



## Zarys metody określania jakości systemu samonaprowadzania lotniczego pocisku raketowego

Andrzej SKOMRA \*

*Wydział Mechatroniki i Lotnictwa, Wojskowa Akademia Techniczna  
ul. gen. S. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa*

*\* autor korespondencyjny, e-mail: andrzej.skomra@wat.edu.pl*

*Artykuł wpłynął do redakcji 11.05.2015. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 11.09.2015*

DOI 10.5604/20815891.1203121

**Streszczenie.** Jakość systemu samonaprowadzania określić można dokładnością naprowadzenia pocisku raketowego na cel w ujęciu stochastycznym przez wyznaczenie wartości oczekiwanej i wariancji uchybu końcowego pocisku. W artykule przedstawiono metodę opisu rozkładu uchybu bieżącego pocisku, polegającą na wykorzystaniu funkcji charakterystycznej tej zmiennej losowej. Do wyprowadzenia końcowego wzoru na uchyb bieżący pocisku skorzystano z wyrażenia opisującego prędkość kątową linii obserwacji celu, będącego rozwiązaniem zlinearyzowanego układu równań, opisującego związku kinematyczne między pociskiem i celem wraz z algorytmem proporcjonalnej nawigacji.

**Słowa kluczowe:** mechanika, dokładność, samonaprowadzanie, uchyb (przelot)

### 1. WSTĘP

Podstawową charakterystyką lotniczego pocisku raketowego samonaprowadzającego się na cel, przeznaczonego do niszczenia celów powietrznych, jest prawdopodobieństwo zniszczenia (porażenia) celu [1-4].

Na porażenie celu przez konkretny sterowany pocisk raketowy ma wpływ wiele czynników losowych. Jedne z nich związane z właściwościami celu, głowicy bojowej itd., składają się na tzw. warunkowe prawdopodobieństwo porażenia celu [3], które określa prawdopodobieństwo porażenia celu przy warunku, że pocisk zajmuje określone położenie względem celu w chwili wybuchu jego głowicy bojowej.

Można zatem przyjąć, że warunkowe prawdopodobieństwo porażenia celu najsilniej zależy od odległości między pociskiem i celem w chwili wybuchu jego głowicy bojowej, czyli dokładności naprowadzenia pocisku na cel.

System samonaprowadzania zapewnia wymagany ruch jednego obiektu sterowanego (obektu naprowadzanego – pocisku) zgodnie z jego fizycznymi możliwościami, którego pozytywnym rezultatem jest „spotkanie” z drugim obiektem (celem) – najczęściej sterowanym, przy ograniczonej informacji o fazowych współrzędnych obu obiektów uzyskanej w oparciu o sygnały pochodzące od celu i odbierane przez obiekt naprowadzany. Realizuje on zatem zadanie naprowadzania.

Względne położenie tych obiektów charakteryzujemy jakąś funkcją skalarną ich współrzędnych fazowych. Prostym przypadkiem takiej funkcji jest odległość między pociskiem i celem w przestrzeni trójwymiarowej. System naprowadzania ma taką wyróżniającą go cechę, że zadanie sterowania osiągnęte jest w konkretnej (jednej) chwili, która nie jest znana w procesie sterowania i zależy od względnego położenia obiektów.

Aby scharakteryzować stan systemu naprowadzania w funkcji czasu, wprowadzimy bieżącą miarę dokładności naprowadzenia  $h(t)$  nazwaną uchybem, którą definiujemy jako najmniejszą odległość między celem i pociskiem przy warunkach ich prostoliniowego względnego ruchu. Uchyb ten określa w bieżącej chwili wartość najmniejszej odległości między obiektami, tj. wartość odległości w chwili spotkania przy warunku niezmienności kierunku wektora względnej prędkości w procesie naprowadzania. Jeżeli są znane wektory prędkości pocisku i celu (leżące na jednej płaszczyźnie), to uchyb przedstawia sobą rzut odległości między naprowadzonym obiektem i celem na prostopadłą do wektora ich względnej prędkości.

Uchyb ten wyznacza się w pewnej płaszczyźnie rozrzutu (prostopadłej do wektora względnej prędkości pocisku oraz przechodzącej przez cel) zwykle w postaci dwóch składowych określonych w prostokątnym układzie współrzędnych.

Przy badaniach systemów samonaprowadzania pocisków raketowych powszechnie wykorzystuje się pojęcie „uchyb bieżący pocisku”, przez który rozumie się taką wartość uchybu, jaka by miała miejsce, gdyby, rozpoczynając od pewnej chwili  $t$ , ruch pocisku i celu na pozostającym do spotkania odcinku trajektorii był jednostajny i prostoliniowy.

Zwykle samonaprowadzające się na cel lotnicze pociski raketowe wyposażone są w dwa (praktycznie niezależne od siebie) identyczne kanały sterowania, zatem (w pierwszym przybliżeniu) rozważania ograniczone zostaną do jednej płaszczyzny, na przykład poziomej, dla której uchyb bieżący jest funkcją bieżącej odległości między pociskiem i celem  $D$ , względnej prędkości pocisku i celu  $V_r$ , oraz bieżącej wartości prędkości kątowej linii obserwacji celu  $\dot{V}$ , natomiast zależność na uchyb końcowy pocisku raketowego ma postać [1]:

$$h(t)_y \Big|_{t=t_w} = h(t_w)_y = \frac{D_w^2}{V_r} \dot{V}_w \quad (1)$$

gdzie:

$$h(t)_y = \frac{D^2}{V_r} \dot{V} - \text{uchyb bieżący pocisku raketowego}; \quad (1a)$$

$D_w, \dot{V}_w$  – odpowiednio odległość do celu i prędkość kątowa linii obserwacji celu, wzięte dla chwili wyłączenia sterowania  $t_w$ .

Ze wzorów (1) i (1a) wynika, że podstawowym parametrem decydującym o błędzie naprowadzenia pocisku na cel jest prędkość kątowa linii obserwacji celu, zatem do prowadzenia dalszych rozważań potrzebna jest znajomość zmian tego parametru w funkcji czasu naprowadzania (lub odległości pocisku od celu).

Do wyznaczenia prędkości kątowej linii obserwacji celu przy samonaprowadzaniu się na cel pocisku raketowego klasy powietrze – powietrze skorzystano z modelu matematycznego opisującego ten proces dla następujących założeń:

- cel porusza się w płaszczyźnie horyzontalnej ze stałą prędkością;
- pocisk raketowy porusza się ze stałą średnią prędkością;
- układ naprowadzania realizuje metodę proporcjonalnej nawigacji;
- pocisk ma krzyżowo rozmieszczone skrzydła i wyposażony jest w stery aerodynamiczne, a w obwodzie wewnętrznym (stabilizacji) zastosowano sygnały z czujników prędkości kątowej pocisku względem osi poprzecznej i przyspieszenia normalnego jego środka masy;
- system sterowania pocisku składa się z dwóch identycznych, niezależnych układów sterowania i idealnie pracującego układu stabilizacji kąta przechylenia;
- nadeżny koordynator celu, napęd sterów ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym, czujniki prędkości kątowej pocisku i przyspieszenia normalnego jego środka masy są elementami bezinercyjnymi ze stałymi współczynnikami wzmocnienia;
- związek między kątem ślizgu pocisku  $\beta$  i parametrem sterowania  $\dot{V}$  jest określony równaniem różniczkowym o następującej postaci:  $\tau\dot{\beta} + \beta = K_\beta \dot{V}$ .

Dla tak sformułowanych założeń otrzymany układ równań opisujących rozważany proces samonaprowadzania można po przyjęciu dodatkowych uproszczeń:

$V_1 = V \cos(\nu - \kappa_a) = \text{const}$ ;  $V_{c1} = V_c \cos(\nu - \kappa_{ac}) = \text{const}$ ;  $\dot{\kappa}_{ac} = \text{const}$   
przekształcić tak, aby sprowadzić je do jednego równania względem  $\nu$  [3]:

$$\tau D \ddot{\nu} + (D - 3\tau \dot{D}) \dot{\nu} + (B - 2)V_r \dot{\nu} = V_{c1} \dot{\kappa}_{ac} \quad (2)$$

Przyjęte oznaczenia:

$B = \frac{V_1 A K_\beta}{V_r}$  – uogólniony współczynnik wzmocnienia systemu samonaprowadzania;

$A, K_\beta$  – odpowiednio współczynnik dynamiczny charakteryzujący manewrowość pocisku raketowego i współczynnik wiążący kąt ślizgu pocisku z parametrem sterowania;

$\tau$  – stała czasowa pocisku raketowego, określająca opóźnienie w powstawaniu siły sterującej jego lotem;

$\nu, \dot{\nu}$  – odpowiednio kąt określający położenie linii obserwacji celu i prędkość kątowna linii obserwacji celu;

$\dot{\nu}_0$  – początkowa prędkość kątowna linii obserwacji celu;

$V_r$  – prędkość zbliżania pocisku raketowego do celu;

$V, V_c$  – odpowiednio prędkość lotu pocisku i prędkość lotu celu;

$\kappa_a$  – kąt określający położenie wektora prędkości pocisku raketowego;

$\kappa_{ac}, \dot{\kappa}_{ac}$  – odpowiednio kąt określający położenie wektora prędkości celu i prędkość kątowna wektora prędkości celu;

$D = D_0 - V_r t$ ;  $D_0$  – odpowiednio bieżąca odległość między pociskiem i celem i początkowa odległość samonaprowadzania;

$V \cos(\nu - \kappa_a)$  – składowa prędkości pocisku rzutowana na linię obserwacji celu;

$V_c \cos(\nu - \kappa_{ac})$  – składowa prędkości celu rzutowana na linię obserwacji celu.

Rozwiązanie analityczne równania (2) jest możliwe w przypadku, kiedy  $\tau = 0$ . Wówczas równanie (2) ma postać:

$$D \ddot{\nu} + (B - 2)V_r \dot{\nu} = V_{c1} \dot{\kappa}_{ac} \quad (2a)$$

Rozwiązanie równania (2a), które zostało szczegółowo opisane w pracy [3], ma postać:

$$\dot{\nu} = \dot{\nu}_0 \left( \frac{D}{D_0} \right)^{B-2} + \frac{V_{c1} \dot{\kappa}_{ac}}{V_r (B-2)} \left( 1 - \left( \frac{D}{D_0} \right)^{B-2} \right) \quad (3)$$

Opisuje ono zmianę podstawowego parametru (charakteryzującego proces samonaprowadzania), jakim jest prędkość kątowna linii obserwacji celu  $\dot{\nu}$  w funkcji odległości  $D$ .

Po podstawieniu zależności (3) do wzoru (1a) otrzymujemy następującą zależność na bieżący uchyb pocisku:

$$h(t)_y = \dot{V}_0 \frac{D_0^2}{V_r} \left( \frac{D}{D_0} \right)^B + \frac{V_{c1} \dot{K}_{acc}}{B-2} \left( \frac{D^2}{V_r^2} - \frac{D_0^2}{V_r^2} \left( \frac{D}{D_0} \right)^B \right) \quad (4)$$

Będzie ona podstawą zaproponowania analitycznego sposobu wyznaczania gęstości prawdopodobieństwa uchybu końcowego pocisku, polegającego na wykorzystaniu funkcji charakterystycznej tej zmiennej.

Drugim parametrem wpływającym na wartość uchybu końcowego pocisku jest odległość wyłączenia sterowania (przerwania naprowadzania). Charakterystyczną cechą omawianego procesu naprowadzania jest to, że na końcowym odcinku tego procesu pocisk nie jest sterowany z powodu braku informacji o prędkości kątowej linii obserwacji celu wypracowywanej przez głowicę samonaprowadzania (ściślej przez jej układ pomiarowy nazywany koordynatorem celu). Spowodowane to jest wystąpieniem niepożądanych czynników destrukcyjnych uniemożliwiających wyznaczenie położenia celu przez koordynator celu lub przekroczenia przez prędkość kątową linii obserwacji celu maksymalnej prędkości śledzenia koordynatora nadążnego. Te działania destrukcyjne dotyczą przede wszystkim funkcjonowania samego koordynatora celu (jego układu lokacyjnego), przy niewielkich odległościach do celu. W przypadku optycznych koordynatorów celu wartość odległości, przy której koordynator celu nie wyznacza położenia celu, określana jest właściwościami zespołu składającego się z układu optycznego, analizatora zobrazowania celu (dysku modulacyjnego) i odbiornika promieniowania (detektora promieniowania). W przypadku gdy tzw. „plamka rozproszenia” odwzorowująca cel w płaszczyźnie obrazowej układu optycznego przekroczy rozmiary uniemożliwiające właściwe wypełnianie funkcji przez analizator zobrazowania celu, koordynator nie wyznaczy położenia celu – zachodzi zjawisko „zatykania się” układu odbiorczego koordynatora optycznego. Również zbyt duża moc energii promieniowania skupiona na powierzchni detektora promieniowania może spowodować jego uszkodzenie (a nawet zniszczenie).

W koordynatorach radiolokacyjnych wykorzystujących sygnały impulsowe występuje tzw. strefa martwa, spowodowana skończonym czasem trwania impulsów sondujących.

Omawiana odległość przerwania naprowadzenia (wyłączenia sterowania) jest zmienną losową, a wyznaczenie teoretyczne jej funkcji gęstości jest zadaniem bardzo trudnym. Dla konkretnego systemu samonaprowadzania można ją wyznaczyć poprzez przeprowadzenie badań statystycznych z wykorzystaniem jego modelu cyfrowego lub modelu cyfrowego z dołączonymi konkretnymi elementami systemu (np. głowicą samonaprowadzania lub jej układem pomiarowym – koordynatorem celu).

Z przeprowadzonych rozważań wynika wniosek, że dokładność naprowadzenia pocisku można scharakteryzować rozkładem jego przelotu względem celu, tj. uchybu końcowego. W związku z tym można przyjąć, że wartość oczekiwana i wariancja uchybu (przelotu) pocisku raketowego obliczone w chwili przerywania naprowadzania (wyłączenia sterowania) są podstawowymi charakterystykami odzwierciedlającymi jakość systemu samonaprowadzania. Mogą one być pomocne przy formułowaniu wymagań taktyczno-technicznych na sterowany pocisk raketowy i wyznaczaniu optymalnych wartości jego parametrów dla założonych warunków zastosowania bojowego.

Istotą proponowanego sposobu oceny jakości systemu samonaprowadzania jest wyznaczenie rozkładu uchybu bieżącego pocisku raketowego (realizującego samonaprowadzanie według proporcjonalnego zbliżania), którego opis deterministyczny podaje wzór (4), z zastosowaniem funkcji charakterystycznej tej zmiennej.

## 2. ZARYS METODY WYZNACZANIA ROZKŁADU UCHYBU Z ZASTOSOWANIEM FUNKCJI CHARAKTERYSTYCZNEJ

Równaniem wyjściowym do wyznaczenia funkcji charakterystycznej będzie wzór (4) na uchyb bieżący pocisku raketowego.

Wraz z upływem czasu naprowadzania uchyb bieżący pocisku raketowego będzie malał. W chwili początkowej (dla odległości  $D_0$ ) będzie wynosił:

$$h_{0,y} = \dot{v}_0 \frac{D_0^2}{V_r} \quad (5)$$

Wprowadźmy nową zmienną określoną następująco:

$$w(t) = h_{0,y} - h(t)_y$$

Zmienna ta opisuje o ile zmalał uchyb od wartości początkowej w wyniku procesu naprowadzania. W ogólnym przypadku proces malenia uchybu będzie procesem losowym, trwającym do chwili wyłączenia sterowania, tj. przerywania samonaprowadzania. Dla tego procesu, tożsamego z procesem wzrostu wartości  $w(t)$ , funkcja charakterystyczna przyjmie postać:

$$\varphi(\lambda, t) = E \left[ e^{i\lambda w(t)} \right] \quad (6)$$

Zmianę funkcji charakterystycznej w przedziale czasu o długości  $\Delta t$  można zapisać w postaci:

$$\varphi(\lambda, t + \Delta t) - \varphi(\lambda, t) = E \left[ e^{i\lambda w(t + \Delta t)} - e^{i\lambda w(t)} \right] = E \left\{ \left[ e^{i\lambda (w(t + \Delta t) - w(t))} - 1 \right] e^{i\lambda w(t)} \right\} \quad (7)$$

Można przyjąć (dla małych  $\Delta t$ ), że:

$$w(t + \Delta t) - w(t) = \dot{w}(t)\Delta t$$

$$\dot{w}(t) = \dot{v}_0 D_0 B \left( \frac{D}{D_0} \right)^{B-1} - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \left( D_0 B \left( \frac{D}{D_0} \right)^{B-1} - 2D \right)$$

Wtedy:

$$w(t + \Delta t) - w(t) = \dot{v}_0 D_0 B \Delta t \left( \frac{D}{D_0} \right)^{B-1} - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \Delta t \left( D_0 B \left( \frac{D}{D_0} \right)^{B-1} - 2D \right)$$

Korzystając z rozwinięcia, w szereg potęgowy, wyrażenia znajdującego się w nawiasie kwadratowym w zależności (7) zgodnie ze wzorem  $e^x - 1 \approx x + 0,5x^2$ , gdzie  $x = i\lambda(w(t + \Delta t) - w(t))$ , zależność (7) można przekształcić do postaci:

$$\varphi(\lambda, t + \Delta t) - \varphi(\lambda, t) = E \left\{ \left[ i\lambda a(t)\Delta t + \frac{(i\lambda)^2 c(t)}{2} \right] e^{i\lambda w(t)} \right\}$$

gdzie:

$$a(t) = \dot{v}_0 D_0 B \left( \frac{D}{D_0} \right)^{B-1} - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \left( D_0 B \left( \frac{D}{D_0} \right)^{B-1} - 2D \right)$$

$$c(t) = \dot{v}_0^2 D_0^2 B^2 \Delta t^2 \left( \frac{D}{D_0} \right)^{2B-2} - 2\dot{v}_0 D_0^2 \frac{B}{B-2} \Delta t^2 \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r} \left[ B \left( \frac{D}{D_0} \right)^{2B-2} - 2 \left( \frac{D}{D_0} \right)^B \right] +$$

$$+ \frac{V_{c1}^2 \dot{K}_{ac}^2}{V_r^2 (B-2)^2} \Delta t^2 \left[ D_0^2 B^2 \left( \frac{D}{D_0} \right)^{2B-2} - 4D_0^2 B \left( \frac{D}{D_0} \right)^B + 4D^2 \right]$$

Dzieląc przez  $\Delta t$ , otrzymujemy

$$\frac{\varphi(\lambda, t + \Delta t) - \varphi(\lambda, t)}{\Delta t} = E \left\{ \left[ i\lambda a(t) + \frac{(i\lambda)^2 c(t)}{2\Delta t} \right] e^{i\lambda w(t)} \right\}$$

Stąd przy  $\Delta t \rightarrow 0$  mamy

$$\frac{d\varphi(\lambda, t)}{dt} = \varphi(\lambda, t) \left\{ i\lambda A(t) - \frac{\lambda^2}{2} C(t) \right\} \quad (8)$$

gdzie:

$$A(t) = E \left[ \dot{\nu}_0 D_0 B \left( \frac{D}{D_0} \right)^{B-1} - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \left( D_0 B \left( \frac{D}{D_0} \right)^{B-1} - 2D \right) \right];$$

$$C(t) = E \left\{ \begin{aligned} & \left[ \dot{\nu}_0^2 D_0^2 B^2 \Delta t \left( \frac{D}{D_0} \right)^{2B-2} - 2\dot{\nu}_0 D_0^2 \frac{B}{B-2} \Delta t \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r} \left[ B \left( \frac{D}{D_0} \right)^{2B-2} - 2 \left( \frac{D}{D_0} \right)^B \right] + \right. \\ & \left. + \frac{V_{c1}^2 \dot{K}_{ac}^2}{V_r^2 (B-2)^2} \Delta t \left[ D_0^2 B^2 \left( \frac{D}{D_0} \right)^{2B-2} - 4D_0^2 B \left( \frac{D}{D_0} \right)^B + 4D^2 \right] \right] \end{aligned} \right\}$$

Z równania (8) otrzymujemy

$$\int \frac{\dot{\varphi}(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)} dt = \int \left[ i\lambda A(t) - \frac{\lambda^2}{2} C(t) \right] dt$$

$$\ln \varphi(\lambda, t) = \int \left[ i\lambda A(t) - \frac{\lambda^2}{2} C(t) \right] dt$$

$$\varphi(\lambda, t) = e^{\int \left[ i\lambda A(t) - \frac{\lambda^2}{2} C(t) \right] dt}$$

$$\varphi(\lambda, t) = e^{i\lambda \int A(t) dt - \frac{\lambda^2}{2} \int C(t) dt}$$

$$\varphi(\lambda, t) = e^{i\lambda m(t) - \frac{\lambda^2}{2} \sigma_t^2} \quad (9)$$

$$m(t) = \int A(t) dt \quad (10)$$

$$\sigma_t^2 = \int C(t) dt \quad (11)$$

gdzie:

$m(t)$  – wartość oczekiwana zmiennej losowej  $w(t)$ ;

$\sigma_t^2$  – wariancja zmiennej losowej  $w(t)$ .

Otrzymana postać funkcji charakterystycznej (9) jest postacią dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym. Wartości całek opisanych zależnościami (10) i (11), zgodnie z pracą [4] wynoszą odpowiednio:

$$m(t) = \frac{D_0^{2-B}}{V_r} \left[ \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} - \dot{\nu}_0 \right] E[D^B] - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r^2 (B-2)} E[D^2] + \dot{\nu}_0 \frac{D_0^2}{V_r} \quad (12)$$



$$\sigma_t^2 = -\frac{D_0^{4-2B} B^2}{V_r (2B-1)} \left( \dot{V}_0 - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \right)^2 E[D^{2B-1}] - \frac{4D_0^{2-B} V_{c1} \dot{K}_{ac} B}{V_r^2 (B+1)(B-2)} \left( \dot{V}_0 - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \right) E[D^{B+1}] +$$

$$-\frac{4V_{c1}^2 \dot{K}_{ac}^2}{3V_r^3 (B-2)^2} E[D^3] + \frac{D_0^3}{V_r} \frac{1}{2B-1} \left\{ \left[ \dot{V}_0 B - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r} \frac{B-1}{B+1} \right]^2 + \frac{4 \left( \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r} \right)^2 (2B-1)}{(B+1)^2} \right\}$$
(13)

Zależność (12) opisuje wartość średnią uchybu  $m(t)$ , o jaką nastąpiło zmniejszenie wartości średniej uchybu początkowego ( $m_0$ ) w wyniku procesu naprowadzania, zaś zależność (13) opisuje wartość wariancji uchybu  $\sigma_t^2$ , o jaką nastąpiło zmniejszenie wariancji początkowej ( $\sigma_0^2$ ) w wyniku procesu naprowadzania.

### 3. WYZNACZENIE PARAMETRÓW ROZKŁADU UCHYBU POCISKU RAKIETOWEGO W CHWILI PRZERWANIA PROCESU JEGO NAPROWADZANIA (WYŁĄCZENIA STEROWANIA)

Realizację tego zadania rozpoczniemy obliczeniem wartości  $m(t)$  i  $\sigma_t^2$  w chwili przerwania samonaprowadzania (wyłączenia sterowania), tj. dla  $t = t_w$ ; gdzie:  $t_w$  – czas przerwania samonaprowadzania (wyłączenia sterowania).

$$m(t) \Big|_{t=t_w} = m(t_w) = \frac{D_0^{2-B}}{V_r} \left[ \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{(B-2)V_r} - \dot{V}_0 \right] E[D_w^B] - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r^2 (B-2)} E[D_w^2] + \dot{V}_0 \frac{D_0^2}{V_r}$$
(14)

$$\sigma_t^2 \Big|_{t=t_w} = \sigma_{t_w}^2 = -\frac{D_0^{4-2B} B^2}{V_r (2B-1)} \left( \dot{V}_0 - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \right)^2 E[D_w^{2B-1}] +$$

$$-\frac{4D_0^{2-B} V_{c1} \dot{K}_{ac} B}{V_r^2 (B+1)(B-2)} \left( \dot{V}_0 - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \right) E[D_w^{B+1}] - \frac{4V_{c1}^2 \dot{K}_{ac}^2}{3V_r^3 (B-2)^2} E[D_w^3] +$$

$$+\frac{D_0^3}{V_r (2B-1)} \left\{ \left[ \dot{V}_0 B - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r} \frac{B-1}{B+1} \right]^2 + \frac{4V_{c1}^2 \dot{K}_{ac}^2 (2B-1)}{3V_r^2 (B+1)^2} \right\}$$
(15)

Do wyznaczenia wartości oczekiwanej uchybu samonaprowadzającego się na cel pocisku raketowego w chwili przerwania naprowadzania (wyłączenia sterowania) ( $m_w$ ) skorzystamy ze wzoru:

$$m_w = m_0 - m(t_w)$$
(16)

gdzie:

$m_0$  – wartość oczekiwana uchybu bieżącego pocisku dla początku samonaprowadzania (zakończenia procesu celowania) – początkowa wartość oczekiwana uchybu;

$m(t)_{t=t_w} = m(t_w)$  – wartość oczekiwana, o jaką nastąpiło zmniejszenie początkowej wartości oczekiwanej uchybu do chwili przerwania samonaprowadzania.

Do wyznaczenia wariancji uchybu pocisku w chwili przerwania naprowadzania (wyłączenia sterowania)  $\sigma_w^2$  skorzystamy ze wzoru:

$$\sigma_w^2 = \sigma_0^2 - \sigma_{t_w}^2 \quad (17)$$

gdzie:

$\sigma_0^2$  – wariancja początkowa uchybu pocisku (dla początku samonaprowadzania);

$\sigma_{t_w}^2$  – wariancja, o jaką nastąpiło zmniejszenie wariancji początkowej uchybu pocisku w czasie od początku samonaprowadzania do chwili jego przerwania.

Opierając się na przeprowadzonych rozważaniach, można stwierdzić, że rozkład uchybu końcowego  $h_w$  jest rozkładem normalnym:

$$f(h_w) = \frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(h_w - m_w)^2}{2\sigma_w^2}} \quad (18)$$

gdzie:

$m_w$  – wartość oczekiwana uchybu dla chwili przerwania naprowadzania;

$\sigma_w^2$  – wariancja uchybu dla chwili przerwania naprowadzania.

Wykorzystując metodykę wyznaczania  $m_0$  i  $\sigma_0^2$  zaczerpniętą z pracy [3] oraz wzory (14) i (15), otrzymujemy następujące zależności na poszukiwane parametry rozkładu uchybu końcowego pocisku raketowego:

$$m_w = \frac{D_0^{2-B}}{V_r} \left[ \dot{v}_0 - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \right] E[D_w^B] + \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r^2 (B-2)} E[D_w^2] \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 = & \frac{D_0^{4-2B} B^2}{V_r (2B-1)} \left( \dot{v}_0 - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \right)^2 E[D_w^{2B-1}] + \frac{4D_0^{2-B} V_{c1} \dot{K}_{ac} B}{V_r^2 (B+1)(B-2)} \left( \dot{v}_0 - \frac{V_{c1} \dot{K}_{ac}}{V_r (B-2)} \right) E[D_w^{B+1}] + \\ & + \frac{4V_{c1}^2 \dot{K}_{ac}^2}{3V_r^3 (B-2)^2} E[D_w^3] \end{aligned} \quad (20)$$

#### 4. PRZYKŁAD LICZBOWY

Praktyczne wykorzystanie przedstawionej metody do oceny jakości systemu samonaprowadzania lotniczego pocisku raketowego (a także skuteczności strzelania) ilustruje poniższy przykład.

Przyjęto:

- uogólniony współczynnik wzmocnienia systemu samonaprowadzania  $B = 3$ ,
- rozkład normalny  $N(m_D, \sigma_D)$  zmiennej losowej  $D_w$  odległości przerwania naprowadzania pocisku raketowego (wyłączenia sterowania), zatem funkcja gęstości odległości przerwania naprowadzania (wyłączenia sterowania) ma postać:

$$f(D_w) = \frac{1}{\sigma_D \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(D_w - m_D)^2}{2\sigma_D^2}}$$

Wartości oczekiwane:

$$E[D_w] = m_D; \quad E[D_w^2] = m_D^2 + \sigma_D^2; \quad E[D_w^B] = E[D_w^3] = m_D^3 + 3\sigma_D^2 m_D;$$

$$E[D_w^{B+1}] = E[D_w^4] = m_D^4 + 6\sigma_D^2 m_D^2 + 3\sigma_D^4;$$

$$E[D_w^{2B-1}] = E[D_w^5] = m_D^5 + 10\sigma_D^2 m_D^3 + 15\sigma_D^4 m_D.$$

$$m_w = \frac{1}{D_0 V_r} \left[ \dot{v}_0 - \frac{V_{c1} \dot{\kappa}_{ac}}{V_r} \right] \left[ m_D^3 + 3\sigma_D^2 m_D \right] + \frac{V_{c1} \dot{\kappa}_{ac}}{V_r^2} \left[ m_D^2 + \sigma_D^2 \right]$$

$$\sigma_w^2 = \frac{9}{5D_0^2 V_r} \left( \dot{v}_0 - \frac{V_{c1} \dot{\kappa}_{ac}}{V_r} \right)^2 \left[ m_D^5 + 10\sigma_D^2 m_D^3 + 15\sigma_D^4 m_D \right] +$$

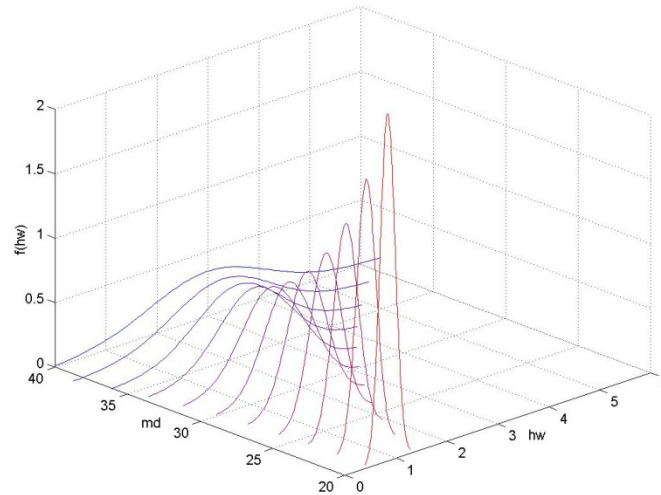
$$+ \frac{3V_{c1} \dot{\kappa}_{ac}}{D_0 V_r^2} \left( \dot{v}_0 - \frac{V_{c1} \dot{\kappa}_{ac}}{V_r} \right) \left[ m_D^4 + 6\sigma_D^2 m_D^2 + 3\sigma_D^4 \right] + \frac{4V_{c1}^2 \dot{\kappa}_{ac}^2}{3V_r^3} \left[ m_D^3 + 3\sigma_D^2 m_D \right]$$

Założone wielkości:

$$D_0 = 12\,000 [m]; \quad V_r = 150 [m/s]; \quad \dot{v}_0 = 0,27 [rad/s]; \quad V_{c1} = 160 [m/s];$$

$$\dot{\kappa}_{ac} = 0,253 [rad/s]; \quad \sigma_D = 8 [m].$$

Na rysunku 1 przedstawiono funkcje gęstości uchybu końcowego  $h_w = hw$ , tj.  $f(hw)$  w zależności od założonej wartości oczekiwanej odległości wyłączenia sterowania  $m_D = md$ .



Rys. 1. Wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $f(hw)$  (uchybu końcowego) dla różnych wartości  $md$  (wartości oczekiwanej odległości wyłączenia sterowania)

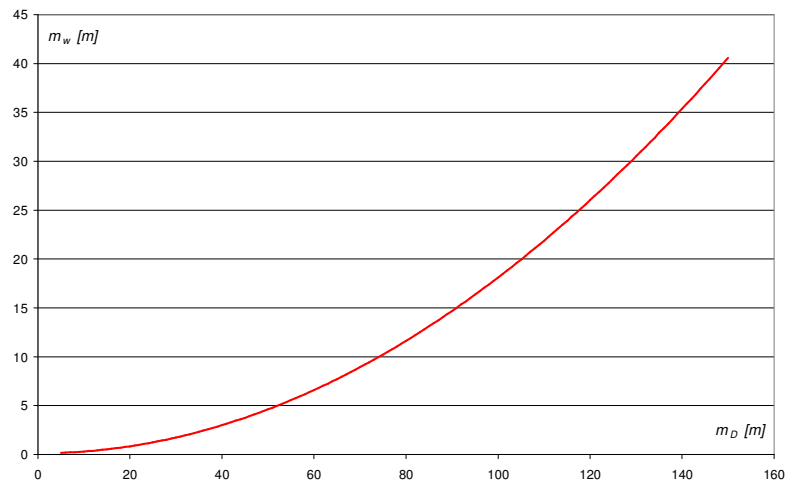
Fig. 1. Plots of the probability density function  $f(hw)$  (miss distance) for different values of  $md$  (expected value of control shut off distance)

Rysunek 1 przedstawia wybraną część wyników obliczeń. Widać wyraźnie zmniejszanie się wariancji i wartości oczekiwanej rozkładu uchybu końcowego wraz ze zmniejszaniem się wartości oczekiwanej odległości wyłączenia sterowania. Obliczenia przeprowadzono dla  $m_D \in \langle 5, 150 \rangle$ . Na rysunku 2 pokazano zmianę wartości oczekiwanej uchybu końcowego  $m_w$  w funkcji wartości oczekiwanej odległości wyłączenia sterowania  $m_D$ . Widać wyraźnie, że wraz ze zmniejszaniem się odległości wyłączenia sterowania maleje również uchyb końcowy.

Na podstawie uchybu końcowego można określić prawdopodobieństwo zniszczenia celu. W najprostszym przypadku można założyć, że cel zostanie zniszczony, jeżeli pocisk trafi w pewien określony obszar wokół celu. Wtedy prawdopodobieństwo zniszczenia celu  $P$  będzie równe prawdopodobieństwu tego, że uchyb końcowy będzie mniejszy od pewnej założonej wartości  $R$ . W prezentowanym przypadku założono  $R = 5$  [m].

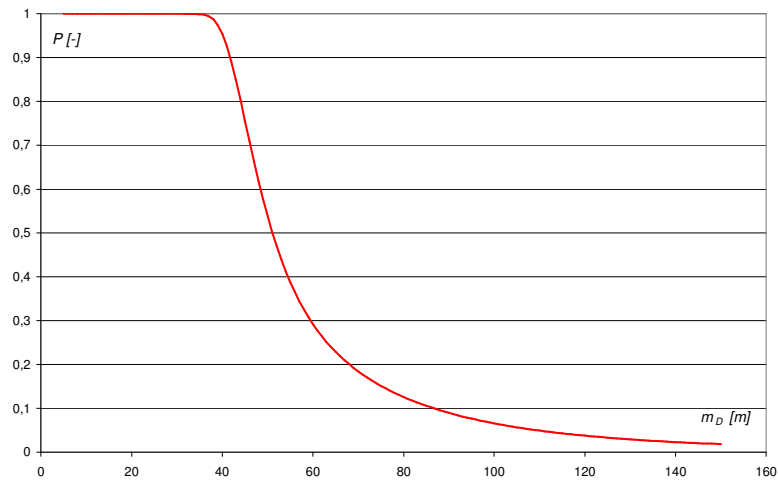
Na rysunku 3 przedstawiono zmianę prawdopodobieństwa zniszczenia celu  $P$  w zależności od wartości oczekiwanej odległości wyłączenia sterowania  $m_D$ . Obliczenia prowadzono dla kolejnych wartości  $m_D$ . W ich wyniku wyznaczono wartość graniczną  $m_{Dgr} = 34$  m (przy  $\sigma_D = 8$  m), dla której prawdopodobieństwo zniszczenia celu jest praktycznie równe jedności.

Należy przypomnieć, że prezentowane wyniki otrzymano dla konkretnego przypadku opisywanego przez założone dane.



Rys. 2. Zmiana wartości oczekiwanej uchybu końcowego ( $m_w$ ) w funkcji wartości oczekiwanej odległości wyłączenia sterowania ( $m_D$ )

Fig. 2. Expected value of miss distance ( $m_w$ ) as a function of expected value of control shut off distance ( $m_D$ )



Rys. 3. Prawdopodobieństwo zniszczenia celu

Fig. 3. The probability of destroying a target (kill probability)

## 5. WNIOSKI

Otrzymany rozkład uchybu końcowego pocisku raketowego przy zbliżaniu metodą proporcjonalnej nawigacji z zastosowaniem funkcji charakterystycznej, która spełnia równanie (4), okazał się rozkładem normalnym.

Do wyznaczenia parametrów tego rozkładu (wartości średniej i wariancji) należy znać następujące parametry charakteryzujące system samonaprowadzania i wielkości opisujące parametry atakowanego celu: uogólniony współczynnik wzmocnienia systemu ( $B$ ), względną prędkość pocisku ( $V_r$ ), odległość początkową samonaprowadzania ( $D_0$ ), prędkość kątową wektora prędkości celu ( $\dot{\kappa}_{ac}$ ) oraz funkcję gęstości zmiennej losowej  $D_w$  (odległości wyłączenia sterowania). Funkcję gęstości  $f(D_w)$  należy wyznaczyć dla konkretnego systemu samonaprowadzania. Znajomość funkcji gęstości uchybu końcowego pocisku  $f(h_w)$ , która odzwierciedla jakość jego systemu samonaprowadzania, pozwala dla przyjętej głowicy bojowej (której działania niszczące zwykle opisywane są tzw. warunkowym prawdopodobieństwem porażenia celu) wyznaczyć prawdopodobieństwo zniszczenia pojedynczego celu jednym pociskiem raketowym, tj. skuteczność danego pocisku [4].

## LITERATURA

- [1] Krineckij Ja.I. 1970. *Sistemy samonawedienija*. Moskwa: Maszinstroeniye.
- [2] Kuzniecowa A.A. 1986. *Optimizacja parametrow balistycznych rakiet po efektywnosti*. Moskwa: Maszinstroeniye.
- [3] Skomra Andrzej, Sławomir Stępień, Henryk Tomaszek. 2005. „Zarys metody określania niezawodności wybranych systemów kierowania rakiet lotniczych”. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn. Zeszyt 2(142)* : 31-46.
- [4] Skomra Andrzej. 2005. *Skuteczność lotniczych rakiet samonaprowadzających się na cel*. Warszawa: Wydawnictwo WAT.

## **Outline of the Method of an Aircraft Missile Homing System's Quality Estimation**

Andrzej SKOMRA

**Abstract.** Quality of the missile homing system can be determined by the homing accuracy in stochastic way through determination of the expected value and variance of the final miss distance. The paper presents description of a method of distribution of current miss distance between the missile and the target using a random variable's characteristic function. With a view to obtain an expression of miss distance, the author uses a formula describing angular velocity of the line of sight which was the solution of linearized simultaneous equations describing kinematic connections between missile and target together with proportional navigation guidance law.

**Keywords:** mechanics, accuracy, homing guidance, miss distance

