

ANALIZA DYNAMICZNA GRUNTU MODELOWANEGO MES, OBCIĄŻONEGO POCIĄGIEM SZYBKOBIEŻNYM

Bogumił Wrana

Dr hab. inż. prof. PK, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska, wrana@limba.wil.pk.edu.pl

Streszczenie. *Artykuł podejmuje zagadnienie modelowania komputerowego obliczeń przenoszenia drgań w gruncie wywołanych przejazdem pociągu o dużych prędkości. Przedstawiono model, który obejmuje stopnie swobody poruszającego się pojazdu szynowego. Następnie przedstawiono sposoby modelowania warunków brzegowych na sztucznym brzegu obliczeniowym, który symuluje nieograniczony obszar gruntu. Podano macierzowy układ równań ruchu obejmujący obszar gruntu, tor i pociąg, który opisano nieliniowym układem równań, uwzględniającym lokalne uplastycznienie w gruncie w czasie przenoszenia drgań.*

Słowa kluczowe: *dynamika gruntu, dynamika pociągu, równanie ruchu, modelowanie obszaru nieograniczonego gruntu.*

1. Wstęp

Dynamika układu grunt-tor-pociąg ruchomy należy do złożonego problemu dynamiki konstrukcji. Jest to konstrukcja o szybkozmiennym położeniu obciążenia wzbudzanego siłami okresowo zmiennymi. Przy dużej prędkości pociągu drgania układu są przestrzenne ze względu na wężykowanie i uderzenia boczne zestawów kołowych pojazdów szynowych.

Prace w dziedzinie dynamiki konstrukcji inżynierskich pod obciążeniem ruchomym można podzielić na dwa główne kierunki. Pierwszy kierunek to prace teoretyczne od roku 1850 poświęcone rozwiązywaniu zadań podstawowych metodami analitycznymi, ścisłymi i przybliżonymi drgań belki Eulera lub Timoshenki na podłożu lub na belce mostowej obciążonej siłami skupionymi ruchomymi masowymi. W większości prac stosowano metodę Galerkina. Do najważniejszych prac w tym zakresie można zaliczyć prace Kączkowskiego (1963,1967), Filipowa (1974), Matsuura (1979), Śniady (1976), Fryba (1999), Bogacza i Czyczyły (2008). Drugi kierunek to rozwiązywanie zadań macierzowego równania ruchu przy pomocy metod komputerowych. Do najważniejszych prac początkowych należy zaliczyć prace Langer (1982) i jego współpracowników, Bryja (1984) i Klasztorny (2005) w rozwiązywaniu modeli mostów prętowych z obciążeniem ruchomym oraz prace Szcześniaka (1994) w rozwiązywaniu płyt z obciążeniem ruchomym.

Ważną pozycją z zakresu rozwiązywania problemów rozchodzenia się fal w gruncie jako ośrodka wielofazowego jest monografia naukowa Wrany (2012).

1.1. Modelowanie układu grunt-tor-pociąg

Do wykonania obliczeń dynamicznych gruntu pod obciążeniem ruchomym wymagana jest znajomość geometrii układu grunt-tor-pociąg ruchomy oraz charakterystyki obciążenia dynamicznego:

- określenie wymiarów geometrycznych konstrukcji toru, podkładów kolejowych, warstw pod podkładami oraz warstw gruntu rodzimego,
- określenie parametrów fizycznych, mechanicznych i tłumienia warstw gruntu oraz podkładu i toru kolejowego,
- określenie modelu samego pociągu (liczby mas skupionych, połączeń sprężystych i elementów tłumiących),
- określenie zmian konfiguracji pociągu w czasie.

Obliczenia w ujęciu metody elementów skończonych wymagają by dodatkowo określić:

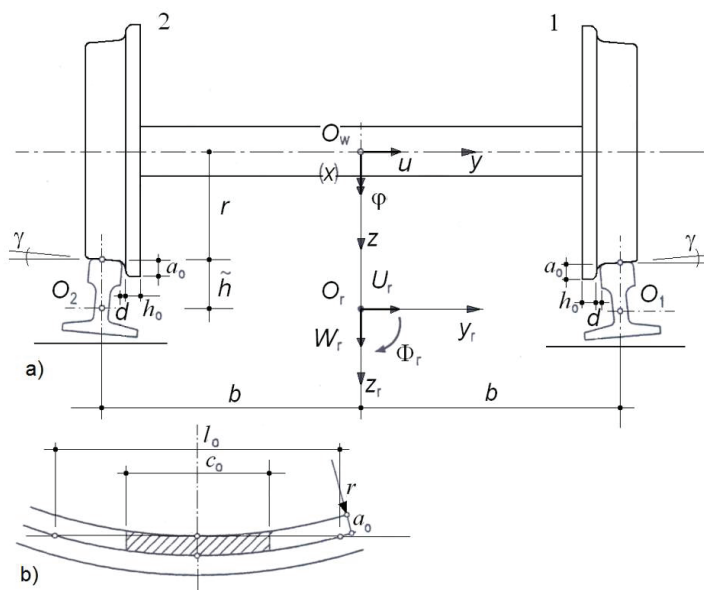
- siatkę MES obszaru gruntu,
- siatkę MES obszaru podtorza kolejowego,
- ustalenie siatki węzłów MES, po której porusza się pojazd szynowy,
- dobranie elementów brzegowych, które będą wygaszały rozchodzące się fale w półprzestrzeni gruntu.

2. Obciążenie ruchome pojazdem szynowym

2.1. Przybliżona teoria mikroślizgów

Wężykowanie ruchomych pojazdów kołowych to naturalna cecha, która można opisać za pomocą teorii mikroślizgów de Patera (1982), Klasztorny (2005). Założenia teorii:

- zestaw kołowy jest ciałem sztywnym,
- powierzchnia toczna kół jest stożkowa i zgodna z nachyleniem powierzchni bocznych szyn pod kątem γ (por. rys. 1),
- współczynnik sił tarcia koło-szyzna jest stały zgodny z modelem Coulomba,
- nie występuje odrywanie się kół od szyn w kierunku pionowym,
- tor jest bezstykowy,
- tor w stanie nieobciążonym jest prostoliniowy o stałym rozstawie,
- prędkość eksploatacyjna pociągu v jest stała.



Rys. 1. Zestaw kołowy pojazdu szynowego, a) położenie sił w centralnym położeniu względem toru, b) zakrzywienie lokalne toru

Zgodnie z teorią mikropoślizgów de Patera, ruchomy zestaw kołowy definiowany jest przez dwa stopnie swobody (rys. 1) w środku masy O_w zestawu kołowego: $u(t)$ – przemieszczenie poziome prostopadle do kierunku osi toru, $\varphi(t)$ – kąt wężykowania.

Poślizg boczny określony jest wzorem:

$$\tilde{u}(t) = u(t) - U(t) - \Phi_x(t)(r + \tilde{h}), \quad (1)$$

gdzie:

$U(t)$ – przemieszczenie poziome toru,

$\Phi_x(t)$ – kąt obrotu toru,

r – promień centralnego okręgu toczonego,

\tilde{h} – odległość osi toru od powierzchni koła (rys. 1).

Przemieszczenia u_x, u_y , oraz obrót φ wywołują poślizg wzdłużny i boczny z siłą tarcia poślizgowego Coulomba F_{x1}, F_{y1} dla koła nr 1 oraz F_{x2}, F_{y2} dla koła nr 2 (rys. 2). Siły te wynoszą:

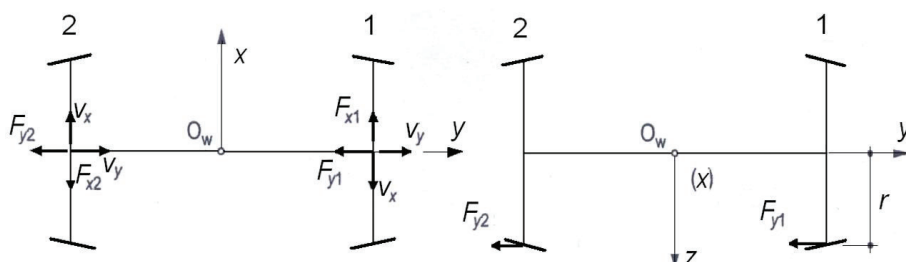
$$F_{xi} = \mu P_i \frac{\bar{v}_x}{\bar{v}}, \quad F_{yi} = \mu P_i \frac{\bar{v}_y}{\bar{v}}, \quad i=1,2 \quad (2)$$

gdzie:

$$\bar{v}_x = \frac{v\tilde{u}}{r} + b\dot{\varphi}, \quad \bar{v}_y = \dot{u} - v\varphi, \quad \bar{v} = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2} \quad \text{są prędkościami poślizgu,}$$

P_1, P_2 - pionowy nacisk kół nr 1 i 2 na szyny,

μ - współczynnik tarcia ślizgowego kinetycznego koło-szyna.



Rys. 2. Prędkości poślizgu wzdłużnego i boczno
oraz składowe sił tarcia ślizgowego kinetycznego Coulomba

2.2. Przybliżone modelowanie uderzenia bocznego

Uderzenie boczne obrzeży kół o główki szyn występuje, wtedy gdy poślizg boczny $\bar{u}(t) \geq d$. Przyjęto sprężysty model uderzenia koła (rys. 1) ze współczynnikiem sprężystości k_o :

$$k_o = \eta \frac{G c_o h_o}{a_o}, \quad (3)$$

gdzie:

$\eta \approx 1$ – współczynnik korekcyjny, uwzględniający rzeczywisty kształt obrzeży koła i szyny,

G – moduł Kirchoffa materiału obrzeża koła,

c_o – szerokość zastępcza (rys. 1),

h_o – grubość obrzeża koła,

a_o – odległość pionowa punktów (rys. 1).

Naciski poziome obrzeży kół na główki szyn oblicza się ze wzorów (rys. 3):

$$F_{h1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \bar{u}(t) \leq d \\ k_o [\bar{u}(t) - d], & \text{dla } \bar{u}(t) > d \end{cases}, \quad (4)$$

$$F_{h2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \bar{u}(t) \geq -d \\ -k_o [\bar{u}(t) - d], & \text{dla } \bar{u}(t) < -d \end{cases}$$

2.3. Ruchomy pojazd szynowy

Część pociągów dostosowanych do dużych prędkości eksploatacyjnych, składa się z pojazdów na dwuosiowych wózkach jezdnych o dwustopniowym zawieszeniu sprężysto-tłumiących. W analizie dynamicznej przyjmuje się często następujące założenia:

- pojazd składa się z czterech zestawów kołowych, dwóch ram wózków jezdnych i sztywnego nadwozia z dwoma pionowymi płaszczyznami symetrii, podłużną i poprzeczną
- zawieszenia pierwszego i drugiego stopnia są liniowe lepkosprężyste,
- drgania pojazdu są w zakresie małych przemieszczeń.

Drgania pojazdu rozpatrywane są w inercyjnym układzie odniesienia xyz , przyjętym w środku masy nadwozia. Przykładowy zestaw sił podał Klasztorny (2005), gdzie pojazd ma 23 stopnie swobody.

Ociążenie zewnętrzne przekazywane przez pojazd na tor obejmuje (rys. 3):

- statyczny nacisk pionowy kół na szyny od ciężaru własnego pojazdu

$$G_t = 0.5(0.24M_b + 0.5M_f + M_w)g, \quad (5)$$

gdzie:

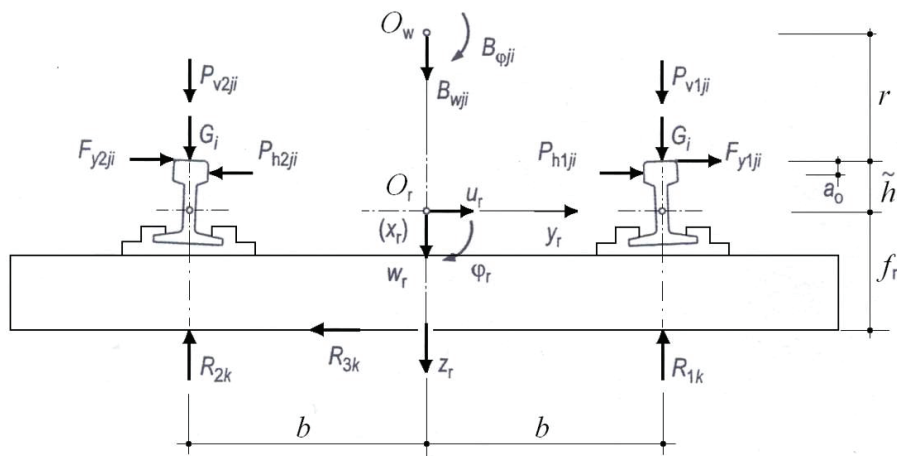
M_b – masa nadwozia przy maksymalnym obciążeniu użytkowym,

M_f – masa ramy wózka jezdnego łącznie z silnikiem trakcyjnym,

M_w – masa zestawu kołowego,

g – przyspieszenie ziemskie

- poprzeczne siły tarcia ślizgowego kinematycznego $F_{xt}(t)$ $F_{yt}(t)$ zgodnie z (2),
- siły nacisku obrzeży kół na główki szyn $F_{b1}(t)$, $F_{b2}(t)$ zgodnie z (4).

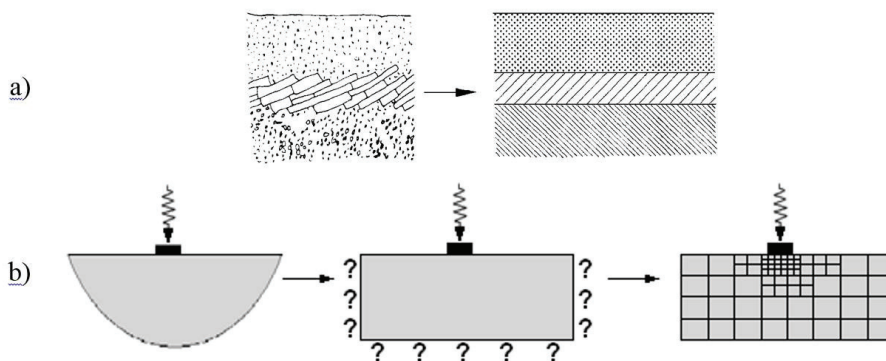


Rys. 3. Obciążenie od pojazdu na tor, Klasztorny (2005)

3. Modelowanie obszaru gruntu

W analizach dynamicznych, prowadzonych przy pomocy dyskretyzacji metodą elementów skończonych, można wyróżnić trzy główne etapy: idealizację, dyskretyzację oraz etap rozwiązania równań ruchu. Na etapie idealizacji konieczna jest decyzja o granicach warstw gruntu o tych samych stałych materiałowych (rys. 4a). W etapie dyskretyzacji (rys. 4b) nieograniczoną półprzestrzeń obszaru gruntu (występującą w naturze) należy ograniczyć do obszaru ograniczonego, a następnie ustalić siatkę elementów skończonych. Na ustalonej siatce, o skończonej liczbie stopni swobody, prowadzone są obliczenia macierzowe, rozwiązywania równania

ruchu. Gęstość siatki elementów może być zmienna w czasie i przestrzeni przy uwzględnieniu miąższości poszczególnych warstw gruntu.



Rys. 4. Etapy modelowania numerycznego: a) wydzielenie warstw gruntu; b) ograniczenie obszaru nieograniczonego i dobór siatki elementów

4. Aproksymacja numeryczna nieograniczonego obszaru gruntu

4.1. Wstęp

Nieograniczony obszar gruntu sprawia wiele trudności w modelowaniu w zakresie obliczeń statycznych i dynamicznych. W ujęciu metody elementów skończonych obszar nieograniczony, przyjmuje się jako ograniczony brzegiem aproksymacyjnym. Na brzegu tego ograniczonego obszaru stawiane są warunki brzegowe różne w zagadnieniach statyki i w zagadnieniach dynamiki. W zagadnieniach statyki wymagane jest spełnienie warunku zanikania przemieszczeń w kierunku nieograniczonego brzegu (zanikanie energii potencjalnej). W zagadnieniach dynamiki oprócz zanikania przemieszczeń, wymagane jest zanikanie prędkości i przyspieszeń (dodatkowo wymaga się zanikanie energii kinetycznej).

4.2. Warunek zanikania energii kinetycznej

Rozważane jest zagadnienie tłumienia drgań na sztucznym brzegu obszaru siatki MES. Rozważania rozpoczęto od zadania jednowymiarowego, rozchodzenia się fali dylatacyjnej w nieograniczonym obszarze. W chwili początkowej znane jest ciśnienie p na powierzchni dA . Fala dylatacyjna rozchodzi się z prędkością c_p , a po czasie dt wypełni obszar $p d t d A$. Pęd w tym obszarze wynosi $\rho c_p d t d A u$, gdzie ρ - gęstość ośrodka, u - prędkość fali w kierunku normalnym do sztucznego brzegu. Zgodnie z zasadą zachowania pędu otrzymuje się warunek:

$$p d A d t = \rho c_p d t d A u, \quad (6)$$

$$\text{stąd } p = \rho c_p u \quad (7)$$

Z równania (7) wynika, że ciśnienie fali dylatacyjnej padającej na brzeg jest zrównoważone przez tłumik lepki siłą tłumienia $\rho c_p \dot{u}$, znajdujący się na sztucznym brzegu.

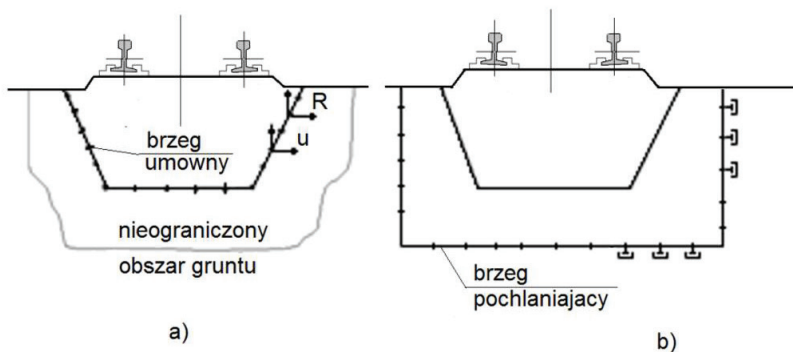
Podobne rozważanie stosowane jest w przypadku fali poprzecznej, uzyskując siłę tłumienia $\rho c_s v$, gdzie v jest prędkością fali w kierunku stycznym do sztucznego brzegu.

4.3. Metoda podkonstrukcji i metoda bezpośrednia

Skończone wymiary konstrukcji współpracującej z gruntem pozwalają na zastosowanie skończonej liczby stopni swobody. Podobnego sposobu modelowania nie można zastosować do nieograniczonego obszaru gruntu. W zagadnieniach modelowania konstrukcji współpracującej z gruntem stosowane są dwie metody:

- **Metoda podkonstrukcji** - (rys. 5a) polega na tym, że obszar samej konstrukcji oraz otaczający ją obszar gruntu, w którym zachodzą nieliniowe deformacje, dyskretyzuje się elementami skończonymi, aż do umownego brzegu. Zakłada się, że poza brzegiem zachodzą liniowe deformacje i nie występuje konieczność analizowania obszaru. Zatem elementy na umownym brzegu powinny aproksymować w przestrzeni i w czasie obszar sprężysty nieograniczony.

Na umownym brzegu (rys. 5a) formułowana jest relacja między siłami \mathbf{R} a przemieszczeniami \mathbf{u} w przestrzeni i w czasie w układzie globalnym. Siły interakcji w danym stopniu swobody i w danej chwili czasowej zależą od przemieszczeń we wszystkich stopniach swobody na brzegu umownym i wszystkich poprzednich chwilach czasowych od początku analizy. Wynika to z faktu, że wymuszony jednostkowy impuls przemieszczenia w danym stopniu swobody wywołuje siły we wszystkich stopniach swobody na brzegu umownym w danej chwili czasowej i w chwilach następnych. Zatem wektor sił (interakcji) $\mathbf{R}(t)$ we wszystkich stopniach swobody na brzegu w danej chwili czasowej t jest równy całce splotu macierzy odpowiedzi na jednostkowy impuls przemieszczenia $\mathbf{S}^o(t)$ i wektora przemieszczeń $\mathbf{u}(t)$



Rys. 5. Modelowanie nieograniczonego obszaru gruntu:
a) metoda podkonstrukcji, b) metoda bezpośrednia

$$\mathbf{R}(t) = \int_0^t \mathbf{S}^\infty(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (8)$$

gdzie:

wskaźnik $^\infty$ oznacza nieograniczony obszar,

$\mathbf{S}^\infty(t)$ jest macierzą dynamicznej sztywności w dziedzinie czasu.

W dziedzinie częstości ω

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{S}^\infty(\omega) \mathbf{u}(\omega), \quad (9)$$

gdzie: $\mathbf{S}^\infty(\omega)$ jest macierzą dynamicznej sztywności w dziedzinie częstości ω .

Układ równań ruchu całego zadania (konstrukcji + gruntu) otrzymuje się przez dodanie sił $\mathbf{R}(t)$ zgodnie z (8) do równania ruchu samej konstrukcji.

- **Metoda bezpośrednia** – (rys. 5b) polega na tym, że obszar samej konstrukcji wraz z dużym obszarem otaczającego gruntu dyskretyzowany jest elementami skończonymi aż do brzegu określonego jako pochłaniający. Brzeg ten ma za zadanie pochłanianie w dynamice fal dochodzących bez możliwości odbicia i załamania.

W modelu bezpośrednim proponowane są metody wyznaczania sił $\mathbf{R}(t)$ na brzegu pochłaniającym w sposób uproszczony.

4.4. Metody przybliżone

Metody przybliżone stosowane są w metodach bezpośrednich (rys. 5b) i prowadzą do wyników z akceptowalnym błędem rozwiązania. Błąd rozwiązania wynika z niedokładnego spełnienia warunków brzegowych na brzegu pochłaniającym. Brzeg musi być tu w dostatecznej odległości od konstrukcji. Warunek wypromieniowania energii, który powinien być spełniony w nieskończoności jest spełniony w sposób przybliżony.

Istnieje wiele metod rozwiązania przybliżonego. Najczęściej równanie brzegu pochłaniającego bazuje na teorii propagacji fali:

- Najpopularniejszym brzegiem pochłaniającym jest brzeg tłumienia lepkiego (*viscous boundary*) składający się z tłumików absorbujących propagację fali w kierunku prostopadłym do brzegu (por. równanie (6)).
- Innym podejściem jest brzeg uśredniający wyniki (*superposition boundary*), który uśrednia dwa rozwiązania brzegowe: symetryczne (z brzegiem zamocowanym) i antysymetryczne (z brzegiem swobodnym) eliminując w ten sposób falę odbitą.
- Kolejnym jest brzeg wzmocnionego pochłaniania (*paraxial boundary*), w którym wprowadzane jest równanie różniczkowe do wzmocnienia fali odchodzącej.
- Brzeg z podwójnym przybliżeniem (*double-asymptotic boundary*), w którym występują tłumiki lepkie oraz sprężyny i jest asymptotycznie dokładny

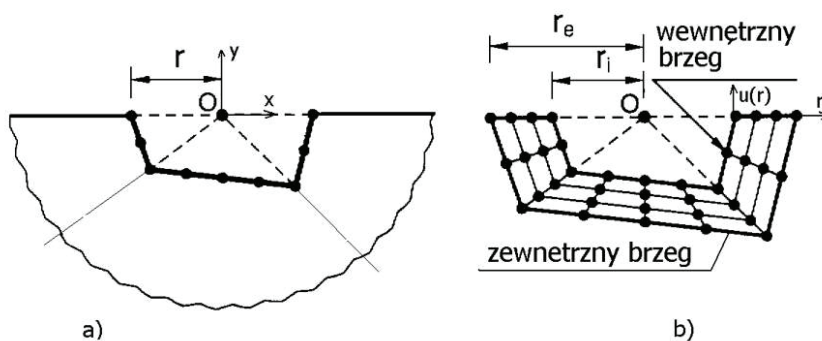
w przypadku niskich i wysokich częstotliwości przy fali padającej prostopadłe do brzegu.

- Brzeg z ekstrapolacją (*extrapolation boundary*), w którym wyznaczone są przemieszczenia na sztucznym brzegu na podstawie oszacowania prędkości propagacji fali w węzłach sąsiednich.

Innym rozwiązaniem przybliżonym jest zastosowanie elementów nieskończonych (*infinite element*). W tym przypadku funkcje kształtu mają zapewnić zanikanie propagacji fali w kierunku nieskończonym. Stopień zanikania jest określony w dziedzinie częstotliwości. Taki element w sensie MES jest niedokładny, ponieważ przy zmierzaniu wymiaru elementu do nieskończoności, błąd rozwiązania nie zmierza do zera.

4.5. Sformułowania bazujące na podobieństwie

W metodzie podkonstrukcji, siły oddziaływania dynamicznego nieograniczonego obszaru wyznaczone są zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości. Ideę podobieństwa w przypadku 2D, przedstawiono na rys. 6, która odnosi się do punktu centralnego O umieszczonego na powierzchni obszaru nieograniczonego. W punkcie centralnym znajduje się układ odniesienia. Odległość dowolnego punktu od początku układu O oznaczona jest przez r .



Rys. 6. Sformułowania bazujące na podobieństwie: a) metoda podkonstrukcji, b) metoda bezpośrednia

W metodzie podkonstrukcji (rys. 6a) współczynniki macierzy dynamicznej sztywności $S^{\infty}(\omega)$ lub $S^{\infty}(t)$ obliczane na podstawie funkcji odpowiedzi jednostkowej (funkcji Greena) są opisane przez odległość r .

W metodzie bezpośredniej również znajduje się punkt centralny O względem, którego występują promieniście linie elementów skończonych. W tym przypadku funkcje kształtu elementów odnoszą się do punktu centralnego, a warunek zanikania w nieskończoności i jest spełniany bez stosowania rozwiązania analitycznego.

W pionierskiej pracy Dasgupta w 1982 powyższe podejście nazwał „klonowaniem” i podał uśrednioną macierz sztywności dynamicznej.

Macierz odpowiedzi na impuls jednostkowy można wyznaczyć dwoma sposobami:

- metodą przewidywania, która zakłada występowanie dwóch lub trzech warstw elementów na brzegu (rys. 6b) radialnie w stosunku do punktu O między wewnętrznym a zewnętrznym brzegiem. Macierz odpowiedzi na impuls jednostkowy brzegu zewnętrznego jest określana na podstawie macierzy odpowiedzi na impuls jednostkowy brzegu wewnętrznego i czasu przejścia fali przez ten brzeg,
- metodą nieskończenie małego elementu skończonego, w której zakłada się występowanie jednej warstwy elementów na brzegu w stosunku do punktu O .

5. Równanie ruchu

Równanie ruchu w zagadnieniach nieliniowych rozwiązywane jest w chwilach czasowych t :

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{S}^\infty(\omega) \mathbf{u}(\omega), \quad (10)$$

W MES równanie to jest rozwiązywane w dyskretnych chwilach czasowych t przy zastosowaniu metod numerycznego całkowania równania ruchu. Główną różnicą między całkowaniem równania dynamiki liniowej i nieliniowej jest w przypadku dynamiki nieliniowej, konieczność rozwiązywania nieliniowego równania (metodami iteracyjnymi) przy przejściu z chwili czasowej t do chwili czasowej $t + \Delta t$.

5.1. Całkowanie po czasie dynamiki gruntu w sformułowaniu u - p

Do rozwiązania układu równań (10) zastosowano schemat całkowania po czasie Newmarka w celu wyznaczania przemieszczeń $\bar{\mathbf{u}}$, prędkości $\dot{\bar{\mathbf{u}}}$ i przyspieszeń $\ddot{\bar{\mathbf{u}}}$ oraz schemat pierwszego rzędu do wyznaczania ciśnień wody w porach $\bar{\mathbf{p}}$. W chwili czasowej $t = t_{n+1}$ przyjęto:

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1} &= \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n + \Delta \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1} &= \dot{\bar{\mathbf{u}}}_n + \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n \Delta t + \beta_1 \Delta \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n \Delta t = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^p + \beta_1 \Delta \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n \Delta t \\ \bar{\mathbf{u}}_{n+1} &= \bar{\mathbf{u}}_n + \dot{\bar{\mathbf{u}}}_n \Delta t + \frac{\Delta \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n \Delta t^2}{2} + \beta_2 \Delta \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n \Delta t^2 = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^p + \beta_2 \Delta \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n \Delta t^2 \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{n+1} &= \dot{\bar{\mathbf{p}}}_n + \Delta \dot{\bar{\mathbf{p}}}_n \\ \bar{\mathbf{p}}_{n+1} &= \bar{\mathbf{p}}_n + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_n \Delta t + \theta \Delta \dot{\bar{\mathbf{p}}}_n \Delta t = \bar{\mathbf{p}}_{n+1}^p + \theta \Delta \dot{\bar{\mathbf{p}}}_n \Delta t \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie:

$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^p$, $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^p$ oraz $\bar{\mathbf{p}}_{n+1}^p$ są predyktorami przy znanych wartościach z poprzedniej chwili czasowej t_n , a β_1 , β_2 , θ są parametrami Newmarka.

Podstawiając (11) do (10) otrzymuje się:

$$\mathbf{M}_{n+1}(\ddot{\mathbf{u}}_n + \Delta\ddot{\mathbf{u}}_n) + \bar{\mathbf{P}}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^W(\bar{\mathbf{p}}_n + \dot{\mathbf{p}}_n\Delta t + \theta\Delta\dot{\mathbf{p}}_n\Delta t) = \mathbf{f}_{n+1}^u \quad (12)$$

$$(\mathbf{Q}_{n+1}^W + \mathbf{Q}_{n+1}^{gW})^T(\dot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_n\Delta t + \beta_1\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n\Delta t) +$$

lub

$$\Psi_{n+1}^u = \mathbf{M}_{n+1}\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n + \bar{\mathbf{P}}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^W\theta\Delta\dot{\mathbf{p}}_n\Delta t - \mathbf{F}_{n+1}^u = \mathbf{0} \quad (13)$$

$$\Psi_{n+1}^p = (\mathbf{Q}_{n+1}^W + \mathbf{Q}_{n+1}^{gW})^T\beta_1\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n\Delta t + (\mathbf{H}_{n+1}^W + \mathbf{H}_{n+1}^{gW})^T\theta\Delta\dot{\mathbf{p}}_n\Delta t +$$

gdzie:

$$\mathbf{F}_{n+1}^u = \mathbf{f}_{n+1}^u - \mathbf{M}_{n+1}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{Q}_{n+1}^W(\bar{\mathbf{p}}_n + \dot{\mathbf{p}}_n\Delta t)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \mathbf{f}_{n+1}^p - (\mathbf{Q}_{n+1}^W + \mathbf{Q}_{n+1}^{gW})^T(\dot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_n\Delta t) - (\mathbf{H}_{n+1}^W + \mathbf{H}_{n+1}^{gW})^T(\bar{\mathbf{p}}_n + \dot{\mathbf{p}}_n\Delta t) -$$

$$-(\mathbf{S}_{n+1}^W + \mathbf{S}_{n+1}^{gW})^T\dot{\mathbf{p}}_n \quad (14)$$

Budowa poszczególnych macierzy zgodna jest ze sformułowaniem \mathbf{u}^s - p (Wrana, 2012) ośrodka dwufazowego w pełni nasyconego. W każdej chwili czasowej t_{n+1} należy określić wektor $\bar{\mathbf{P}}_{n+1}$ przez całkowanie równania konstytutywnego sprężysto - lepkoplastycznego przy znanym rozkładzie naprężeń z poprzedniej chwili czasowej. Ponadto ciśnienie pary wodnej p_{gw} oraz gęstość ρ_{gw} należy wyznaczyć w każdej chwili czasowej.

Układ (12-14) jest układem nieliniowym z uwagi na równanie konstytutywne szkieletu oraz ciśnienie kapilarne i stopień nasycenia porów. Do rozwiązania nieliniowego układu równań zastosowano procedurę liniowej iteracji Newtona-Raphsona:

$$\Psi_i^{\pi} + \frac{\partial\Psi_i^{\pi}}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \Delta\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (15)$$

gdzie Jacobian

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial\Psi_i^{\pi}}{\partial\mathbf{x}_i} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{M}(\frac{\partial\Psi_i^{\pi}}{\partial\mathbf{u}}) / (\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}) \& (\frac{\partial\Psi_i^{\pi}}{\partial\mathbf{p}}) / \\ / (\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{x}}) \& (\frac{\partial\Psi_i^{\pi}}{\partial\mathbf{p}}) / (\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}) \& (\frac{\partial\Psi_i^{\pi}}{\partial\mathbf{p}}) / (\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{x}}) \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \mathbf{M} + \mathbf{K}_T \beta_1 \Delta t^2 \& - \mathbf{O}^T \mathbf{w} \theta \Delta t \& (\mathbf{O}, \mathbf{w} - \\ \dagger \mathbf{Q}_i^T g_w \& \mathbf{T} \beta_1 \Delta t \& (\mathbf{H}_i^T \mathbf{w} + \mathbf{H}_i^T g_w) \& \mathbf{T} \theta \Delta t + (\mathbf{S}_i^T \mathbf{w} + \mathbf{S}_i^T g_w) \end{array} \right] \quad (16)$$

\mathbf{K}_T jest macierzą styczną sprężysto - lepkoplastyczną.

Przemnożono drugie równanie (15) przez $-\frac{\theta}{\beta_1}$ oraz przeniesiono macierz sprężenia pary wodnej $(\mathbf{Q}^{gW})^T$ na prawą stronę. Podstawiając (16) do (15) otrzymano ostatecznie:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{K}_T \beta_2 \Delta t^2 & -\mathbf{Q}^w \boldsymbol{\theta} \Delta t \\ -(\mathbf{Q}^w)^T \Delta t & \frac{-\boldsymbol{\theta}}{\beta_1} [(\mathbf{H}^w + \mathbf{H}^{sw})^T \boldsymbol{\theta} \Delta t + (\mathbf{s}^w + \mathbf{s}^{sw})^T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \Delta \dot{\mathbf{p}}_n \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^u \\ \frac{\boldsymbol{\theta}}{\beta_1} \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^p + (\mathbf{Q}^{sw})^T \boldsymbol{\theta} \Delta t \bar{\mathbf{u}}_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Układ (17) jest rozwiązywany iteracyjnie, przyjmując wartość $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ z poprzedniej iteracji.

Metoda całkowania po czasie jest bezwarunkowo zbieżna, gdy:

$$\beta_2 \geq \beta_1, \beta_1 \geq 1/2, \quad \theta \geq 1/2.$$

6. Wnioski

W artykule przedstawiono główne części modelu komputerowego do obliczeń drgań w gruncie na skutek przejazdu pociągu o dużych prędkościach. Podano model samego pojazdu szynowego, przedstawiono sposoby opisu gruntu, jako półprzestrzeni, gdzie szczególną uwagę zwrócono na problemy modelowania warunków brzegowych symulujących obszar nieograniczony. Podano też macierzowy układ równań ruchu, obejmujący grunt-tor-pociąg.

Powyższy model pozwala na określenie poziomu drgań nie tylko w samym torze, ale też w warstwach podtorza i w rodzimym gruncie.

Literatura

- [1] Bogacz R., Czyczuła W.(2008), Response of beam on visco-elastic foundation to moving distributed load, Journal of Theoretical and Applied Mechanics 46, 4, pp. 763-775.
- [2] Bryja D. (1984), Drgania przestrzenne mostu wiszącego pod ruchomym obciążeniem inercyjnym, Archiwum Inżynierii Lądowej, 30, 4, s. 607-627.
- [3] Filipov A.P. et al. (1974), Vozdejstviye dinamiczeskich nagruzok na elementy konstrukcji. Naukowa Dumka, Kiev.
- [4] Fryba L. (1999), Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, 3rd edition. Telford, London.
- [5] Kłasztorny M. (2005), Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkojeźdnymi, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne.
- [6] Kączkowski Z.(1963), Vibration of a beam under a moving load. Proc. Vibration Problems, 4, 4.
- [7] Kączkowski Z.(1967), O drganiach belki mostowej pod wpływem przesuwających się obciążeń, ZN PSl nr 201, Budownictwo Nr 20, Gliwice.

-
- [8] Langer J., Klasztorny M. (1982), Drgania układów kratowo-belkowych pod ruchomym inercyjnym obciążeniem cyklicznym. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 28, 1-2, s. 17-29.
 - [9] Matsuura A. (1979), Dynamic behavior of bridge girder for high speed railway bridge. *RTRI Quarterly Reports*, 20, 2, pp 70-76.
 - [10] Śniady P. (1976), Dynamika dźwigarów wywołane ruchomym obciążeniem. PN IIL PWr Nr 21, S. Monografie Nr 5, Wrocław, Wyd. Pol. Wrocławskiej.
 - [11] Szcześniak W. (1994), Wybrane zagadnienia belek i powłok poddanych inercyjnym obciążeniem ruchomym. *Prace Naukowe Pol. Warszawskiej, Budownictwo z. 125*, Warszawa, Oficyna Wyd. Pol. Warszawskiej.
 - [12] Wrana B. (2012), Dynamika gruntów. Modele obliczeniowe, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.