

Magdalena Ataman, Wacław Szcześniak

# Układ dwóch nieskończenie długich belek z wypełnieniem sprężystym pod obciążeniem ruchomym

JEL: L62 DOI: 10.24136/atest.2018.400  
Data zgłoszenia: 19.11.2018 Data akceptacji: 15.12.2018

W artykule omówiono analityczne rozwiązanie zadania z dynamiki układu dwóch nieskończenie długich belek z wypełnieniem sprężystym. Układ spoczywa na podłożu Winklera i jest obciążony ruchomą siłą skupioną. Ponieważ zagadnienie jest stacjonarne dla obserwatora poruszającego się z obciążeniem, cząstkowe równania różniczkowe opisujące drgania układu transformowano na równania różniczkowe zwyczajne w układzie współrzędnych związanym z ruchomą siłą. Układ równań doprowadzono do jednego równania różniczkowego, zawyżonego rzędu, na ugięcie dolnej belki. Rozwiązanie zadania doprowadzono do prostej całki nieskończonej Fouriera. W pracy przedstawiono obszerny wykaz publikacji z literatury przedmiotu [1-45].

**Słowa kluczowe:** układ belek z wypełnieniem sprężystym, podłoże sprężyste, obciążenie ruchome, rozwiązanie analityczne.

## Wstęp

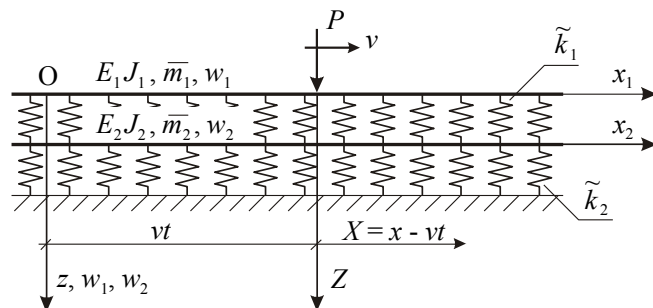
Zadania dotyczące ruchomych obciążeń na belkach i płytach mają szczególnie ważne znaczenie w budownictwie mostowym, drogowym, lotniskowym oraz kolejowym.

W przeszłości przy wymiarowaniu nawierzchni komunikacyjnych bazowano przede wszystkim na metodach empirycznych, lub stosowano rozwiązania typowe. W ostatnich latach, ze względu na duże wymagania stawiane nowoczesnym nawierzchniom oraz dzięki możliwościom technicznym, coraz częściej stosuje się metody mechaniki konstrukcji, używając do tego celu specjalnie opracowane programy komputerowe.

W niniejszym opracowaniu zaproponowano podejście analityczne do rozwiązania zagadnienia nawierzchni komunikacyjnych podanych działaniu obciążeń ruchomych.

## 1 Sformułowanie problemu

Przedmiotem rozważań są drgania układu dwóch nieskończenie długich, sprężystych belek Eulera, spoczywających na podłożu



**Rys. 1.** Nieskończenie długie belki na podłożu Winklera z ruchomym układem współrzędnych

odkształcalnym Winklera. Górna belka obciążona jest siłą skupioną poruszającą się ze stałą prędkością.

Rozważmy zatem układ przedstawiony na rysunku 1. Są to dwie nieskończenie długie, jednorodne belki o stałym przekroju poprzecznym, połączone sprężynami Winklera. Układ belek spoczywa na podłożu sprężystym i obciążony jest siłą  $P$  poruszającą się ze stałą prędkością  $v$ .

Przy powyższych założeniach drgania poprzeczne belek opisane są układem dwóch równań różniczkowych:

$$E_1 J_1 \frac{\partial^4 w_1(x,t)}{\partial x^4} + \bar{m}_1 \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial t^2} + \tilde{k}_1 [w_1(x,t) - w_2(x,t)] = P \delta(x - vt), \quad (1)$$

$$E_2 J_2 \frac{\partial^4 w_2(x,t)}{\partial x^4} + \bar{m}_2 \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial t^2} + \tilde{k}_1 [w_2(x,t) - w_1(x,t)] + \tilde{k}_2 w_2(x,t) = 0,$$

gdzie:  $w_1(x,t)$  – ugięcie górnej belki [m],

$w_2(x,t)$  – ugięcie dolnej belki [m],

$E_1 J_1$  – sztywność na zginanie górnej belki [Nm<sup>2</sup>],

$E_2 J_2$  – sztywność na zginanie dolnej belki [Nm<sup>2</sup>],

$\bar{m}_1$  – masa górnej belki [kg/m],

$\bar{m}_2$  – masa dolnej belki [kg/m],

$\tilde{k}_1 = k_1 b_1$  – współczynnik sprężystego osiadania górnej belki [N/m<sup>2</sup>],

$\tilde{k}_2 = k_2 b_2$  – współczynnik sprężystego osiadania dolnej belki [N/m<sup>2</sup>],

$b_1$  i  $b_2$  – szerokości belek.

## 2 Rozwiązanie zadania

W celu wyznaczenia funkcji  $w_1(x,t)$  oraz  $w_2(x,t)$ , opisujących ugięcia belek, można rozwiązać powyższy układ sprzężonych ze sobą równań różniczkowych czwartego rzędu.

W niniejszej pracy zastosujemy natomiast inny sposób rozwiązania zagadnienia, który polega na doprowadzeniu układu równań (1) do jednego równania różniczkowego zawyżonego, ósmego rzędu. W takim przypadku w równaniu mamy jedną nieznaną funkcję  $w_2(x,t)$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{E_1 J_1 E_2 J_2}{\tilde{k}_1} \frac{\partial^8 w_2(x, t)}{\partial x^8} + \\
 & + \frac{1}{\tilde{k}_1} (E_1 J_1 \bar{m}_2 + E_2 J_2 \bar{m}_1) \frac{\partial^6 w_2(x, t)}{\partial x^4 \partial t^2} + \\
 & + \left[ E_1 J_1 \left( 1 + \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \right) + E_2 J_2 \right] \frac{\partial^4 w_2(x, t)}{\partial x^4} + \\
 & + \left[ \left( 1 + \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \right) \bar{m}_1 + \bar{m}_2 \right] \frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial t^2} + \\
 & + \frac{\bar{m}_1 \bar{m}_2}{\tilde{k}_1} \frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial t^4} + \\
 & + \tilde{k}_2 w_2(x, t) = P \delta(x - vt).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Ugięcie górnej belki  $w_1$  wyznaczamy na podstawie zależności otrzymanej z równania (1):

$$\begin{aligned}
 w_1(x, t) = & \left( 1 + \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \right) w_2(x, t) + \\
 & + \frac{E_2 J_2}{\tilde{k}_1} \frac{\partial^4 w_2(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\bar{m}_2}{\tilde{k}_1} \frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial t^2}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

W zadaniu możemy przyjąć, że zagadnienie jest stacjonarne dla obserwatora poruszającego się z obciążeniem, zatem cząstkowe równania różniczkowe (1) i (2), opisujące drgania układu, możemy transformować na równania różniczkowe zwyczajne w układzie współrzędnych związanym z ruchomą siłą.

Wprowadźmy zatem ruchomy układ współrzędnych, jak na rysunku 1, związany z ruchomą siłą  $P$ :

$$X = x - vt, \quad Z = z, \quad T = t. \tag{4}$$

W takim przypadku możemy zapisać następujące zależności:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial X}, \\
 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{\partial^4 w}{\partial X^4}, \\
 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} &= \frac{\partial^8 w}{\partial X^8}, \\
 \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial T} = -v \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial T}, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} - 2v \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial T} + \frac{\partial^2 w}{\partial T^2}, \\
 \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} &= v^4 \frac{\partial^4 w}{\partial X^4} - 4v^3 \frac{\partial^4 w}{\partial X^3 \partial T} + \\
 & + 6v^2 \frac{\partial^4 w}{\partial X^2 \partial T^2} - 4v \frac{\partial^4 w}{\partial T^3 \partial X} + \frac{\partial^4 w}{\partial T^4}, \\
 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^6 w}{\partial X^6} - 2v \frac{\partial^6 w}{\partial X^5 \partial T} + \frac{\partial^6 w}{\partial X^4 \partial T^2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

W układzie współrzędnych związanym z ruchomą siłą cząstkowe równania różniczkowe (1) sprowadzają się do następujących równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^4 w_1(X)}{dX^4} + \frac{\bar{m}_1 v^2}{E_1 J_1} \frac{d^2 w_1(X)}{dX^2} + \\
 & + \frac{\tilde{k}_1}{E_1 J_1} [w_1(X) - w_2(X)] = \frac{1}{E_1 J_1} P \delta(X),
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^4 w_2(X)}{dX^4} + \frac{\bar{m}_2 v^2}{E_2 J_2} \frac{d^2 w_2(X)}{dX^2} + \\
 & + \frac{\tilde{k}_1}{E_2 J_2} [w_2(X) - w_1(X)] + \frac{\tilde{k}_2}{E_2 J_2} w_2(X) = 0.
 \end{aligned}$$

Jeśli wielkości  $E_1, J_1$  i  $\bar{m}_1$  są równe odpowiednio wielkościom  $E_2, J_2$  i  $\bar{m}_2$ , to po dodaniu stronami równań (6) i wykorzystaniu zależności  $w = w_1 + w_2$  rozwiązanie upraszcza się.

Równanie różniczkowe zwyższego rzędu na ugięcie dolnej belki (2) w układzie współrzędnych związanym z ruchomą siłą ma postać

$$\begin{aligned}
 & \frac{E_1 J_1 E_2 J_2}{\tilde{k}_1} \frac{d^8 w_2(X)}{dX^8} + \\
 & + \frac{v^2}{\tilde{k}_1} (E_1 J_1 \bar{m}_2 + E_2 J_2 \bar{m}_1) \frac{d^6 w_2(X)}{dX^6} + \\
 & + \left[ E_1 J_1 \left( 1 + \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \right) + E_2 J_2 \right] \frac{d^4 w_2(X)}{dX^4} + \\
 & + v^2 \left[ \left( 1 + \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \right) \bar{m}_1 + \bar{m}_2 \right] \frac{d^2 w_2(X)}{dX^2} + \\
 & + v^4 \frac{\bar{m}_1 \bar{m}_2}{\tilde{k}_1} \frac{d^2 w_2(X)}{dX^4} + \\
 & + \tilde{k}_2 w_2(X) = P \delta(X).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Wprowadzenie ruchomego układu współrzędnych zmienia matematyczny charakter równań (3) i (4) z cząstkowego na zwyczajne, a jedynym parametrem określającym dynamikę jest prędkość  $v$ .

Układ równań (6), a także równanie (7), można rozwiązać przyjmując prawą stronę równą zero i uwzględniając siłę  $P$  poprzez warunki ciągłości w punkcie  $X = 0$ .

Równanie różniczkowe (7), opisujące drgania dolnej belki o nieskończonej długości, można rozwiązać również stosując transformację Fouriera

$$\begin{aligned}
 w_2(X) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi) e^{iX\xi} d\xi, \\
 W(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} w_2(X) e^{i\xi X} dX,
 \end{aligned} \tag{8}$$

skąd otrzymujemy równanie algebraiczne w postaci

$$\begin{aligned}
 \xi^8 W(\xi) - A_1 \xi^6 W(\xi) + A_2 \xi^4 W(\xi) + \\
 - A_3 \xi^2 W(\xi) + A_4 W(\xi) = A_5 P.
 \end{aligned} \tag{9}$$

W równaniu (9)  $A_1$  do  $A_5$  są współczynnikami opisanymi następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= v^2 \left( \frac{\bar{m}_1}{E_1 J_1} + \frac{\bar{m}_2}{E_2 J_2} \right), \\
 A_2 &= \frac{\tilde{k}_1}{E_1 J_1} + \frac{\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2}{E_2 J_2} + v^4 \frac{\bar{m}_1 \bar{m}_2}{E_1 J_1 E_2 J_2}, \\
 A_3 &= v^2 \frac{(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) \bar{m}_1 + \tilde{k}_1 \bar{m}_2}{E_1 J_1 E_2 J_2}, \\
 A_4 &= \frac{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2}{E_1 J_1 E_2 J_2}, \\
 A_5 &= \frac{\tilde{k}_1}{E_1 J_1 E_2 J_2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Z równania (10) wyznaczamy funkcję  $W(\xi)$

$$W(\xi) = \frac{A_5 P}{\xi^8 - A_1 \xi^6 + A_2 \xi^4 - A_3 \xi^2 + A_4}. \tag{11}$$

Ugięcie dolnej belki analizowanego układu możemy obliczyć rozwiązując następującą całkę

$$w_2(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_5 P e^{iX\xi}}{\xi^8 - A_1 \xi^6 + A_2 \xi^4 - A_3 \xi^2 + A_4} d\xi. \tag{12}$$

Po wyznaczeniu ugięcia dolnej belki można określić ugięcie górnej belki  $w_1$  na podstawie zależności (3).

### Podsumowanie

Wprowadzenie układu współrzędnych związanego z ruchomą siłą zmieniło matematyczny charakter równań opisujących drgania układu belek z równań cząstkowych na równania zwyczajne. Jedy- nym parametrem określającym dynamikę w przypadku zadania stacjonarnego jest prędkość.

Analogiczne rozwiązanie otrzymamy w przypadku ruchomego punktu materialnego lub oscylatorów, jeśli na belce, po której poru- sza się obciążenie nie ma nierówności.

Następnym etapem pracy będzie wykonanie przykładów obli- czeniowych.

### Bibliografia:

- Ataman M., Drgania belek i płyt poprzecznie niejednorodnych na podłożach okształcalnych wymuszone obciążeniami ru- chomymi, OW PW, Warszawa 2010.
- Ataman M., Wpływ bezwładności taboru, nawierzchni kolejowej i podłoża na ich stateczność i prędkości krytyczne pociągów o dużych prędkościach, „Logistyka” 2012, nr 3, str. 29-34.
- Ataman M., Zastosowanie podejścia falowego do analizy drgań toru kolejowego, „Monografie Zakładu Mechaniki Teoretycznej i Mechaniki Nawierzchni Komunikacyjnych”, t. 1, rozdz. I, OW PW, Warszawa 2015, str. 23-36.
- Ataman M., Szcześniak W., Drgania niejednorodnej belki swo- bodnie podpartej z dużą siłą osiową na podłożu inercyjnym, wywołane obciążeniem ruchomym, „Theoretical Foundations of Civil Engineering” Vol. 20, Ed. by W. Szcześniak OW PW, War- szawa 2012, pp. 43-50.
- Ataman M., Tott K., Wpływ zmiany masy i sprężystości toru kolejowego na jego zachowanie pod działaniem obciążenia ru- chomego, „Theoretical Foundations of Civil Engineering”, Vol. 22, OW PW, Warszawa 2014, str. 25-32.
- Bogacz R., Krzyżyński T., Popp K., On the group-phase velocity

- relations for continuous system under moving loads, ZAMM, 1990, 70, 4, pp. 202-203.
- Bogacz R., Popp K., Dynamics and stability of train-track sys- tems, „Proceedings of the 2nd International Conference on Re- cent Advances in Structural Dynamics”, Southampton 1984, pp. 711-726.
- Bogacz R., Rozenbajgier Z., Stacjonarne drgania belki spoczy- wającej na półprzestrzeni lepko-sprężystej wywołane ruchomym obciążeniem, „Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Me- chanika”, Warszawa 1979, z. 63, str. 45-70.
- Dörr J., Das Schwingungsverhalten eines federnd gebetteten unendlich langen Balkens, „Ingenieur-Archiv”, Band 1948, XVI, S. 287-298.
- Dörr J., Der unendliche, federnd gebettete Balken unter dem Einfluss einer gleichförmig bewegten Last, „Ingenieur-Archiv”, Band 1943, XIV, S. 167-192.
- Fryba L., Vibration of solids and structures under moving loads, Thomas Telford, 1999.
- Genin J., Ting E.C., Vehicle guideway interaction problems, „The Shock and Vibration Digest” December 1979, Vol. 11, No 12, pp. 3-9.
- Jemielita G., Szcześniak W., Sposoby modelowania podłoża, „Prace Naukowe PW, Budownictwo” z. 120, OW PW, Warszawa 1993.
- Kerr A.D., On the stability of the railroad track in the vertical plan, „Rail International”, Feb. 1974, pp. 132-142.
- Krzyżyński T., Dynamika układów o niedostrojonych parame- trach, „Monografie Wydziału Mechanicznego”, nr 115, Wydaw- nictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej”, Koszalin 2005.
- Jones R., Xenophontos J., On the Vlasov and Kerr foundation models, „Acta Mechanica” 1976, No 25, pp. 45-49.
- Ludwig K., Die Verformung eines beiderseits unbegrenzten elastisch gebetteten Geleises durch Lasten mit konstanter Hori- zontalgeschwindigkeit, (Deformation of a rail elastically support- ed and infinite length by loads moving at a constant horizontal velocity) „Proceedings of the Fifth International Congress for Applied Mechanics”, Cambridge, Massachusetts 1938, pp. 650- 655.
- Popp K., Bogacz R., Dynamic und Bewegungsstabilität von Zug-Gleis Systemen, „VDI – Berichte” 1984, 510, pp. 197-203.
- Ruta P., Drgania belki na inercyjnym podłożu sprężystym, ob- ciężonej siłą ruchomą, „Rozprawy Inżynierskie”, 1987, 35, 1, str. 129-148.
- Szcześniak W., Analiza statyczna, dynamiczna i stateczność nawierzchni drogowej i kolejowej, „Prace Naukowe Politechniki Radomskiej. Transport”, Radom 2000, nr 2(11), str. 57-83.
- Szcześniak W., Drgania belki Timoshenki po wpływie równo- miernie rozłożonego, inercyjnego, ciągłego obciążenia rucho- mego. Model ciąglej konstrukcji, „Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo” z. 112, OW PW, Warszawa 1990, str. 77-118.
- Szcześniak W., Drgania belki Timoshenki po wpływie równo- miernie rozłożonego, inercyjnego, ciągłego obciążenia rucho- mego. Model dyskretny konstrukcji, „Prace Naukowe Politechni- ki Warszawskiej, Budownictwo” z. 112, OW PW, Warszawa 1990, str. 119-132.
- Szcześniak W., O pewnej częstotliwości krytycznej w zagadnieniu własnym belki Timoshenki, „IV Konferencja „Komputerowe Sys- temy Wspomagania Nauki, Przemysłu i Transportu. TRANS- COMP” 2000, pp.431-440.
- Szcześniak W., Wpływ siły osiowej oraz ścinania podłoża na amplitudy drgań belki nieskończonej pod obciążeniem rucho-

- mym, „Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo” nr 56, Warszawa 1977, str. 19-36.
25. Szcześniak W., Wybrane zagadnienia kolejowe, „Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Budownictwo” z. 129. OW PW, Warszawa 1995.
  26. Szcześniak W., Zastosowanie równań Lagrange'a drugiego rodzaju w zagadnieniu dynamicznym belki Timoshenki pod obciążeniem ruchomym, „Rozprawy Inżynierskie – Engineering Transactions” 1990, 38 (3-4), pp. 591-633.
  27. Szcześniak W., Ataman M., Pewien sposób znajdowania zamkniętej postaci drgań czysto wymuszonych w zadaniu Kryłowa, „Theoretical Foundations of Civil Engineering” Vol. 9, OW PW, Warszawa 2001, pp. 413-432.
  28. Timoshenko S.P., Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail, „Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics”, Zurich, Switzerland 1926, pp. 407-418.
  29. Timoshenko S.P., On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, „Philosophical Magazine” 1921 No 41, pp. 744-746.
  30. Timoshenko S.P., On transverse vibrations of bars of uniform cross section, „Philosophical Magazine” 1922, No 43, pp. 125-131.
  31. Timoshenko S., The forced vibrations of tie-roads. (1941 Applied Mechanics, Theodore von Karman Anniversary Volume), In the Collected Papers of Stephen P. Timoshenko. McGraw-Hill, 1953, pp. 610-614.
  32. Timoshenko S.P., Vibration Problems in Engineering, D. Van Nostrand Company, Princetown 1956.
  33. Ting E.C., Genin J., Ginsberg J.H., Dynamic interaction of bridge structures and vehicles, „The Shock and Vibration Digest” 1975, Vol. 7, No 11, pp. 61-69.
  34. Ting E.C., Unified formulation of two-parameter foundation model, ZAMM 1973 Vol. 53, Issue 9, pp. 636-637.
  35. Власов В.З., Леонтев Н.Н., Балки, плиты и оболочки на упругом основании, Г.И.Ф.М.Л., Москва 1960.
  36. Дмитриев А.С., Колебания балки Тимошенко при движении сосредоточенной силы, „Труды ЛИСИ” 1982, стр. 41-48.
  37. Львовский В.М., Львовский Б.В., Контактная задача для кругового штампа на двухслойном основании, „Сопротивление Материалов и Теория Сооружений”, Киев 1976, вып. 38, стр. 34-41.
  38. Львовский В.М., Колебания балочной плиты, лежащей на нелинейном упругом массивном основании, под действием подвижной нагрузки, „Известия Высших Учебных Заведений, Строительство и Архитектура” 1970, No. 9, стр. 37-45.
  39. Львовский В.М., Колебания бесконечной балки, лежащей на упругом массивном основании и работающей в проставленных условиях, под действием равномерно движущейся нагрузки, „Известия Высших Учебных Заведений, Лесной Журнал” 1963, No. 5, стр. 56-67.
  40. Львовский В.М., О равномерном движении сосредоточенной нагрузки по бесконечной балке, лежащей на упругом массивном двухслойном основании, „Известия Высших Учебных Заведений, Лесной Журнал” 1964, No. 2, стр. 81-88.
  41. Моргаевский А.Б., Кожемякина И.Ф., Решение задачи о динамическом воздействии подвижной нагрузки с учетом сдвига и инерции вращения, „Динамика и прочность машин” 1976, вып. 23, стр. 23-27.
  42. Тимошенко С.П., К вопросу о вибрациях рельс, „Известия Электротехнического Института” 1915, т. 13, стр. 117 Отд. оттиск, Петроград 1915, 17 строн.
  43. Тимошенко С.П., К вопросу о прочности рельс. Отд. оттиск, Петроград, тип. А.Э. Коллинса 1915, 42 строн.
  44. Тимошенко С.П., О динамических напряжениях в рельсах, „Вестник инженеров” 1915, т. 1, No. 4, стр. 143-152.
  45. Тимошенко С.П., Устойчивость стержней, пластин и оболочек, Издат. Наука, Москва 1971.

---

### A system of two infinite beams separated by an elastic core under moving load

The paper discussed the analytical solution of a dynamic problem of a system of two infinite beams separated by an elastic core. The beams' system rests on the Winkler foundation and is loaded with a moving concentrated force. Because the problem is stationary for an observer moving with the load, partial differential equations, describing the vibrations of the system, were transformed into ordinary differential equations in the coordinate system related to the moving force. The system of equations was transformed to one differential equation of an eighth order. The equation defines deflection of the lower beam. The solution of the problem was resulted to the simple infinite Fourier integral. An extensive list of publications on the related literature is presented in the paper [1-45].

---

**Keywords:** infinite sandwich beam, elastic foundation, moving force, analytical solution.

**Autorzy:**

dr inż. **Magdalena Ataman** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej  
 prof. dr hab. inż. **Wacław Szcześniak** – Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury