol. 3, 36, pp. 1755–1765.

[5] Kocik J., *Lens sequences*, e-print: arXiv:0710.3226v1.

[6] Levy H., Lessman F., *Finite Difference Equations*, Pitman and Sons, London 1959.

[7] Wysocki H., *The result derivative. Distributive results*, 'Acta Math. Hung.', 1989, 53 (3–4), pp. 289–307.

[8] Wysocki H., *Model nieklasycznego rachunku operatorów Bittnera dla różnicy wstecznej*, „Zeszyty Naukowe AMW", 2010, nr 2 (181), s. 37–48.

[9] Wysocki H., *Rozwiązanie liniowego równania różnicowego w przestrzeni wyników generowanej przez ciągi dwustronne*, „Zeszyty Naukowe AMW", 2010, nr 3 (182), s. 85–101.

THE BACKWARD a, b-DIFFERENCE OPERATIONAL CALCULUS MODEL

ABSTRACT

The paper presents a discrete model of Bittner's operational calculus, in which the derivative is understood as a difference operation $\nabla_{a,b}u(k) = a(k)u(k) - b(k)u(k-1)$. The model is a generalization of the ∇-model with the backward difference $\nabla u(k) = u(k) - u(k-1)$.

Keywords:

operational calculus, derivative, integrals, limit conditions, backward difference, exponential element.