

# Wykrywanie uszkodzeń w konstrukcjach inżynierskich przy zastosowaniu metody dyskretnej transformacji falkowej

Dr inż. Anna Knitter-Piątkowska, dr hab. inż. Michał Guminiak,  
Instytut Analizy Konstrukcji Politechniki Poznańskiej

## 1. Wprowadzenie

Prezentowana praca poświęcona jest lokalizacji uszkodzeń w konstrukcjach inżynierskich i stanowi przegląd wybranych wcześniejszych prac badawczych autorów. Zagadnieniem tym zajmowało się wielu autorów, którzy przedstawili koncepcje tzw. badań nieniszczących, służących do lokalizacji uszkodzonego fragmentu konstrukcji. Mróz i Garstecki [1] zaproponowali przyjęcie warunku optymalnego obciążenia jako narzędzia służącego do identyfikacji konstrukcji. Dems i Mróz [2] opisali lokalizację uszkodzeń w belkach i płytach poprzez wprowadzenie parametru zależnego od zmian częstotliwości drgań konstrukcji. Wang i Deng [3] oraz Kim i Melhem [4] zaproponowali transformację falkową jako efektywne narzędzie służące detekcji uszkodzeń. Knitter-Piątkowska [5] przedstawiła w sposób kompleksowy zagadnienie wykrywania uszkodzeń w konstrukcjach inżynierskich (belkach i płytach) przy wykorzystaniu tzw. dyskretnej transformacji falkowej. Tematyka ta była podejmowana w dalszych badaniach i przedstawiona m.in. w pracach [6–8]. Zgodnie z założeniem metody uszkodzenie konstrukcji wywołuje określone zaburzenie w rejestrowanym sygnale, np. ugięciach. Zaburzenie to jest małe i dopiero zastosowanie obróbki za pomocą analizy falkowej pozwala zlokalizować miejsce uszkodzenia. Zaletą przedstawionej procedury jest wyłącznie analiza sygnału odpowiedzi konstrukcji rzeczywistej, czyli takiej, w której mogą występować uszkodzenia jej elementów.

## 2. Dyskretna transformacja falkowa – podstawy teoretyczne

Poniżej zostaną przedstawione podstawowe założenia dla dyskretnej transformacji falkowej (ang. *Discrete Wavelet Transform*) dla analizy sygnału jedno- i dwuwymiarowego. Niech funkcja, zwana funkcją falkową (falką matką) będzie ciągła w dziedzinie funkcji całkowalnych z kwadratem  $L^2(\mathbb{R})$ . Dodatkowo funkcja musi spełniać warunek dopuszczalności [5]. Funkcja matka może przyjmować wartości rzeczywiste lub zespolone. W rozważanych przypadkach zostaną zastosowane rodziny funkcji falkowych o wartościach rzeczywistych. Do dekompozycji sygnału potrzebny jest zestaw falek (rodzina falek). Zestaw tych funkcji uzyskuje się przez

przesunięcie (translację) i skalowanie funkcji  $\psi$ , co można zapisać za pomocą relacji:

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \times \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1)$$

gdzie:

$t$  oznacza współrzędną czasową lub przestrzenną,  $a$  jest parametrem skali oraz  $b$  parametrem przesunięcia (translacji). Parametry  $a$  i  $b$  przyjmują wartości rzeczywiste i dodatkowo  $a \neq 0$ . Element  $|a|^{-1/2}$  jest czynnikiem skali, czyli współczynnikiem normalizującym, który zapewnia stałą wartość energii falki, niezależną od skali, czyli  $\|\psi_{a,b}\| = \|\psi\| = 1$  [5]. W prezentowanym podejściu wiodącą rolę odgrywa diadyczna dyskretna transformacja falkowa. Rodzinę falek możemy wówczas otrzymać po podstawieniu wielkości  $a = 1/2^j$  oraz  $b = k/2^j$  do wzoru (1), co prowadzi do następującej relacji:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{(j/2)} \times \psi(2^j \times t - k) \quad (2)$$

gdzie:

$k$  oraz  $j$  są współczynnikami skali i przesunięcia. Interpretację graficzną tych parametrów dla najprostszej rodziny falek Haara zamieszczono np. w pracy [5].

Dyskretną transformację falkową sygnału opisuje następująca zależność:

$$Wf(j, k) = 2^{j/2} \times \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times \psi(2^j \times t - k) \times dt = \langle f(t), \psi_{j,k} \rangle \quad (3)$$

gdzie:

$f(t)$  jest transformowanym sygnałem odpowiedzi konstrukcji. Iloczyn skalarny sygnału  $f(t)$  i funkcji falkowej  $\psi$  pozwala obliczyć współczynniki falkowe  $d_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k} \rangle$ , jak również przedstawienie sygnału w postaci dyskretnej, która jest kombinacją liniową funkcji falkowych  $\psi_{j,k}$  i współczynników falkowych  $d_{j,k}$ :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_k d_{j,k} \times \psi_{j,k}(t) \quad (4)$$

przy czym liczba danych musi być równa  $2^J$ .

W celu przedstawienia wielorozdzielczej analizy falkowej konieczne jest wprowadzenie falki skalującej  $\varphi(t)$ , tzw. falki ojca:

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \times \varphi(2^j \times t - k) \quad (5)$$

Funkcja skalująca  $\varphi_{j,k}$  musi mieć jednostkowe pole:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1 \quad (6)$$

oraz spełniać warunek ortogonalności [5, 8].

Funkcję  $f(t)$  rozwija się w szereg przy wykorzystaniu odpowiednio funkcji: bazowej  $\psi(t)$  oraz skalującej  $\varphi(t)$  [4, 7]:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j,k} \times \varphi_{j,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\varphi=1}^{\infty} d_{j,k} \times \psi_{j,k}(t) \quad (7)$$

gdzie:

$a_{j,k}$  są współczynnikami falki skalującej wyznaczanymi za pomocą zależności:

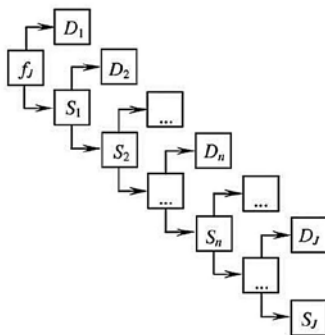
$$a_{j,k} = \langle f(t), \varphi_{j,k} \rangle \quad (8)$$

Falka  $\psi(t)$  ma charakter pasmowo-przepustowy, to znaczy, że współczynniki  $d_{j,k}$  zawierają informację o większych częstotliwościach, czyli informację szczegółową, a współczynniki  $a_{j,k}$  zawierają informację ogólną (dolnoprzepustową). Jednowymiarową analizę wielorozdzielczą sygnału dyskretnego opisuje algorytm Mallata [8], [9]:

$$f_j = S_j + D_j + \dots + D_n + \dots + D_j, \quad n = J - j \quad (9)$$

gdzie:

$S_j$  jest tzw. gładką aproksymacją sygnału, a każdy składnik w reprezentacji sygnału jest powiązany z określonym zakresem częstotliwości i dostarcza informacji na poziomie skali ( $j = 1, \dots, J$ ). Parametr dyskretny  $J$  opisuje poziom analizy wielorozdzielczej (ang. *multi-resolution analysis*),  $D_n$  i  $S_n$  są odpowiednio detalami i częściami zgrubnymi sygnału na jego  $n$ -tym poziomie dekompozycji. Aby spełnić wymagania diadyczne transformacji falkowej, funkcja  $f_j$  powinna być aproksymowana liczbą  $N = 2^j$  wielkości dyskretnych. Algorytm Mallata przedstawia rysunek 1 [8].



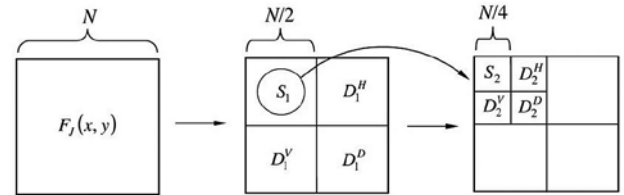
**Rys. 1.** Jednowymiarowa analiza wielorozdzielcza sygnału odpowiedzi konstrukcji [8]

Dla dwuwymiarowej analizy wielorozdzielczej sygnału odpowiedzi konstrukcji algorytm Mallata ma postać [8, 9]:

$$F(x, y) = S_j(x, y) + \sum_{\varphi=1}^{\beta} D_j^V(x, y) + \sum_{\varphi=1}^{\beta} D_j^H(x, y) + \sum_{\varphi=1}^{\beta} D_j^D(x, y) \quad (10)$$

gdzie:

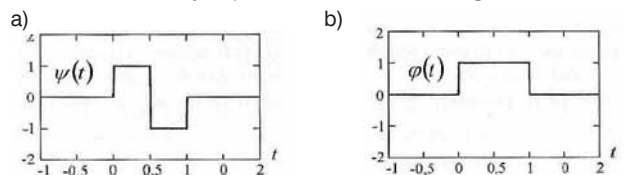
$S_j(x, y)$  jest tzw. gładką reprezentacją sygnału,  $D_j^V(x, y)$ ,  $D_j^H(x, y)$  są kolejno częściami szczegółowymi (detalicznymi), a  $D_j^D(x, y)$  jest częścią zgrubną sygnału odpowiedzi konstrukcji. Schemat dwuwymiarowej analizy wielorozdzielczej zgodnie z algorytmem Mallata [8, 9] przedstawia rysunek 2.



**Rys. 2.** Dwuwymiarowa analiza wielorozdzielcza sygnału odpowiedzi konstrukcji [8]

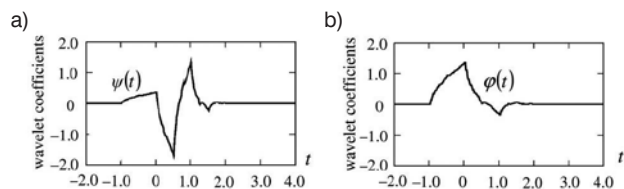
### 3. Podstawowe rodziny funkcji falkowych

Historycznie, pierwszą funkcję falkową zaproponował Alfred Haar w 1910 roku. Falka Haara przyjmuje w swojej dziedzinie wielkości stałe, odcinkami proste (nie ma ciągłych pochodnych), która wraz z funkcją skalującą spełnia warunki ortogonalności, a także jako jedyna falka ma oś antysymetrii. Falka Haara ma tzw. nośnik zwarty, co oznacza, że znika ona na zewnątrz przedziału skończonego.

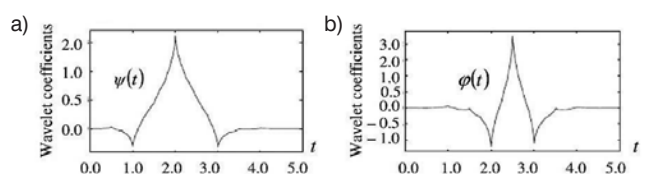


**Rys. 3.** Falka Haara: funkcja podstawowa – matka (a) oraz funkcja skalująca – ojciec (b) [5]

Innym rodzajem falki jest funkcja zaproponowana przez Ingrid Daubechies [10]. Funkcje należące do rodziny tych falek są ciągłe oraz spełniają warunki ortogonalności.



**Rys. 4.** Falka Daubechies 4: funkcja podstawowa – matka (a) oraz funkcja skalująca – ojciec (b) [8]

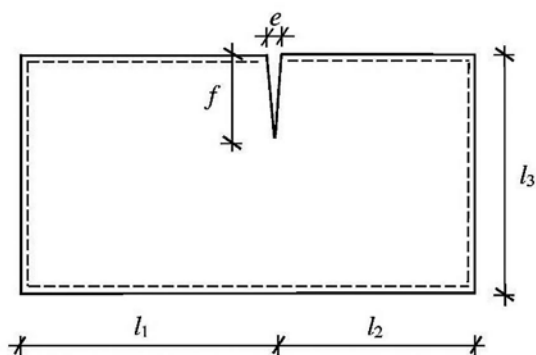


**Rys. 5.** Falka Coiflet 6: funkcja podstawowa – matka (a) oraz funkcja skalująca – ojciec (b) [8]

W przedstawionych dalej zadaniach zastosowane zostaną zbiory falek typu Daubechies oraz Coiflet. Te rodziny falek są funkcjami ciągłymi, spełniającymi warunki ortogonalności.

#### 4. Modelowanie konstrukcji i jej uszkodzeń

Analizowane będą prostokątne płyty cienkie (Kirchhoffa). Zadanie zginania płyty rozwiązywane jest za pomocą metody elementów brzegowych (MEB) w ujęciu zmodyfikowanych całkowitych równań brzegowych [11]. Uszkodzenia konstrukcji wprowadzane są za pomocą dodatkowych krawędzi tworzących szczeliny w obszarze płyty (rys. 6).



**Rys. 6.** Modelowanie uszkodzeń w konstrukcji – płyta z uszkodzoną krawędzią [8]

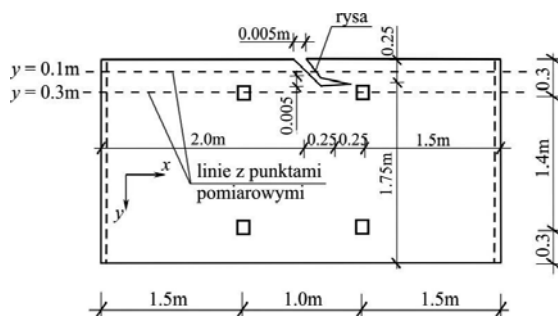
Badania eksperymentalne obarczone są zawsze pewną niedokładnością pomiarową. W celu przybliżenia eksperymentu numerycznego maksymalnie do eksperymentu rzeczywistego analizowany będzie również sygnał odpowiedzi konstrukcji z uwzględnieniem występowania błędów pomiarowych. Dlatego czysty sygnał odpowiedzi zostanie połączony z sygnałem w postaci losowo generowanego tzw. białego szumu o rozkładzie jednostajnym [5, 8].

#### 5. Przykłady liczbowe

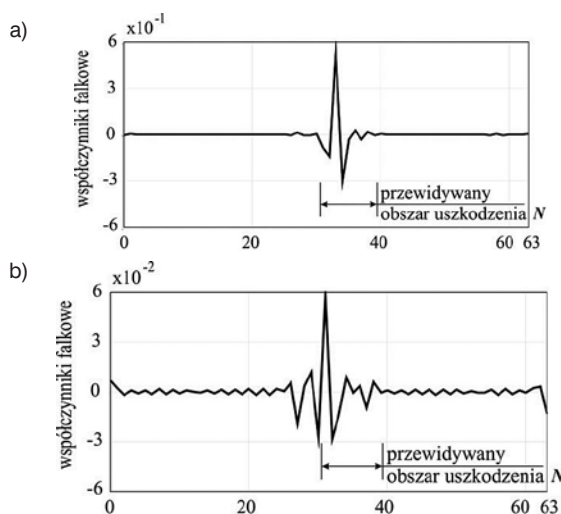
Rozważane będą płyty prostokątne, z uszkodzeniami, podparte wzdłuż swojego obwodu, punktowo na krawędzi oraz spoczywające na wewnętrznych podporach słupowych. Płyty poddane będą obciążeniu statycznemu oraz dynamicznemu. Zadanie zginania płyty cienkiej (Kirchhoffa) rozwiązywane jest przy zastosowaniu metody elementów brzegowych (MEB) [11].

##### 5.1. Jednowymiarowa transformacja falkowa na przykładzie zadania dynamiki płyty

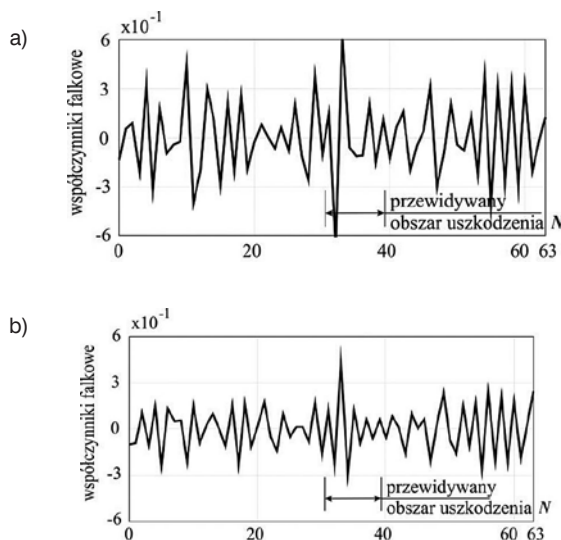
Rozważana jest płyta prostokątna, swobodnie podparta na krótszych krawędziach i spoczywająca na czterech podporach słupowych, z uszkodzoną jedną krawędzią (rys. 7). Liczba elementów brzegowych na każdym boku płyty jest równa 15. W celu wykrycia uszkodzenia zostanie zastosowana



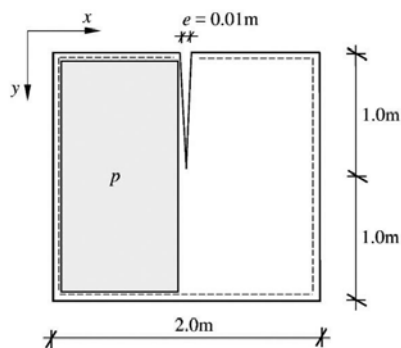
**Rys. 7.** Płyta prostokątna swobodnie podparta na krótszych krawędziach i spoczywająca na czterech podporach słupowych [8]



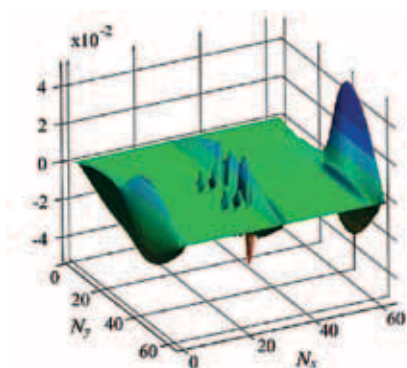
**Rys. 8.** Sygnał: amplituda przemieszczeń zgodna z a) trzecią,  $y = 0,1$  m oraz b) czwartą,  $y = 0,3$  m postacią drgań własnych; falka Daubechies 4, detal 1, liczba pomiarów  $N = 64$  [8]



**Rys. 9.** Sygnał: amplituda przemieszczeń zgodna z trzecią postacią drgań własnych,  $y = 0,1$  m, a) falka Daubechies 8 poziom białego szumu 30%, b) falka Daubechies 4, poziom białego szumu 20%, liczba pomiarów  $N = 64$ , detal 1 [8]



**Rys. 10.** Płyta kwadratowa z uszkodzoną krawędzią, poddana obciążeniu  $p$  rozłożonemu równomiernie, działającemu na części jej powierzchni [8]



**Rys. 11.** Sygnał: ugięcie; falka Coiflet 4, detal 1; liczba pomiarów  $N_x = N_y = 64$  [8]

jednowymiarowa transformacja falkowa sygnału odpowiedzi płyty, jakim będzie amplituda przemieszczeń określona w 64 punktach pomiarowych położonych wzdłuż zaznaczonych linii  $y = 0,1$  m oraz  $y = 0,3$  m otrzymana zgodnie drugą, trzecią oraz czwartą postacią drgań własnych.

Obecność uszkodzenia konstrukcji można zaobserwować w postaci silnych pików na rysunkach 8 i 9, przy czym w pierwszym przypadku (rys. 8) transformacji poddano czysty sygnał odpowiedzi konstrukcji, a w drugim (rys. 9) sygnał odpowiedzi uzupełniony o biały szum.

W przypadku sygnału odpowiedzi konstrukcji rejestrowanej wzdłuż linii o odległości  $y = 0,3$  m od krawędzi płyty szerokość obszaru zaburzeń jest większa (rys. 8b) w porównaniu z wynikami otrzymanymi dla pomiarów wykonanych w odległości  $y = 0,1$  m (rys. 8a) i odpowiada długości pęknięcia. Wprowadzenie białego szumu nie spowodowało osłabienia informacji o uszkodzeniu.

## 5.2. Dwuwymiarowa transformacja falkowa na przykładzie zadania statyki płyty

Rozważana jest płyta kwadratowa, podparta swobodnie na krawędzi, z jedną krawędzią uszkodzoną (rys. 10). Na płytę działa obciążenie  $p = 5$  kN/m<sup>2</sup> równomiernie rozłożone na części jej obszaru. Stałe materiałowe płyty wynoszą  $E = 30,0$  GPa,  $\nu = 0,16$ , a grubość  $h = 0,1$  m.

Liczba elementów brzegowych na każdej z krawędzi płyty jest równa 15. Sygnałem odpowiedzi konstrukcji jest ugięcie określone wewnątrz obszaru płyty. Liczba pomiarów w dwóch prostopadłych kierunkach  $N_x = N_y = 64$ . Wyniki obliczeń dla falki typu Coiflet 4 przedstawiono na rysunku 11.

## 6. Podsumowanie

W artykule omówiono zastosowanie jedno- i dwuwymiarowej dyskretnej transformacji falkowej do lokalizacji uszkodzeń w płytach. Zginanie płyty cienkiej (Kirchhoffa) opisano za pomocą całkowych równań brzegowych i rozwiązano przy zastosowaniu metody elementów brzegowych, dzięki czemu uzyskano sygnały odpowiedzi konstrukcji, które zastąpiły dane eksperymentalne. Wszystkie uszkodzenia wprowadzono za pomocą dodatkowych krawędzi tworzących szczeliny w stosunku do podstawowego obszaru płyty. Analizowano sygnały odpowiedzi w postaci drgań i powierzchni ugięcia statycznego płyt dla odpowiednio jedno- i dwuwymiarowej dyskretnej transformacji falkowej. W celu urealnienia wartości sygnału odpowiedzi konstrukcji wprowadzono i uwzględniono w wybranych przykładach sygnał zakłócający w postaci białego szumu. Przyjęto minimalną liczbę 64 oraz 64×64 pomiarów dla odpowiednio jedno- i dwuwymiarowej dyskretnej analizy falkowej. Uszkodzenia płyt zostały poprawnie zlokalizowane przy zastosowaniu asymetrycznego zestawu falek typu Daubechies 4 i 8, a także prawie symetrycznego zestawu falek typu Coiflet 4.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Mróz Z., Garstecki A., Optimal loading conditions in design and identification of structures. Part 1: Discrete formulation, *International Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization* 29/2005, str. 11–18
- [2] Dems K., Mróz Z., Identification of damage in beam and plate structures using parameter dependent frequency changes, *Engineering Computation* 18, 1/2, 2001, str. 96–120
- [3] Wang Q., Deng X., Damage detection with spatial wavelets, *Journal of Solids and Structures* 36/1999, str. 3443–3468
- [4] Kim H., Melhem H., Damage detection in structures by wavelet analysis, *Engineering Structures* 26/2004, str. 347–362
- [5] Knitter-Piątkowska A., Wykorzystanie transformacji falkowej do wykrywania uszkodzeń w konstrukcjach obciążonych statycznie i dynamicznie, Rozprawa doktorska, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2011
- [6] Knitter-Piątkowska A., Guminiak M., Hloupis G., Crack identification in plates using 1-D discrete wavelet transform, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 55, 2, 2017, str. 481–496
- [7] Guminiak M., Knitter-Piątkowska A., Selected problems of damage detection in internally supported plates using one-dimensional Discrete Wavelet Transform, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 56, 2, 2018, str. 631–644
- [8] Knitter-Piątkowska A., Guminiak M., Application of 1-D and 2-D Discrete Wavelet Transform to Crack Identification in Statically and Dynamically Loaded Plates, *Engineering Transactions* 68, 2, 2020, str. 137–157
- [9] Mallat S. G., A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11, 7, 1989, str. 674–693
- [10] Daubechies I., Ten lectures on wavelets, Society for Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia, 1992
- [11] Guminiak M., Metoda elementów brzegowych w analizie płyt, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2016