

Dr hab. Leszek Knopik, prof. nadzw. UTP

Faculty of Management
UTP University of Science and Technology
Fordońska Street 430, 85-890 Bydgoszcz, Poland
e-mail: knopikl@utp.edu.pl

Dr hab. inż. Klaudiusz Migawa, prof. nadzw. UTP

Faculty of Mechanical Engineering
UTP University of Science and Technology
Al. prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, Poland
e-mail: klaudiusz.migawa@utp.edu.pl

Semi-markowski model systemu obsługi z minimalną naprawą **Semi-Markov system model for minimal repair maintenance**

Słowa kluczowe: *wymiana według wieku, naprawa minimalna, naprawa dokładna, zysk na jednostkę czasu, gotowość, procesy semi-Markowa, obsługa prewencyjna, obsługa korekcyjna*

Keywords: *age-replacement, minimal repair, perfect repair, profit per unit time, availability, semi-markov processes, preventive maintenance, corrective maintenance*

Streszczenie: W pracy bada się semimarkowski model wymian według wieku obiektów technicznych. W modelu uwzględnia się dwa rodzaje napraw: naprawy dokładne i naprawy minimalne. Naprawy minimalne w modelach semimarkowskich były badane w literaturze w niewielkim stopniu. Jako kryteria jakości pracy systemu rozważa się asymptotyczny współczynnik gotowości i zysk przypadający na jednostkę czasu. W pracy sformułowano różne warunki istnienia maksimum funkcji kryterialnych. Podane na końcu pracy dwa przykłady numeryczne ilustrują wyniki uzyskane w pracy.

Abstract: This paper analyzes the semi-Markov model of technical objects age-replacements. The model includes two types of repairs: perfect repairs and minimal repairs. Minimal repairs in semi-Markov models have been studied in the literature only to an extent. In this paper, the asymptotic availability coefficient and profit per unit of time are considered as criteria for the quality of the system operation. The paper formulates various conditions for the existence of the maximum of criteria functions. The two numerical examples given at the end of the paper illustrate the results obtained in the paper.

1. Wstęp

Systemy techniczne poddawane są procesom degradacji w czasie długiego okresu użytkowania. Powstające związku z tym uszkodzenia mają negatywny wpływ na bezpieczeństwo i przychody z pracy systemu. Uszkodzenia mogą powodować następne uszkodzenia niekorzystne dla systemu. W celu zmniejszenia liczby uszkodzeń obiektów technicznych do zarządzania systemami wprowadza się różne strategie działań profilaktycznych. Powstaje problem jak zmniejszyć koszty utrzymania systemów. Wymaga to opracowania skutecznych strategii napraw i wymian. Zarządzanie wymianami i naprawami w systemach przemysłowych wymaga wprowadzania do systemu różnych działań związanych z utrzymaniem odpowiedniego poziomu niezawodności i gotowości systemu. Działania te dzielą

się na dwa rodzaje: profilaktyka prewencyjna (preventive maintenance PM) i naprawy (corrective maintenance CM). Działanie corrective maintenance w praktyce jest prowadzone w dwóch wariantach: po naprawie system jest „dobry jak nowy” (perfect repair) oraz „zły jak stary” (minimal repair). Minimalna naprawa przywraca system do jego stanu niezawodnościowego tuż przed uszkodzeniem. W praktyce te działania przywracają system do stanu pośredniego pomiędzy tymi dwoma możliwymi ekstremalnymi przypadkami. Stan powstały w wyniku tej działalności jest określany jako niedokładne utrzymanie (imperfect maintenance). Różnorodne modele niedokładnego utrzymania szczegółowo przedstawiono w pracach przeglądowych [12, 13].

Zmniejszenie kosztów utrzymania systemów realizuje się przez wdrożenie różnych skutecznych strategii działań prewencyjnych i napraw. Do tych czynności wliczamy wymiany ważnych elementów systemu i ustalenie częstości przeglądów. Harmonogram tych czynności jest często ustalany przez projektanta systemu lub producenta. Dział utrzymania ruchu też decyduje o wymianach zużytych elementów. Zawsze działania (CM) wymagają uprzedniej diagnozy uszkodzenia, jego identyfikacji, dlatego są kosztowne i wymagają wysokich umiejętności personelu. Koszty napraw (CM) są na ogół wyższe od kosztów profilaktyki prewencyjnej (PM). Podobnie średnie czasy napraw są większe od średnich czasów profilaktyki prewencyjnej. W przypadku niektórych systemów przemysłowych możliwe jest również naprawienie uszkodzonego komponentu bez jego wymiany. Ten rodzaj naprawy można uznać za minimalną naprawę (MR). Minimalna naprawa przywraca uszkodzony obiekt do stanu przed wystąpieniem uszkodzenia. Z tego punktu widzenia niektóre wymiany można uznać za minimalne naprawy. Opierając się na tej argumentacji w literaturze zaproponowano dużo praktycznych modeli wymian z minimalną naprawą. Z tych powodów opracowanie różnych strategii działań prewencyjnych, które proponują optymalne modele decyzyjne w celu zmniejszenia kosztów utrzymania systemu i zmniejszenia ryzyka zdarzeń niepożądanych jest ważnym tematem badawczym w inżynierii niezawodności. W ostatnich czterech dekadach modele utrzymania prewencyjnego wzbudziły rosnące zainteresowanie badaniami niezawodności systemów.

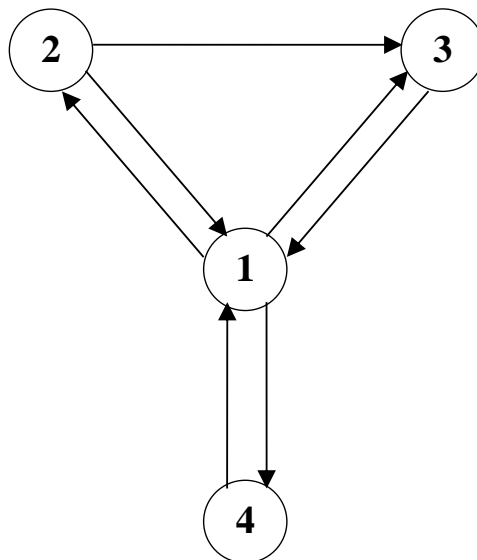
Pojęcie minimalnej naprawy wprowadzili Brown i Prochan w pracy [2]. W modelu minimalnej naprawy zakłada się, że gdy nastąpi uszkodzenie, to z prawdopodobieństwem p wykonuje się naprawę dokładną i z prawdopodobieństwem $1 - p$ naprawę minimalną. Naprawa dokładna przywraca obiekt techniczny do stanu „dobry jak nowy”. Jeśli $p = 0$, to naprawa jest zawsze minimalna, natomiast jeśli $p = 1$, to naprawa jest zawsze dokładna. Pham i Wang w pracy [13] nazwali taki mechanizm naprawy niedokładnym modelem utrzymania z regułą (p, q) . W pracy [2] zakłada się, że prawdopodobieństwo naprawy dokładnej zależy od wieku obiektu technicznego w momencie awarii. W literaturze budowa modelu minimalnych napraw jest dokonywana różnymi metodami matematycznymi. Przegląd wykorzystywanych metod konstrukcji funkcji kryterialnych w modelach minimalnych napraw z utrzymaniem prewencyjnym według wieku jest w pracach [12, 13]. Jednak tylko jedna cytowana tam praca [3] wykorzystuje procesy semi-Markowa. Nowszy przegląd prac dotyczących minimalnych napraw zawiera książka [15]. Niedawno uzyskano nowe wyniki dotyczące minimalnych napraw w pracach [4, 5, 16, 17]. Ekonomiczny punkt widzenia na problem minimalnych napraw rozważa się w pracy [6]. Dodatkowo ta praca zawiera aktualny i obszerny przegląd literatury dotyczący minimalnych napraw i wymian prewencyjnych.

W tej pracy rozważa się strategię utrzymania systemu przy zastosowaniu (p, q) reguły wymian według wieku. Analizuje się możliwość zastosowania procesów semi-Markowa do budowy modelu wymian profilaktycznych w systemach z minimalną naprawą. Podstawą do budowania funkcji kryterialnej jest pewne twierdzenie graniczne dla procesów semi-Markowa [7, 8]. Takie podejście do budowy funkcji kryterialnej zastosowano w pracach [11, 12]. Wyniki pracy [3] są szczególnym przypadkiem wyników uzyskanych dla modelu 3-stanowego w pracy

[11] i tej pracy. W tej pracy w przeciwieństwie do większości prac z utrzymania systemów czasy napraw nie są pomijalne. Jako funkcję kryterialną w pracy bada się zysk na jednostkę czasu i współczynnik gotowości systemu. Sformułowano warunki dostateczne istnienia jednoznacznego maksimum obu funkcji kryterialnych. W rozdziale 2 zdefiniowano model 4-stanowy wymian z minimalnymi naprawami oraz określa się funkcję kryterialną jako zysk przypadający na jednostkę czasu. Rozdział 3 zawiera warunki dostateczne istnienia maksimum zysku na jednostkę czasu oraz maksimum współczynnika gotowości. W rozdziale 4 analizuje się dwa przykłady numeryczne pokazujące wyniki uzyskane w pracy. W pierwszym przykładzie maksymalizuje się współczynnik gotowości, natomiast w drugim zysk na jednostkę czasu. W obu przykładach założono, że czas do uszkodzenia ma rozkład Weibulla.

2. Funkcja kryterialna

W pracy bada się system, w którym obiekt techniczny może się znajdować w jednym z czterech stanów: S_1 – stan pracy bezawaryjnej, S_2 – stan minimalnej naprawy, S_3 – stan dokładnej naprawy, S_4 – stan wymiany prewencyjnej. Możliwe zmiany stanów pokazuje graf przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1. Graf skierowany zmian stanów $S = \{ S_1, S_2, S_3, S_4 \}$

Fig. 1. Directed graph for changes of states $S = \{ S_1, S_2, S_3, S_4 \}$

W przypadku, gdy znamy prawdopodobieństwa przejścia między stanami mamy określony łańcuch Markowa. Macierz przejść łańcucha Markowa ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązując odpowiedni układ równań liniowych otrzymuje się prawdopodobieństwa graniczne dla łańcucha Markowa. Analizowany łańcuch posiada następujące prawdopodobieństwa graniczne:

$$\begin{aligned}
p_1^* &= 1 / M, \\
p_2^* &= p_{12} / M, \\
p_3^* &= (p_{13} + p_{12} p_{23}) / M, \\
p_4^* &= p_{14} / M, \\
&\text{gdzie } M = 2 + p_{12} p_{23}.
\end{aligned} \tag{1}$$

W pracy bada się semimarkowski model napraw i wymian prewencyjnych według wieku. Rozważa się 4–stanowy proces semimarkowski $X(t)$ z przestrzenią stanów $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Jeśli $X(t) = i$, to rozważany obiekt techniczny w chwili t jest w stanie i . Przez z_i , $i = 1, 2, 3, 4$ oznacza się zysk na jednostkę czasu dla stanu i . W pracy zakłada się, że $z_1 > 0$, $z_i \leq 0$ dla $2 \leq i \leq 4$. Jeśli obiekt techniczny jest w stanie 1, to przynosi zysk, natomiast jeśli obiekt techniczny jest w stanie i , gdzie $2 \leq i \leq 4$, to obiekt techniczny generuje stratę.

Jednostka jest wymieniana w wieku T lub gdy jest uszkodzona, cokolwiek nastąpi wcześniej. Przez $T_1(x)$ definiuje się czas do wymiany lub uszkodzenia. Zmienną $T_1(x)$ można zapisać jako

$$T_1(x) = \begin{cases} T_1, & \text{if } T_1 < x, \\ x, & \text{if } T_1 \geq x. \end{cases} \tag{2}$$

W pracy [11] udowodniono, że zysk przypadający na jednostkę czasu wyraża się wzorem

$$L = \frac{\sum_{i=1}^4 z_i p_i^* E T_i}{\sum_{i=1}^4 p_i^* E T_i}, \tag{3}$$

gdzie $E T_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ jest średnim czasem przebywania obiektu technicznego w stanie S_i .

Zakłada się, że po upływie czasu x , jeśli obiekt nie uszkodził się, to przechodzi do stanu prewencji (wymiany). Proces zmian stanów s_i , $i = 1, 2, 3, 4$, przy uwzględnieniu wymiany prewencyjnej po czasie x jest nowym procesem semi-Markowa z macierzą $P(x)$ prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa. W stosunku do macierzy P opisanej wyżej zmienia się tylko pierwszy wiersz macierzy P . W szczególności na podstawie pracy [11] można napisać:

$$\begin{aligned}
p_{12}(x) &= p_{12} F_{12}(x), \\
p_{13}(x) &= p_{13} F_{13}(x), \\
p_{14}(x) &= p_{14} F_{14}(x) + R_1(x).
\end{aligned}$$

gdzie:

$F_{ij}(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$ są dystrybuantami warunkowymi czasu przebywania w stanie i , przed przejściem do stanu j , definiowane następująco:

$$F_{ij}(t) = P \left\{ \tau_{k+1} - \tau_k < t \mid X(\tau_{k+1}) = j, X(\tau_k) = i \right\}, \text{ dla } i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$R_1(x) = 1 - F_1(x)$ jest funkcją niezawodności czasu T_1 .

W celu uproszczenia obliczeń zakłada się, że prawdziwe są równości:

$$F_{12}(x) = F_{13}(x) = F_{14}(x) = F_1(x).$$

Na podstawie pracy [11] funkcja kryterialna ma postać

$$g(x) = \frac{z_1 ET_1(x) p_1^*(x) + z_2 ET_2 p_2^* + z_3 ET_3 p_3^* + z_4 ET_4 p_4^*}{ET_1(x) p_1^*(x) + ET_2 p_2^* + ET_3 p_3^* + ET_4 p_4^*}. \quad (4)$$

Wartości średnią $ET_1(x)$ oblicza się ze wzoru

$$ET_1(x) = \int_0^x dF_1(t) + xP\{T_1 \geq x\}.$$

Całkując przez części, otrzymuje się

$$ET_1(x) = \int_0^x R_1(t) dt.$$

Prawdopodobieństwa graniczne $p_1^*(x)$, $p_2^*(x)$, $p_3^*(x)$ są prawdopodobieństwami dla łańcucha Markowa z macierzą

$$P(x) = \begin{bmatrix} 0 & p_{12}(x) & p_{13}(x) & p_{14}(x) \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie wzorów (1) można zapisać jako:

$$\begin{aligned} p_1^*(x) &= 1 / M(x), \\ p_2^*(x) &= p_{12}(x) / M(x), \\ p_3^*(x) &= (p_{13}(x) + p_{12}(x) p_{23}) / M(x), \\ p_4^*(x) &= p_{14}(x) / M(x), \\ \text{gdzie } M(x) &= 2 + p_{12}(x) p_{23}. \end{aligned} \quad (5)$$

ET_2 , ET_3 i ET_4 są wartościami średnimi czasów przebywania obiektu w stanach S_2 , S_3 i S_4 systemu.

Na podstawie (5) funkcja kryterialna (4) wyraża się wzorem

$$g(x) = \frac{z_1 ET_1(x) + p_{12} F_1(x) z_2 ET_2 + [p_{13} F_1(x) + p_{12} p_{23} F_1(x)] z_3 ET_3 + [1 - p_{12} F_1(x) - p_{13} F_1(x)] z_4 ET_4}{ET_1(x) + p_{12} F_1(x) ET_2 + [p_{13} F_1(x) + p_{12} p_{23} F_1(x)] ET_3 + [1 - p_{12} F_1(x) - p_{13} F_1(x)] ET_4}.$$

Po przegrupowaniu można zapisać

$$g(x) = \frac{z_1 ET_1(x) + F_1(x) [p_{12} z_2 ET_2 + p_{12} p_{23} z_3 ET_3 + p_{13} z_3 ET_3 - p_{12} z_4 ET_4 - p_{13} z_4 ET_4] + z_4 ET_4}{ET_1(x) + F_1(x) [p_{12} ET_2 + p_{12} p_{23} ET_3 + p_{13} ET_3 - p_{12} ET_4 - p_{13} ET_4] + ET_4}.$$

Teraz licznik i mianownik funkcji kryterialnej można przedstawić jako:

$$L(x) = z_1 ET(x) + F_1(x) B_1 + C_1,$$

$$M(x) = ET(x) + F_1(x) B + C.$$

Analogicznie

$$g(x) = \frac{z_1 ET_1(x) + F_1(x) B_1 + C_1}{ET_1(x) + F_1(x) B + C},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} B_1 &= p_{12} z_2 ET_2 + p_{12} p_{23} z_3 ET_3 - p_{12} z_4 ET_4 + p_{13} ET_3 z_3 - p_{13} z_4 ET_4, \\ C_1 &= z_4 ET_4, \\ B &= p_{12} ET_2 + p_{12} p_{23} ET_3 - p_{12} ET_4 + p_{13} ET_3 - p_{13} ET_4, \\ C &= ET_4. \end{aligned}$$

Po prostych przekształceniach jest:

$$\begin{aligned} B_1 &= p_{12} z_2 ET_2 + z_3 ET_3 (p_{12} p_{23} + p_{13}) - z_4 ET_4 (p_{12} + p_{13}), \\ B &= p_{12} ET_2 + ET_3 (p_{12} p_{23} + p_{13}) - ET_4 (p_{12} + p_{13}). \end{aligned}$$

Wprowadza się oznaczenia:

$$\begin{aligned} \alpha &= -B z_1 + B_1, \\ \beta &= C z_1 - C_1, \\ \gamma &= CB_1 - C_1 B. \end{aligned}$$

Współczynniki α , β i γ odgrywają ważną rolę przy formułowaniu warunków dostatecznych istnienia ekstremów funkcji kryterialnych.

3. Warunki istnienia maksimum funkcji kryterialnych

Niżej formułuje się założenia na wartości parametrów badanego systemu. Założenia te muszą oddawać rzeczywiste relacje między naprawami dokładnymi, naprawami minimalnymi i wymianami prewencyjnymi:

Z1. $z_1 > 0$, $z_2 < 0$, $z_3 < 0$, $z_4 < 0$. Ostanie oznacza, że obiekt techniczny przynosi zysk jedynie w stanie S_1 , pozostałe stany wymagają nakładów.

Z2. $ET_3 > ET_4$, średni czas wymiany (prewencji) jest mniejszy od średniego czasu naprawy dokładnej.

Z3. $z_3 < z_4$, koszt jednostkowy ($-z_4$) wymiany (prewencji) jest większy od kosztu jednostkowego ($-z_3$) naprawy dokładnej.

Z4. $ET_3 > ET_2$, średni czas naprawy minimalnej jest mniejszy od średniego czasu naprawy dokładnej.

Z5. $z_3 < z_2$, koszt jednostkowy ($-z_2$) naprawy minimalnej jest większy od kosztu jednostkowego ($-z_3$) naprawy dokładnej.

Powyższe założenia nie zawierają relacji między stanem minimalnej naprawy i stanem wymiany prewencyjnej. W praktyce nie wiadomo jaka jest relacja między wartościami średnimi ET_2 i ET_4 oraz z_2 i z_4 . Jednak jeśli $z_2 - z_4 \leq 0$, to na podstawie założenia Z3 jest $\gamma < 0$.

Niżej formułuje się warunki dostateczne na to, aby prawdziwe były nierówności $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$.

Powyższe warunki będą formułowane w zależności od średnich czasów ET_i , kosztów z_i , $i = 1, 2, 3, 4$ oraz elementów macierzy $P = [p_{ij}]$, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Stosunkowo łatwo można obliczyć, że $\beta = ET_4 (z_1 - z_4)$.

Z założenia Z1 wynika, że $\beta > 0$.

Współczynnik α wyraża się za pomocą wzoru

$$\alpha = p_{12} ET_2 (z_2 - z_1) + (p_{12} p_{23} + p_{13}) ET_3 (z_3 - z_1) + ET_4 (p_{12} + p_{13}) (z_1 - z_4). \quad (6)$$

Nierówność $\alpha < 0$ jest równoważna nierówności

$$(p_{12} p_{23} + p_{13}) ET_3 > p_{12} ET_2 (z_2 - z_1) / (z_1 - z_3) + ET_4 (p_{12} + p_{13}) (z_1 - z_4) / (z_1 - z_3). \quad (7)$$

Podobnie wyznacza się współczynnik γ

$$\gamma = ET_2 [ET_4 p_{14} (z_2 - z_4) + ET_3 (p_{12} p_{23} + p_{13}) (z_3 - z_4)]. \quad (8)$$

Nierówność $\gamma < 0$ jest równoważna nierówności

$$(p_{12} p_{23} + p_{13}) ET_3 > ET_4 p_{14} (z_2 - z_4) / (z_4 - z_3). \quad (9)$$

Oznaczamy prawe strony nierówności (7) i (9) odpowiednio przez δ_1 i δ_2 . Niech $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$. Warunek $(p_{12} p_{23} + p_{13}) ET_3 > \delta$ i (6), (7), (8) i (9) implikują nierówności $\alpha < 0$, $\gamma < 0$. Można teraz podać następujący wniosek:

Wniosek 1. Jeśli $p_{23} > (\delta / ET_3 - p_{13}) / p_{12}$, to prawdziwe są nierówności $\alpha < 0$, $\gamma < 0$.

W literaturze dotyczącej minimalnych napraw [2, 13, 14], zakłada się, że jeśli obiekt techniczny przechodzi ze stanu pracy do stanu uszkodzenia, to stan minimalnej naprawy osiąga z prawdopodobieństwem równym $1 - p$, natomiast stan naprawy dokładnej z prawdopodobieństwem p . Na podstawie elementarnych własności prawdopodobieństwa warunkowego wiadomo, że prawdziwa jest równość

$$p_{12} / p_{13} = (1 - p) / p. \quad (10)$$

Wniosek 2. Jeśli $T \in \text{IFR}$, $\lambda(t)$ jest różniczkowalna, $\alpha < 0$, $\gamma < 0$, $\beta > 0$, $\beta + \gamma f(0^+) > 0$, $\lambda(\infty) \alpha ET + \beta - \alpha < 0$, to funkcja kryterialna $g(x)$ osiąga wartość maksymalną.

Dowód.

Pochodna $g'(x)$ funkcji ma postać

$$g'(x) = \{\alpha[f(x) ET(x) - R(x) F(x)] + \beta R(x) + \gamma f(x)\} / M^2(x),$$

gdzie $M(x)$ jest mianownikiem funkcji kryterialnej $g(x)$.

Wiadomo, że jeśli czas do uszkodzenia T należy do klasy rozkładów MTFR, to prawdziwa jest równość $H(x) = \lambda(x) ET(x) - F(x) \geq 0$ dla $x \geq 0$. Klasa rozkładów MTFR została zbadana w pracach [9, 10]. Do klasy MTFR należą niektóre rozkłady czasów życia z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń [9, 10]. Z tego, że pochodna $H'(x)$ ma postać $H'(x) = \lambda'(x) ET(x)$ wynika, że jeśli funkcja intensywności uszkodzeń $\lambda(t)$ rośnie, to funkcja $H(x)$ też rośnie. Klasa rozkładów z niemalejącą funkcją intensywności uszkodzeń (IFR) zawiera się w klasie MTFR. Znak pochodnej jest taki sam jak znak funkcji

$$h(x) = \alpha[\lambda(x) ET(x) - F(x)] + \beta + \gamma \lambda(x).$$

Wiadomo, że $H(0^+) = 0$, stąd $h(0^+) = \beta + \gamma f(0^+) > 0$. Z tego, że $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$ i funkcja $H(x)$ rośnie wynika, że funkcja $h(x)$ maleje od wartości $h(0^+) = \beta + \gamma f(0^+) > 0$ do wartości $h(\infty) = \lambda(\infty) \alpha ET + \beta - \alpha < 0$. Wynika stąd, że pochodna $g'(x)$ dokładnie jeden raz zmienia znak

z „+” na „-”. Stąd wnioskuję się, że funkcja kryterialna $g(x)$ osiąga dokładnie jedno maksimum. \square

Jeśli $\lambda(\infty) = \infty$, to do istnienia maksimum funkcji kryterialnej $g(x)$ wystarczają warunki: $T \in \text{IFR}$, różniczkowalność $\lambda(t)$, $\alpha < 0$, $\gamma < 0$, $\beta > 0$, $\beta + \gamma f(0^+) > 0$. Przykładem takiego rozkładu jest rozkład Weibulla z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń.

Z wniosków 1 i 2 wynika następujący warunek dostateczny istnienia maksimum funkcji kryterialnej:

Wniosek 3. Jeśli $T \in \text{IFR}$, $\lambda(t)$ jest różniczkowalna, $\beta + \gamma \lambda(0^+) > 0$, $p_{23} > (\delta / ET_3 - p_{13}) / p_{12}$, $\lambda(\infty) \alpha ET + \beta - \alpha < 0$, to funkcja kryterialna $g(x)$ osiąga wartość maksymalną.

Niżej formułuję się warunek dostateczny istnienia maksimum asymptotycznego współczynnika gotowości. Aby otrzymać z funkcji kryterialnej $g(x)$ współczynnik gotowości wystarczy przyjąć następujące warunki: $z_1 = 1$, $z_2 = z_3 = z_4 = 0$. Po uwzględnieniu tych warunków we wzorze (4) otrzymuje się $B_1 = 0$, $C_1 = 0$. Stąd na podstawie (2), (3) i (5) dla α , β , γ można obliczyć:

$$\begin{aligned} \alpha = -B &= -p_{12} ET_2 - (p_{12} p_{23} + p_{13}) ET_3 + (p_{12} + p_{13}) ET_4, \\ \beta &= ET_4, \\ \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Nierówność $\alpha < 0$ jest równoważna nierówności

$$p_{23} > \{[ET_4(1 + p_{13} / p_{12}) - ET_2] / ET_3\} - p_{13} / p_{12}.$$

Ostatnią nierówność przy uwzględnieniu (7) można zapisać w postaci

$$p_{23} > \{[ET_4 / (1 - p) - ET_2] / ET_3\} - p / (1 - p).$$

Uwzględniając, że $\beta > 0$ i $\gamma = 0$, można teraz sformułować warunek dostateczny istnienia maksimum współczynnika gotowości.

Wniosek 4. Jeśli $T \in \text{IFR}$, $\lambda(t)$ jest różniczkowalna, $\lambda(\infty) \alpha ET + \beta - \alpha < 0$, $p_{23} > \{[ET_4 / (1 - p) - ET_2] / ET_3\} - p / (1 - p)$, to współczynnik gotowości osiąga dokładnie jedną wartość maksymalną.

Dowód.

Pochodna $g'(x)$ funkcji ma postać: $g'(x) = \{\alpha[f(x) ET(x) - R(x) F(x)] + \beta R(x)\} / M^2(x)$, gdzie $M(x)$ jest mianownikiem funkcji kryterialnej $g(x)$.

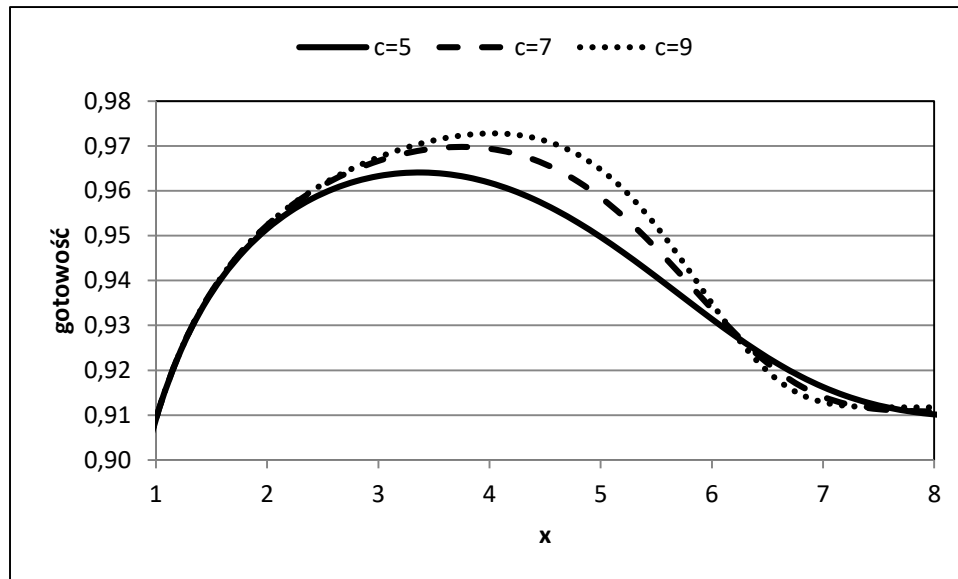
Jeśli funkcja intensywności uszkodzeń $\lambda(t)$ rośnie, to funkcja $H(x)$ rośnie. Znak pochodnej jest taki sam jak znak funkcji $h(x) = \alpha[\lambda(x) ET(x) - F(x)] + \beta$. Wiadomo, że $H(0^+) = 0$, stąd $h(0^+) = \beta > 0$.

Z tego, że $p_{23} > \{[ET_4 / (1 - p) - ET_2] / ET_3\} - p / (1 - p)$, wynika, że $\alpha < 0$ i funkcja $h(x)$ maleje od wartości $h(0^+) = \beta > 0$ do wartości $h(\infty)$. Jeśli $h(\infty) = \lambda(\infty) \alpha ET + \beta - \alpha < 0$, to oznacza, że pochodna $g'(x)$ dokładnie jeden raz zmienia znak z „+” na „-”. Stąd wnioskuję się, że współczynnik gotowości $g(x)$ osiąga dokładnie jedno maksimum. \square

Jeśli $\lambda(\infty) = \infty$, to do istnienia maksimum współczynnika gotowości wystarczają warunki $T \in \text{IFR}$, $p_{23} > \{[ET_4 / (1 - p) - ET_2] / ET_3\} - p / (1 - p)$.

4. Przykłady numeryczne

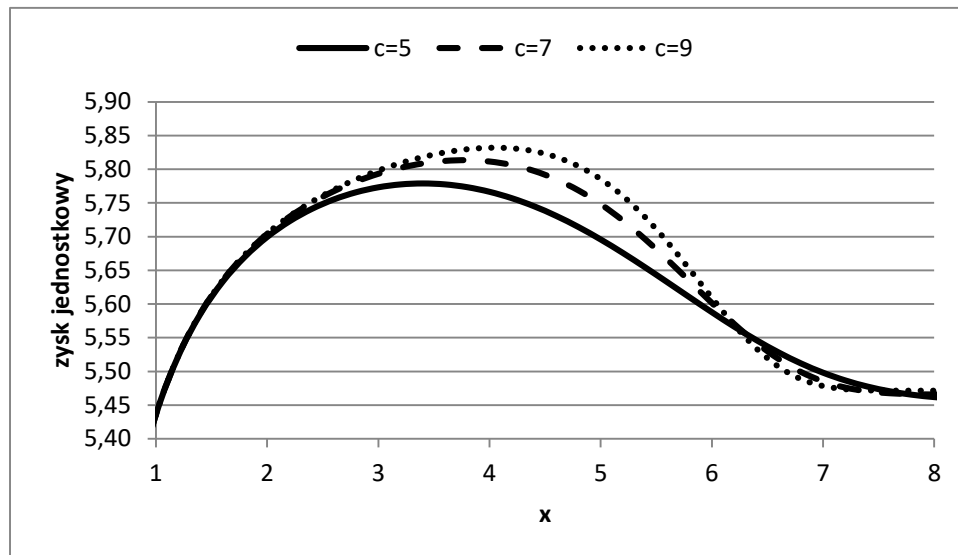
Przykład 1. W tym przykładzie analizuje się przykład wyznaczania wartości funkcji $g(x)$, w przypadku, gdy $g(x)$ jest współczynnikiem gotowości. W obliczeniach przyjęto następujące dane: wartości średnie czasów przebywania obiektu technicznego w stanach $ET_2 = 0,2$, $ET_3 = 0,5$, $ET_4 = 0,1$, przyjęto dla czasu do uszkodzenia T rozkład Weibulla z parametrem skali $b = 6$. Przyjęto niezerowe elementy macierzy P jako $p_{12} = 0,2$, $p_{13} = 0,6$, $p_{14} = 0,2$, $p_{21} = 0,2$, $p_{23} = 0,7$. Przyjęto wartości parametru c formy (kształtu) rozkładu Weibulla $c \in \{5, 6, 7\}$. W każdym z trzech analizowanych przypadków istnieje optymalna wartość czasu wymiany.



Rys. 2. Wykresy zmian wartości współczynnika gotowości w zależności od czasu wymiany prewencyjnej x , dla $c \in \{5, 6, 7\}$

Fig. 2. Charts of changes in the value of availability coefficient depending on the time of preventive replacement x , for $c \in \{5, 6, 7\}$

Przykład 2. W tym przykładzie analizuje się przypadek wyznaczania wartości funkcji $g(x)$, w przypadku, gdy $g(x)$ jest zyskiem na jednostkę czasu. W obliczeniach przyjęto wartości średnie czasów przebywania w stanach, macierz prawdopodobieństw P i parametru skali rozkładu Weibulla takie same jak w przykładzie 1. Wartości parametru c formy (kształtu) rozkładu Weibulla $c \in \{5, 6, 7\}$. Do obliczeń jako zyski jednostkowe przyjęto $z_1 = 6$, $z_2 = -0,1$, $z_3 = -0,8$, $z_4 = -0,2$.



Rys. 3. Wykresy zmian wartości zysku na jednostkę czasu w zależności od czasu wymiany prewencyjnej x , dla $c \in \{5, 6, 7\}$

Fig. 3. Charts of changes in the value of profit per unit time coefficient depending on the time of preventive replacement x , for $c \in \{5, 6, 7\}$

Dla wszystkich wartości parametru c formy rozkładu Weibulla funkcja kryterialna osiąga wartość maksymalną. Analiza zależności punktu x_{\max} , w którym funkcja kryterialna $g(x)$ osiąga wartość maksymalną pokazuje, że wraz ze wzrostem wartości parametru c rośnie wartość x_{\max} i maksymalna wartość funkcji kryterialnej.

6. Wnioski

Systemy utrzymania realizujące dwa rodzaje napraw: naprawy minimalne i naprawy dokładne posiadają szeroką literaturę. Jednak zastosowanie procesów semi-Markowa jest niewielkie. W tej pracy pokazano, że zastosowanie do wyznaczania optymalnych strategii działań prewencyjnych w systemach z minimalną naprawą procesów semi-Markowa pozwala na sformułowanie ciekawych wniosków. Dla analizowanych w pracy funkcji kryterialnych (gotowość i zysk na jednostkę czasu) sformułowano warunki dostateczne istnienia maksimum tych funkcji kryterialnych. Funkcje kryterialne rozważa się w niekończonym horyzoncie czasowym. Sformułowanie silniejszych warunków wymaga ustalenia relacji między średnimi czasami przebywania obiektu technicznego i zyskami jednostkowymi w stanach minimalnej naprawy i wymiany prewencyjnej.

Literatura

1. Block H W, Borges W, Savits T H. Age-dependent minimal repair. *Journal of Applied Probability*, 1985; 22: 370-386.
2. Brown M, Prochan F. Imperfect Repair. *Journal of Applied Probability*, 1983; 20: 851-859.
3. Chan P K W, Downs T. Two criteria for preventive maintenance. *IEEE Transaction on Reliability*, 1978; 27: 272-273.

4. Chang C C, Sheu S H, Chen Y L, Zhang Z G. A multi-criteria optimal replacement policy for a system subject to shocks. *Computer and Industrial Engineering*, 2011; 61: 1035-1043.
5. Chang C C, Sheu S H, Chen Y L. A bivariate optimal replacement policy for system with age-dependent minimal repair and cumulative repair-cost limit. *Communications in statistics – Theory and methods*, 2013; 42(22): 4108-4126.
6. Chin-Chih, Chang. Optimum preventive maintenance policies for system subject to random working time, replacement, and minimal repair. *Computers & Industrial Engineering*, 2014; 67: 185-194.
7. Grabski F. *Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji [Semi-Markov models of reliability and maintenance]*. Warszawa: IBS PAN, 2002.
8. Grabski F. *Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance*. Elsevier, Amsterdam, 2014.
9. Knopik L. Some results on ageing class. *Control and Cybernetics*, 2005; 34(4): 1175-1180.
10. Knopik L. Characterization of a class of lifetime distributions. *Control and Cybernetics*, 2006; 35(2): 1175-1180.
11. Knopik L, Migawa K. Multi-state model of maintenance policy. *Maintenance and Reliability*, 2018; 20(1): 125-130.
12. Knopik L, Migawa K. Optimal age-replacement policy for non-repairable technical objects with warranty. *Maintenance and Reliability*, 2017; 19(2): 172-178.
13. Pham H, Wang H. Imperfect maintenance. *European Journal of Operational Research*, 1996; 94: 425-438.
14. Pham H, Wang H. *Probability and Optimal Maintenance*. Springer Verlag, London, 2006.
15. Tadj L, Ouali M S, Yacount S, Ait-Kadi D. Replacement Models with minimal Repair, Chapter: A Survey of Replacement Models with Minimal Repair, Springer Verlag, London, 2011.
16. Xia, Xi, Zhou. Modeling and optimizing maintenance schedule for energy systems subject to degradation. *Computer and Industrial Engineering*, 2012; 63(3): 607-614.
17. Xu, Chen, Yang. Optimal replacement policy for safety-related multi-component multi-state systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 2012; 99: 87-95.