



Krzysztof KRAWIEC*

Zastosowanie metody zbiorów losowych w modelowaniach numerycznych w geoinżynierii

Streszczenie: W artykule przedstawiono przegląd zastosowań metody zbiorów losowych w modelowaniu numerycznym różnych zagadnień geoinżynierskich. Przyjęcie właściwych wartości parametrów wejściowych do obliczeń ma bardzo istotny wpływ na uzyskiwane wyniki obliczeń. Niejednokrotnie w obliczeniach numerycznych wprowadza się uśrednione wartości parametrów wejściowych. Podejście to może być obciążone dużym ryzykiem spowodowanym niepewnością w określaniu wartości tych parametrów. Naturalna zmienność parametrów oraz ograniczenia metod ich oznaczania powodują, że często parametry przedstawia się w postaci zakresów ich wartości. W tym kontekście istotne jest pozyskanie informacji o parametrach z możliwie licznych źródeł. Metoda zbiorów losowych pozwala na formalne określenie niepewności związanych z doborem parametrów wejściowych do obliczeń numerycznych.

W pierwszej części pracy omówiono główne przyczyny niepewności w rozpoznawaniu parametrów fizyczno-mechanicznych przyjmowanych do obliczeń. W kolejnej części przedstawiono krótki opis teoretyczny metody zbiorów losowych, a następnie omówiono wybrane jej zastosowania w modelowaniu numerycznym zagadnień geoinżynierskich. W podsumowaniu podkreślono zalety i ograniczenia metody zbiorów losowych.

Słowa kluczowe: metoda zbiorów losowych, modelowanie numeryczne, parametry wejściowe

Application of the random sets theory in numerical modeling in geoen지니어ing

Abstract: This article presents a review of random sets theory applied in numerical modeling of various geoen지니어ing issues. Use of the proper input parameters for numerical calculation has a crucial impact on the results of the calculation. In the numerical calculation, the input parameter values are often averaged. The risk in taking this approach is caused by uncertainties in the values of parameter determination. Natural variability of the parameters and limitations of the determining methods cause the parameters to be shown as a range of values. In this context, it is important to obtain information about the parameters from multiple sources. The random sets theory makes it possible to handle uncertainties connected with the selection of input parameters in a very specific way.

* Instytut Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN, Kraków; e-mail: kris@min-pan.krakow.pl

The first part of the article explains the main reasons for uncertainties in the determination of physical-mechanical parameters. A short theoretical description of random sets theory is then presented. The analysis goes on to describe the chosen applications of the random sets theory in numerical modeling of geo-engineering issues. Finally, the article concludes with the advantages and disadvantages of the random sets theory.

Key words: random set theory, numerical modeling, input properties

Wprowadzenie

W skomplikowanych warunkach naturalnych i technicznych oraz znaczącej zmienności masywu skalnego istnieje wiele czynników decydujących o jego zachowaniu (Tajduś i in. 2012):

- warunki zalegania warstw skalnych,
- stopień ich naruszenia,
- podzielność i blokowość warstw skalnych,
- właściwości fizyczno-mechaniczne,
- temperatura skał,
- warunki hydrogeologiczne,
- pierwotny stan naprężenia.

Opis zachowania tak złożonego ośrodka można przeprowadzić za pomocą modelowania numerycznego. Jednak, aby uzyskać poprawne wyniki obliczeń, pod względem jakościowym i ilościowym, należy zwrócić szczególną uwagę na wiele zagadnień, tj. dobór właściwego modelu geomechanicznego, wprowadzenie odpowiednich warunków brzegowych i początkowych lub przyjęcie poprawnych wartości parametrów ośrodka skalnego lub gruntowego (Tajduś i in. 2012).

W wielu przypadkach właściwe oznaczenie parametrów jest utrudnione ze względu na stopień skomplikowania ośrodka geologicznego. Przykładowo, jedną z podstawowych metod stosowanych do rozpoznawania masywu skalnego są wiercenia badawcze. Większość wierzeń wykonywana jest metodą obrotowo-rdzeniową ponieważ daje ona możliwość pozyskania odpowiednio dużych i nieuszkodzonych rdzeni, na podstawie których określa się właściwości odkształceniowe i wytrzymałościowe skały. Należy jednak brać pod uwagę wiele czynników wpływających na jakość rdzeni otrzymywanych podczas wiercenia, tj.: prędkość wiercenia, rodzaj świdra, siła nacisku, ciśnienie płuczki, prędkość obrotowa (Tajduś i in. 2012). Wszystkie te czynniki w dużej mierze wpływają na jakość prób, a co za tym idzie na dokładność oznaczania parametrów fizyczno-mechanicznych. Niejednokrotnie również, szczególnie w przypadku projektów geotechnicznych o mniejszym zakresie rozpoznania, z powodów finansowych wykonuje się niewielką liczbę otworów badawczych. Powstaje wtedy potrzeba wykorzystania alternatywnych źródeł informacji o parametrach, czyli: danych literaturowych lub wiedzy eksperckiej o wynikach prac archiwalnych w analogicznych warunkach. Niekompletna wiedza o parametrach powoduje, że są one często przedstawiane w postaci zakresów wartości bez możliwości określenia ich rozkładu prawdopodobieństwa. W konsekwencji w gromadzeniu informacji o parametrach pojawia się wiele niepewności. Helton (1997) zwraca uwagę na złożony charakter niepewności, wprowadzając podział na niepewność losową i epistemologiczną. Niepewność losowa, obiektywna (ang. *aleatory uncertainty*) wynika z dużej zmienności wartości parametru w populacji.

Niepewność subiektywna (ang. *epistemic uncertainty*) wiąże się z brakiem wiedzy o danym parametrze.

Ze względu na znaczący rozwój metod modelowania numerycznego poszukuje się sposobów formalnego ujęcia niepewności parametrów wejściowych do obliczeń w zagadnieniach geotechnicznych. Można do tego celu wykorzystać metodę zbiorów losowych, która jest pomocnym narzędziem w reprezentowaniu matematycznej niepewności, omijającym niektóre wady klasycznej teorii prawdopodobieństwa (Schweiger i Peschl 2005).

W dalszej części artykułu dokonano teoretycznego omówienia metody zbiorów losowych. Następnie przedstawiono wybrane przykłady jej zastosowania w zagadnieniach geoinżynierskich. W podsumowaniu opisano zalety i wady proponowanej metody.

1. Podstawy teoretyczne metody zbiorów losowych

Metoda zbiorów losowych dostarcza narzędzia pozwalającego na formalne ujęcie informacji o zmiennych, w postaci zakresów ich wartości opisanych dyskretnym rozkładem prawdopodobieństwa.

Podstawy teoretyczne metody zbiorów losowych były szczegółowo opisywane w pracach wielu autorów (np. Debois i Prade 1991; Tonon i in. 2000; Schweiger i Peschl 2007; Hall i in. 2004).

Niech X będzie niepustym zbiorem zawierającym wszystkie możliwe wartości parametru x . Dubois i Prade (1991) definiują skończony zbiór określony na zbiorze X jako para (\mathcal{F}, m) gdzie $F = \{A_i : i = 1, \dots, n\}$ jest klasą podzbiorów zbioru X i m jest prawdopodobieństwem, że dany element zbioru X należy do A_i przy czym:

$$m : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$$

$$m(\emptyset) = 0$$

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} m(A) = 1$$

Każdy podzbiór $A \in X$, dla którego $m(A) > 0$ nazywany jest elementem ogniskowym. \mathcal{F} jest rodziną elementów ogniskowych indukowanych przez podstawowe przyporządkowanie prawdopodobieństwa m . Dla każdego zbioru losowego (\mathcal{F}, m) można zdefiniować funkcję przekonania (Barczak 2010) $Bel(A)$ (ang. *belief function*) i funkcję wiarygodności $Pl(A)$ (ang. *plausibility function*):

$$\forall A \in X, Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} (m)B = 1 - Pl(\bar{A})$$

$$\forall A \in X, Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} (m)B = 1 - Pl(\bar{A})$$

Równania te określają granice prawdopodobieństwa zbiorów danych. $Bel(A)$ można potraktować jako dolną granicę prawdopodobieństwa natomiast $Pl(A)$ jako górną granicę (Hall i in. 2004). Jeżeli \mathcal{F} jest złożone tylko i wyłącznie ze zbiorów jednoelementowych, to wtedy $Bel = Pl$ i m jest podstawową miarą prawdopodobieństwa.

Jeśli jest dostępne więcej niż jedno źródło informacji o danym parametrze, metoda zbiorów losowych wymaga ich połączenia (Hall i in. 2004). W sytuacji, gdy tylko jedno ze źródeł wydaje się być poprawne, lecz nie wiadomo które, stosuje się procedurę przypisywania jednakowego prawdopodobieństwa wystąpienia danych ze wszystkich źródeł. Przy założeniu, że to liczba źródeł informacji o parametrze x , to dla każdego elementu ogniskowego $A \in \mathcal{P}(X)$:

$$m(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i(A)$$

Oprócz możliwości praktycznego połączenia teorii prawdopodobieństwa i informacji opartej na zbiorach, zbiory losowe można bezpośrednio wykorzystać w różnego rodzaju relacjach funkcyjnych (Tonon i in. 2000). Niech g będzie odwzorowaniem $X_1 \times \dots \times X_N \rightarrow Y$, a $x_1 \times \dots \times x_N$ zmiennymi, których wartości nie są całkowicie znane. Niepełna wiedza na temat $x = x_1 \times \dots \times x_N$, włączając w to wszystkie zależności $x = (x_1, \dots, x_N)$ może być wyrażona w postaci relacji losowej \mathfrak{R} którą jest zbiór losowy (\mathcal{F}, m) oparty na iloczynie kartezjańskim zbiorów $X_1 \times \dots \times X_N$. Zbiór losowy (\mathfrak{R}, ρ) , który jest obrazem (\mathcal{F}, m) przez g można przedstawić jako:

$$\mathfrak{R} = \{R_j = g(A_i), (A_i) \in \mathcal{F}\}, \quad g(A_i) = \{g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in A_i\}$$

$$\rho(R_j) = \sum_{A_i: R_j = g(A_i)} m(A_i)$$

Jeśli A_1, \dots, A_n są odpowiednio zbiorami na $X_1 \times \dots \times X_N$ i $x_1 \times \dots \times x_N$ są niezależne, to połączone podstawowe prawdopodobieństwo wartości wynikowej $m(A_1 \times \dots \times A_N)$ jest dane przez:

$$m(A_1 \times \dots \times A_N) = \prod_{i=1}^n m_i(A_i), \quad A_1 \times \dots \times A_n \in \mathfrak{R}$$

Jeśli element ogniskowy A_i jest zamkniętym przedziałem liczb rzeczywistych: $A_i = \{x | x \in [l_i, u_i]\}$ to funkcje dolnej $F_*(x)$ i górnej $F^*(x)$ granicy skumulowanego prawdopodobieństwa można otrzymać ze wzorów (Schweiger i Peschl 2005):

$$F_*(x) = \sum_{i: x \geq u_i} m(A_i)$$

$$F^*(x) = \sum_{i: x \geq l_i} m(A_i)$$

2. Zastosowanie metody zbiorów losowych w modelowaniach numerycznych w geoinżynierii

Przydatność metody zbiorów losowych w połączeniu z modelowaniami numerycznymi w zagadnieniach geoinżynierskich jest szeroko opisywana w literaturze światowej (Schweiger i Peschl 2007; Tonnon i in. 2000; Nasekhian i Schweiger 2010; Peschl 2004; Hall i in. 2004).

Przykładowo, Nasekhian i Schweiger (2010), Pottler i in. (2009) i Peschl (2004) przedstawiają sposób modyfikacji obliczeń numerycznych metodą elementów skończonych w połączeniu z metodą zbiorów losowych – RS-FEM (ang. *Random Set Finite Element-Method*). Zaproponowaną metodykę obliczeń podzielili na sześć etapów. W pierwszym z nich dokonują wyboru programu do modelowań numerycznych wykorzystywanego w dalszych obliczeniach. Następnie przeprowadzają analizę istotności parametrów wejściowych pod kątem oceny, który z nich należy rozpatrywać jako zbiory losowe. W trzecim etapie redukują wartości parametrów pod kątem ich zmienności przestrzennej za pomocą metody zaproponowanej przez Vanmarcke'a (1983). Czwarty etap polega głównie na konstrukcji plików wejściowych do obliczeń przy użyciu metody zbiorów losowych. W etapie piątym przeprowadzają obliczenia numeryczne z wykorzystaniem programu bazującego na metodzie elementów skończonych. Ostatni etap dotyczy analizy niezawodności, polegającej na porównaniu wyników obliczeń z wartościami pomierzonymi w warunkach rzeczywistych. Metodyka ta została przybliżona przykładem analizy numerycznej stateczności tunelu komunikacyjnego w Niemczech wykonywanego według Nowej Austriackiej Metody Tunelowania (NATM). Do obliczeń numerycznych wykorzystali program PLAXIS (Brinkgreve 2000) oparty na metodzie elementów skończonych. Wśród rozpatrywanych parametrów wejściowych znalazły się: kąt tarcia wewnętrznego φ , spójność efektywna c , współczynnik rozporu bocznego K_0 , moduł sprężystości Younga górotworu otaczającego E_s , i betonu natryskowego E_{sh} oraz współczynnika relaksacji R_f . W trakcie obliczeń analizowano przemieszczenia pionowe w stropie tunelu, przemieszczenia pionowe i poziome w ociosach, maksymalne momenty bezwładności obudowy tunelu oraz współczynnik bezpieczeństwa przed instalacją obudowy ostatecznej. W wyniku otrzymano rozkłady górnej i dolnej granicy prawdopodobieństwa wystąpienia analizowanych wielkości opisujących stan naprężenia i odkształcenia. Uzyskane wyniki obliczeń porównano z wartościami pomierzonymi w warunkach rzeczywistych potwierdzając ich zgodność, a w konsekwencji poprawność przyjętych założeń w zaproponowanej metodyce.

Podobne zagadnienie omówiono w pracy Sysika i Siemińskiej-Lewandowskiej (2006) na przykładzie obliczeń numerycznych stateczności tunelu kolejowego wykonanego nową metodą austriacką w utworach wapiennych. Zasymulowano poszczególne fazy budowy tunelu opierając się na danych wejściowych pochodzących z badań geotechnicznych i wyznaczonych na podstawie opinii eksperta. Do analizy przyjęto 12 parametrów charakte-

ryzujących właściwości 3 warstw geotechnicznych oraz dodatkowo 2 parametry charakteryzujące właściwości betonu natryskowego w obudowie liniowej tunelu. Spośród wszystkich analizowanych parametrów wyznaczono 3 parametry najbardziej istotne: moduł deformacji warstwy II, moduł deformacji warstwy III oraz kąt tarcia wewnętrznego warstwy III. W wyniku obliczeń otrzymano rozkłady górnej i dolnej granicy prawdopodobieństwa wystąpienia danych wartości przemieszczenia pionowego w stropie obudowy tunelu. Wyniki obliczeń okazały się zgodne z wartościami pomierzonymi w warunkach rzeczywistych.

Inny przykład dotyczy modelowania numerycznego zachowania się głębokiego wykopu w słabym ośrodku gruntowym z zastosowaniem ściany oporowej wzmocnionej stalowymi kotwiami (Peschl 2004; Schweiger i Peschl 2005). Obliczenia miały na celu ocenę ryzyka zniszczenia obiektu budowlanego znajdującego się w bezpośrednim sąsiedztwie wykopu. Do modelowania przyjęto parametry charakteryzujące trzy warstwy geotechniczne. Informacje o parametrach pozyskano na podstawie dokumentacji z badań geotechnicznych oraz opinii eksperta. Analizowano następujące parametry: spójność ośrodka c , kąt tarcia wewnętrznego φ oraz moduł deformacji E_{oed} . Do obliczeń przyjęto program PLAXIS (Brinkgreve 2000), za pomocą którego obliczano współczynnik ugięcia fundamentów obiektu budowlanego, przemieszczenia poziome w górnej części ściany oporowej oraz siły działające na kotwie stalowe. W efekcie dokonano porównania otrzymanych wyników przemieszczeń oraz sił z wartościami pomierzonymi w warunkach rzeczywistych, stwierdzając ich zgodność, a w konsekwencji poprawność wykonanego modelu.

Sysik i Siemińska-Lewandowska (2006) opisali w swojej pracy metodę matematycznej reprezentacji niepewności, opartą na teorii zbiorów losowych. Przedstawiono przykład obliczeń numerycznych tunelu kolejowego wykonanego nową metodą austriacką (NATM) w utworach wapiennych. Zasyulowano poszczególne fazy budowy tunelu opierając się na danych wejściowych pochodzących z badań geotechnicznych i wyznaczonych na podstawie opinii eksperta. Do analizy przyjęto dwanaście parametrów charakteryzujących trzy warstwy geotechniczne oraz dodatkowo dwa parametry charakteryzujące beton natryskowy w obudowie liniowej tunelu. Spośród wszystkich analizowanych parametrów wyznaczono trzy parametry najbardziej istotne: moduł deformacji warstwy II, moduł deformacji warstwy III oraz kąt tarcia wewnętrznego warstwy III. W wyniku obliczeń otrzymano rozkłady górnej i dolnej granicy prawdopodobieństwa wystąpienia danych wartości przemieszczeń pionowych w stropie obudowy tunelu. Wyniki obliczeń okazały się zgodne z wartościami pomierzonymi w warunkach rzeczywistych.

Hall i inni (2004) oraz Pilecki i inni (2014) zajmowali się numeryczną analizą stateczności terenów zagrożonych ruchami masowymi z zastosowaniem metody zbiorów losowych. W pracy Pileckiego i in. (2014) obliczenia dotyczą powstania osuwiska, w warunkach geologiczno-inżynierskich, typowych dla fliszu karpackiego. Do obliczeń numerycznych wykorzystano program *FLAC* (2007), bazujący na metodzie różnic skończonych. W analizie rozpatrywano trzy warstwy geotechniczne, z których każda była scharakteryzowana przez trzy parametry: spójność ośrodka c , kąt tarcia wewnętrznego φ oraz gęstość objętościową ρ . W efekcie obliczeń dla przyjętych wartości parametrów wejściowych otrzymano dolną i górną granicę prawdopodobieństwa dla obliczonych wartości współczynnika bezpieczeństwa osuwiska. Otrzymane wyniki porównano z wynikami obliczeń dla parametrów wejściowych, będących średnimi arytmetycznymi w przedziale ich zmienności. Wyniki obliczeń uzyskane dla średnich wartości nie przewidywały utraty stateczności, natomiast

obliczenia oparte na metodzie zbiorów losowych wskazywały na utratę stateczności z określonym prawdopodobieństwem.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono w sposób przeglądowy problematykę dotyczącą zastosowania metody zbiorów losowych w modelowaniu numerycznym zagadnień geoinżynierskich. Jednym z podstawowych problemów takiego modelowania jest sposób przyjęcia właściwych parametrów wejściowych. Niejednokrotnie informacje o tych parametrach są nieprecyzyjne, niekompletne i obarczone dużą niepewnością. Zastosowanie metody zbiorów losowych w modelowaniach numerycznych daje możliwość przypisania prawdopodobieństwa dla przedziału możliwych zmian wartości wielkości wynikowej np. współczynnika bezpieczeństwa. Efektem obliczeń z wykorzystaniem metody zbiorów losowych jest górna i dolna granica prawdopodobieństwa wystąpienia danej wielkości wynikowej. Taki sposób rozwiązania zagadnienia może być łatwo weryfikowany poprzez porównanie z wynikami pomierzonymi w warunkach rzeczywistych, co zostało pokazane w omówionych przykładach.

Zaproponowana metoda pozwala w sposób probabilistyczny uwzględnić nieprecyzyjne lub niekompletne informacje na temat parametrów wejściowych przyjmowanych do obliczeń numerycznych. Metoda zbiorów losowych pozwala również na uwzględnienie różnych źródeł informacji na temat danego parametru.

Jej wadą jest relatywnie wysoka liczba realizacji procedur obliczeniowych, co przy modelowaniu złożonych zagadnień geoinżynierskich skutkuje znacznie wydłużonym czasem obliczeń.

Literatura

- [1] Barczak, A. 2010. Formalizacja subiektywnej niepewności. Mat. Konf. Nauk. VII Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna *Logistyka, systemy transportowe, bezpieczeństwo w transporcie LOGITRANS 2010*, Szczyrk, 16–18 kwietnia 2010, s. 487–496.
- [2] Brinkgreve, R.B.J. 2000. *PLAXIS, Finite element code for soil and rock analyses*. Users manual. Rotterdam, Balkema.
- [3] Dubois, D. i Prade, H. 1991. Random sets and fuzzy interval analysis. *Fuzzy Sets and Systems* 42, 87–101.
- [4] FLAC – Users Manual. Itasca Consulting Group Inc. Minneapolis, 2007.
- [5] Hall, J.W., Rubio, E. i Anderson, M.J. 2004. Random sets of probability measures in slope hydrology and stability analysis. *ZAMM: J Appl Math Mech* 84(10–11), s. 710–720.
- [6] Helton, J.C. 1997. Uncertainty and Sensitivity Analysis in the Presence of Stochastic and Subjective Uncertainty. *Journal of Statistical Computation and Simulation* Vol. 57, s. 3–76.
- [7] Nasekhian, A. i Schweiger, H.F. 2010. Random set finite element method application to tunneling. M. Beer, R.L. Muhanna, R.L. Mullen (Eds.), Proceedings of the 4th international workshop on reliable engineering computing (REC2010), robust design – coping with hazards, risk and uncertainty. Research Publishing, Singapore, s. 369–385.
- [8] Peschl, G.M. 2004. *Reliability analysis in geotechnics with the random set finite element method*. PhD thesis. Graz: Graz University of Technology.
- [9] Pilecki, Z., Stanisławski, J., Krawiec, K., Woźniak, H. i Pilecka, E. 2014. Numeryczna analiza stateczności skarp i zboczy z wykorzystaniem metody zbiorów losowych. *Zeszyty Naukowe IGSMiE PAN* nr. 86, s. 5–18.

- [10] Pottler, R., Marcher, T., Nasekhian, A. i Schweiger, H.F. 2009. Stability analysis of tunnels – an approach using random set theory. Proc. ITA-AITES World Tunnel Congress: *Safe Tunnelling for the City and Environment*, Budapeszt, Węgry, 23–25 maja 2009, s. 1–11.
- [11] Schweiger, H.F. i Peschl, G.M. 2005. Reliability analysis in geotechnics with the random set finite element method. *Computers and Geotechnics* 32, s. 422–435.
- [12] Schweiger, H.F. i Peschl, G.M. 2007. Basic Concepts and Applications of Random Sets in Geotechnical Engineering. Book Series CISM International Centre for Mechanical Sciences, (eds.) D.V. Griffiths & G.A. Fenton Vol 491, s. 113–126.
- [13] Sysik, P. i Siemińska-Lewandowska, A. 2006. Zastosowanie metody zbiorów losowych do obliczeń tunelu budowanego nową metodą austriacką (NATM). *Górnictwo i Geoinżynieria* rok 29, nr 3/1, s. 1–5.
- [14] Tajduś, A., Cała, M. i Tajduś, K. 2012. *Geomechanika w budownictwie podziemnym. Projektowanie i budowa tuneli*. Wydawnictwa AGH, Kraków.
- [15] Tonon, F., Bernardi, A. i Mammio, A. 2000. Determination of parameters in rock engineering by means of Random Set Theory. *Reliability Engineering and System Safety* 70(2000), s. 241–261.
DOI:10.1016/S0951-8320(00)00058-2.
- [16] Vanmarcke, E.H. 1983. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Londyn: Chapman and Hall.