

DEKODOWANIE DETEKCYJNO - KOREKCYJNE KODÓW DWUKROTNIE ITEROWANYCH NA BAZIE ROZSZERZONEGO KODU HAMMINGA I KODU Z KONTROLĄ PARZYSTOŚCI

Streszczenie

W pracy analizowano dwie metody dekodowania detekcyjno-korekcyjnego kodów dwukrotnie iterowanych na bazie rozszerzonego kodu Hamminga dla kodowania wierszy kodu z kontrolą parzystości dla kodowania kolumn różniące się ilością korygowanych i wykrywanych błędów. Podano algorytmy dekodowania detekcyjno-korekcyjnego umożliwiające poprawną korekcję i detekcję odpowiedniej ilości błędów. Opracowane algorytmy dekodowania bazują na dwóch rodzajach korekcji: korekcji na podstawie syndromów wierszy i korekcji na podstawie liczby syndromów różnych od zera. W pierwszym przypadku jest to klasyczna korekcja błędów dla kodów Hamminga, w których syndrom ciągu odebranego wskazuje korygowaną pozycję. W drugim przypadku korekcja jest przeprowadzana na pozycjach wyznaczonych przez numer wiersza i numery kolumn, w których syndromy są różne od zera. W pierwszym algorytmie dekodowania występuje jedna faza dekodowania, w której przeprowadza się korekcję na podstawie syndromów wierszy w sytuacji, gdy tylko w jednym wierszu i jednej kolumnie występują syndromy różne od zera. W pozostałych przypadkach podejmowana jest decyzja o wykryciu błędu. Algorytm ten umożliwia poprawną korekcję błędów pojedynczych i wykrycie błędów o krotnościach mniejszych od siedmiu. W drugim algorytmie dekodowania występują dwie fazy dekodowania i w obu przeprowadzane są korekcje błędów. Algorytm ten umożliwia poprawną korekcję wszystkich błędów o krotnościach jeden, dwa, trzy i część błędów o krotności cztery, pozostała część błędów o tej krotności będzie wykrywana. Z dokładnych analiz pracy dekodatorów przedstawionych w tabelach można wywnioskować, że działają one poprawnie, to znaczy korygują i wykrywają właściwą liczbę błędów wynikającą z własności detekcyjno-korekcyjnych zastosowanego kodu.

WSTĘP

Kodowe metody eliminacji skutków działania zakłóceń podczas przesyłania informacji cyfrowej polegają na wprowadzeniu informacji, która umożliwia wykrywanie i korygowanie części powstałych błędów kosztem zmniejszenia szybkości transmisji [1]. Zastosowanie kodów iterowanych w systemach przesyłania informacji sprawia, że można w elastyczny sposób kształtować własności detekcyjno-korekcyjne systemu. Idea kodowania 2-krotnie iterowanego polega na umieszczeniu kodowanego ciągu informacyjnego w dwuwymiarowej tabeli i użyciu jednego kodu o parametrach (n^w, m^w) i d_{\min}^w do kodowania wierszy tabeli oraz użyciu drugiego kodu o parametrach (n^k, m^k) i d_{\min}^k do kodowania kolumn tabeli (ozn. n^w i n^k – długości ciągów kodowych, m^w i m^k – długości ciągów informacyjnych d_{\min}^w i d_{\min}^k – minimalne odległości Hamminga). W wyniku takich działań uzyskany kod 2-krotnie iterowany posiada parametry będące iloczynem odpowiednich parametrów kodów bazowych $(n^w \cdot n^k, m^w \cdot m^k)$ i $d_{\min} = d_{\min}^w \cdot d_{\min}^k$ [2].

Podstawowym parametrem określającym własności detekcyjno-korekcyjne kodu jest minimalna odległość Hamminga d_{\min} [7, 8]. Zależność pomiędzy minimalną odległością Hamminga d_{\min} a maksymalną krotnością błędów wykrywanych γ i błędów korygowanych t jest następująca [2]

$$d_{\min} = t + \gamma + 1 \quad (1)$$

W artykułach [3, 4] przedstawiono opisy algorytmów dekodowania „czysto” korekcyjnego i dekodowania detekcyjno-korekcyjnego systemu przesyłania informacji z kodami dwukrotnie iterowanymi na bazie kodów Hamminga. W niniejszej pracy analizowane są podobne zagadnienia, ale związane z dekodowaniem detekcyjno-korekcyjnym kodów dwukrotnie iterowanych na bazie rozszerzonego kodu Hamminga (gdzie $n^w = 2^i$, $i = 2, 3, 4, \dots$) [9] dla kodowania wierszy i kodu z kontrolą parzystości (gdzie $n^k > 1$) dla kodowania kolumn.

Jak wiadomo [2] rozszerzony kod Hamminga posiada $d_{\min}^w = 4$, a kod z kontrolą parzystości $d_{\min}^k = 2$, tak więc kod dwukrotnie iterowany zbudowany na bazie tych kodów będzie posiadał $d_{\min} = 8$. W zależności od zastosowanej metody dekodowania detekcyjno-korekcyjnego można zbudować trzy różne rodzaje dekodatorów tego typu:

- korygujący błędy pojedyncze i wykrywający wszystkie błędy o krotnościach mniejszych od siedmiu ($t = 1, \gamma = 6$);
- korygujący błędy pojedyncze i podwójne oraz wykrywający błędy o krotnościach mniejszych od sześciu ($t = 2, \gamma = 5$);
- korygujący błędy pojedyncze, podwójne i potrójne oraz wykrywający błędy o krotnościach cztery ($t = 3, \gamma = 4$).

W artykule scharakteryzowano dwa sposoby dekodowania detekcyjno-korekcyjnego ($t = 1, \gamma = 6$) i ($t = 3, \gamma = 4$) określając algorytmy działania dekodatorów, dokonując szczegółowej analizy wpływu ilości i rozkładów błędów na podejmowane przez dekodery decyzje.

1. REGUŁA KODOWANIA

Proces kodowania w kodzie dwukrotnie iterowanym polega na umieszczeniu ciągu informacyjnego \vec{h} na pozycjach, które są pozycjami informacyjnymi zarówno w jednym jak i w drugim kodzie bazowym

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m^w} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m^w} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ h_{m^k 1} & h_{m^k 2} & \dots & h_{m^k m^w} \end{bmatrix} \quad (2)$$

oraz wyznaczeniu pozostałych elementów nadmiarowych ciągu \vec{s}

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & h_{11} & s_{14} & h_{12} & \dots & h_{1m^w} & s_{1n^w} \\ s_{21} & s_{22} & h_{21} & s_{24} & h_{22} & \dots & h_{2m^w} & s_{2n^w} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m^k 1} & s_{m^k 2} & h_{m^k 1} & s_{m^k 4} & h_{m^k 2} & \dots & h_{m^k m^w} & s_{m^k n^w} \\ s_{n^k 1} & s_{n^k 2} & s_{n^k 3} & s_{n^k 4} & s_{n^k 5} & \dots & s_{n^k (n^w-1)} & s_{n^k n^w} \end{bmatrix} \quad (3)$$

z odpowiednich równań charakterystycznych dla zastosowanych kodów bazowych

$$\begin{cases} s_{i1} = s_{i3} \oplus s_{i5} \oplus s_{i7} \oplus s_{i9} \oplus s_{i11} \oplus s_{i13} \oplus s_{i15} \dots \\ s_{i2} = s_{i3} \oplus s_{i6} \oplus s_{i7} \oplus s_{i10} \oplus s_{i11} \oplus s_{i14} \oplus s_{i15} \dots \\ s_{i4} = s_{i5} \oplus s_{i6} \oplus s_{i7} \oplus s_{i12} \oplus s_{i13} \oplus s_{i14} \oplus s_{i15} \dots \\ \vdots \\ s_{in^w} = s_{i1} \oplus s_{i2} \oplus s_{i3} \oplus \dots \oplus s_{ij} \oplus \dots \oplus s_{i(n^w-1)} \\ \vdots \\ s_{n^k l} = s_{1l} \oplus s_{2l} \oplus s_{3l} \oplus \dots \oplus s_{il} \oplus \dots \oplus s_{m^k l} \end{cases} \quad (4)$$

dla $i = 1, 2, 3, \dots, m^k$
 $j = 1, 2, 3, \dots, (n^w - 1)$
 $l = 1, 2, 3, \dots, n^w$

gdzie symbol \oplus oznacza sumę mod 2

Proces kodowania jest realizowany w dwóch etapach: w pierwszym wyznaczone są pozycje nadmiarowe w tych wierszach, w których umieszczone są elementy ciągu informacyjnego, w drugim przeprowadzany jest proces kodowania dla wszystkich kolumn. Taki sam efekt zostanie uzyskany kodując w pierwszym etapie kolumny z elementami ciągu informacyjnego, a w drugim wszystkie wiersze.

2. DEFINICJA ELEMENTÓW PROCESU DEKODOWANIA

W procesie dekodowania detekcyjno-korekcyjnego będą występowały następujące elementarne działania dekodera:

- wyznaczenie syndromów ciągu odebranego dla wierszy - $\vec{Y}^w(\vec{y})$;
- wyznaczenie liczby syndromów dla wierszy różnych od zera - LS^w ;
- wyznaczenie syndromów ciągu odebranego dla kolumn - $\vec{Y}^k(\vec{y})$;
- wyznaczenie liczby syndromów dla kolumn różnych od zera - LS^k ;
- korekcja błędów w wierszach - **KOR_SW** (na podstawie $\vec{Y}^w(\vec{y})$);

- korekcja błędów na pozycjach wyznaczonych przez numer wiersza i numery kolumn, dla których odpowiednie syndromy są różne od zera - **KOR_LS_13**;
- detekcja błędu - **DETEKCJA**.

W pierwszej fazie dekodowania ciąg odebrany \vec{y} umieszczany jest w tablicy dwuwymiarowej

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1j} & \dots & y_{1n^w} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2j} & \dots & y_{2n^w} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i1} & y_{i2} & \dots & y_{ij} & \dots & y_{in^w} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n^k 1} & y_{n^k 2} & \dots & y_{n^k j} & \dots & y_{n^k n^w} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{y}_1^w \\ \vec{y}_2^w \\ \dots \\ \vec{y}_i^w \\ \dots \\ \vec{y}_{n^k}^w \end{bmatrix} \quad (5)$$

\Downarrow

$$[\vec{y}_1^k \quad \vec{y}_2^k \quad \dots \quad \vec{y}_j^k \quad \dots \quad \vec{y}_{n^k}^k]$$

i wyznaczone są syndromy ciągu odebranego dla wierszy $\vec{Y}^w(\vec{y})$

$$\vec{Y}^w(\vec{y}) = \begin{bmatrix} \vec{Y}_1^{1w}(\vec{y}_1^w) & Y_1^{2w}(\vec{y}_1^w) \\ \vec{Y}_2^{1w}(\vec{y}_2^w) & Y_2^{2w}(\vec{y}_2^w) \\ \vec{Y}_3^{1w}(\vec{y}_3^w) & Y_3^{2w}(\vec{y}_3^w) \\ \dots & \dots \\ \vec{Y}_i^{1w}(\vec{y}_i^w) & Y_i^{2w}(\vec{y}_i^w) \\ \dots & \dots \\ \vec{Y}_{n^k}^{1w}(\vec{y}_{n^k}^w) & Y_{n^k}^{2w}(\vec{y}_{n^k}^w) \end{bmatrix}$$

dla $i = 1, 2, 3, \dots, n^k$

$$\vec{Y}_i^{1w}(\vec{y}_i^w) = [\dots \quad Y_{i3}^{1w} \quad Y_{i2}^{1w} \quad Y_{i1}^{1w}] \quad (6)$$

gdzie:

$$Y_{i1}^{1w} = y_{i1} \oplus y_{i3} \oplus y_{i5} \oplus y_{i7} \oplus \dots$$

$$Y_{i2}^{1w} = y_{i2} \oplus y_{i3} \oplus y_{i6} \oplus y_{i7} \oplus \dots$$

$$Y_{i3}^{1w} = y_{i4} \oplus y_{i5} \oplus y_{i6} \oplus y_{i7} \oplus \dots$$

\dots

$$Y_i^{2w} = y_{i1} \oplus y_{i2} \oplus \dots \oplus y_{ij} \oplus \dots \oplus y_{in^w}$$

dla $j = 1, 2, 3, \dots, n^w$

i kolumn $\vec{Y}^k(\vec{y})$

$$\vec{Y}^k(\vec{y}) = [Y_1^k(\vec{y}_1^k) \quad Y_2^k(\vec{y}_2^k) \quad \dots \quad Y_j^k(\vec{y}_j^k) \quad \dots \quad Y_{n^k}^k(\vec{y}_{n^k}^k)]$$

gdzie:

$$Y_j^k(\vec{y}_j^k) = y_{1j} \oplus y_{2j} \oplus \dots \oplus y_{ij} \oplus \dots \oplus y_{n^k j} \quad (7)$$

dla $j = 1, 2, 3, \dots, n^w \quad i = 1, 2, 3, \dots, n^k$

Analizując otrzymane syndromy $\vec{Y}^w(\vec{y})$ tworzy się pomocniczą dwuwymiarową tabelę \vec{T}^w

$$\vec{T}^w = \begin{bmatrix} nr_1^w & nr_2^w & \dots & nr_i^w & \dots & nr_{LS^w}^w \\ nr_1^{kor} & nr_2^{kor} & \dots & nr_i^{kor} & \dots & nr_{LS^w}^{kor} \end{bmatrix} \quad (8)$$

dla $i = 1, 2, 3, \dots, LS^w$

w której umieszcza się w pierwszym wierszu tabeli numery wierszy nr_i^w , dla których syndromy: $\vec{Y}_i^{1w} \neq \vec{0}$ lub $Y_i^{2w} = 1$ (LS^w - liczba

wierszy spełniających ten warunek), w drugim wierszu tabeli umieszcza się liczby powstałe z przekodowania syndromów ciągu odebranego dla wierszy $\bar{Y}_{nr_i^w}^{1w}(\bar{y}_i^w) \xrightarrow{NKB} nr_i^{kor}$. Zgodnie z postulatami

Hamminga [2] syndrom ciągu odebranego $\bar{Y}(\bar{y})$ traktowany, jako liczba binarna w naturalnym kodzie binarnym (NKB) wskazuje numer korygowanej pozycji. Liczba nr_i^{kor} wskazuje numer pozycji (numer kolumny) w wierszu nr_i^w , którą należy skorygować.

Analogicznie analizując otrzymane syndromy $\bar{Y}^k(\bar{y})$ tworzy się pomocniczą jednowymiarową tabelę \bar{T}^k

$$\bar{T}^k = \begin{bmatrix} nr_1^k & nr_2^k & \dots & nr_j^k & \dots & nr_{LS^k}^k \end{bmatrix} \quad (9)$$

dla $j = 1, 2, 3, \dots, LS^k$

w której umieszcza się numery kolumn nr_j^k , dla których syndrom $Y_j^k(\bar{y}_j^k) = 1$, (LS^k – liczba kolumn spełniająca ten warunek)

2.1. Korekcja błędów metodą KOR_SW

Syndrom ciągu odebranego w rozszerzonym kodzie Hamminga składa się z dwóch części $[\bar{Y}_{nr_i^w}^{1w} \quad Y_{nr_i^w}^{2w}]$: w pierwszej części jest to syndrom wyznaczony, jak dla kodu Hamminga (określający w NKB numer korygowanej pozycji), w drugiej części, syndrom będący wynikiem kontroli parzystości całego ciągu rozszerzonego kodu Hamminga. Jeżeli syndrom $\bar{Y}_{nr_i^w}^{1w} \neq \bar{0}$, to korekcja przeprowadzana jest analogicznie jak dla kodu Hamminga, gdy natomiast $\bar{Y}_{nr_i^w}^{1w} = \bar{0}$ to korygowana jest ostatnia kontrolna pozycja ciągu rozszerzonego kodu Hamminga. Korekcja błędów w wierszach **KOR_SW** polega więc na skorygowaniu pozycji określonej na podstawie $\bar{Y}_{nr_i^w}^{1w}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, LS^w$), zgodnie z zależnością

$$\begin{aligned} \text{gdy } nr_i^{kor} \neq 0 & \quad y_{nr_i^w nr_i^{kor}}^* = y_{nr_i^w nr_i^{kor}} \oplus 1 \\ \text{gdy } nr_i^{kor} = 0 & \quad y_{nr_i^w n^w}^* = y_{nr_i^w n^w} \oplus 1 \end{aligned} \quad (10)$$

dla $i = 1, 2, 3, \dots, LS^w$

2.2. Korekcja błędów metodą KOR_LS_(LSw)(LSk)

Korekcja błędów na pozycjach wyznaczonych przez numery wierszy i kolumn, dla których odpowiednie syndromy są różne od zera – **KOR_LS_(LSw)(LSk)** polega na korekcji pozycji określonych przez numery wierszy występujące w tabeli \bar{T}^w i numery kolumn występujące w tabeli \bar{T}^k . W tej metodzie dekodowania nie są wykorzystywane wartości syndromów, czyli elementy z drugiego wiersza tabeli \bar{T}^w . W analizowanych algorytmach dekodowania będzie występować korekcja **KOR_LS_13** ($LS^w = 1, LS^k = 3$) przeprowadzana zgodnie z zależnościami

$$\begin{aligned} \bar{T}^w[1] &= [nr_1^w] & \bar{T}^k[1] &= [nr_1^k, nr_2^k, nr_3^k] \\ y_{nr_1^w nr_1^k}^* &= y_{nr_1^w nr_1^k} \oplus 1 \\ y_{nr_1^w nr_2^k}^* &= y_{nr_1^w nr_2^k} \oplus 1 \\ y_{nr_1^w nr_3^k}^* &= y_{nr_1^w nr_3^k} \oplus 1 \end{aligned} \quad (11)$$

3. ALGORYTMY DEKODOWANIA DETEKCYJNO-KOREKCYJNEGO

Głównym zadaniem dekodera detekcyjno-korekcyjnego jest wykrycie i poprawne skorygowanie części błędów powstałych w czasie transmisji. Omówione zostaną dwa algorytmy dekodowania różniące się maksymalną liczbą korygowanych błędów i maksymalną liczbą wykrywanych błędów.

3.1. Dekodowanie detekcyjno-korekcyjne ($t=1, \gamma=6$)

Na Rys. 1 przedstawiono algorytm dekodowania detekcyjno-korekcyjnego ($t=1, \gamma=6$) kodu dwukrotnie iterowanego na bazie rozszerzonego kodu Hamminga i kodu z kontrolą parzystości.

W tabeli Tab.1. przedstawiono analizę działania dekodera detekcyjno-korekcyjnego zgodnie z algorytmem z Rys 1 dla różnych krotności błędów.

Tab. 1. Analiza działania algorytmu dekodowania detekcyjno-korekcyjnego ($t=1, \gamma=6$).

Liczba błędów	LS^w	LS^k	Działanie dekodera	Ocena decyzji dekodera
0	0	0		Bezbledny odbior
1	1	1	KOR_SW	Poprawna korekcja bledu
2	dowolne		DETEKCJA	Detekcja bledow
3	dowolne		DETEKCJA	Detekcja bledow
4	dowolne		DETEKCJA	Detekcja bledow
5	dowolne		DETEKCJA	Detekcja bledow
6	dowolne		DETEKCJA	Detekcja bledow
7	1	1	KOR_SW	Bledna decyzja dekodera
	pozostale		DETEKCJA	Detekcja bledow
8	0	0		Bledna decyzja dekodera
	pozostale		DETEKCJA	Detekcja bledow
9	1	1	KOR_SW	Bledna decyzja dekodera
	pozostale		DETEKCJA	Detekcja bledow
>9	0	0		Bledna decyzja dekodera
	1	1	KOR_SW	Bledna decyzja dekodera
	pozostale		DETEKCJA	Detekcja bledow

Po odebraniu ciągu kodowego \bar{y} wyznaczane są wszystkie syndromy dla wierszy $\bar{Y}^w(\bar{y})$ i kolumn $\bar{Y}^k(\bar{y})$, a na ich podstawie określone są liczby wierszy LS^w i kolumn LS^k , dla których te syndromy są różne od zera. Wszystkie zerowe syndromy wierszy i kolumn ($LS^w = 0$ i $LS^k = 0$) oznaczają, że w ciągu odebranym \bar{y} nie ma błędów lub są, ale mają one postać jednego z dozwolonych ciągów kodowych \bar{s} , i wówczas podejmowana jest decyzja ostateczna $\bar{s}^* = \bar{y}$ (w pierwszej sytuacji jest to bezbledny odbior, w drugiej bled decyzji dekodowania). Ponieważ minimalna odleglosc Hamminga zastosowanego kodu dwukrotnie iterowanego wynosi $d_{min} = 8$, błędy o krotności ($8 \cdot i$) ($i = 1, 2, 3, \dots$) będą powodować bledną decyzję dekodera, jeżeli będą miały postać dozwolonego ciągu kodowego tego kodu.

Jeżeli tylko jeden syndrom wiersza i jeden syndrom kolumny jest różny od zera ($LS^w = 1$ i $LS^k = 1$) wówczas przeprowadzana jest

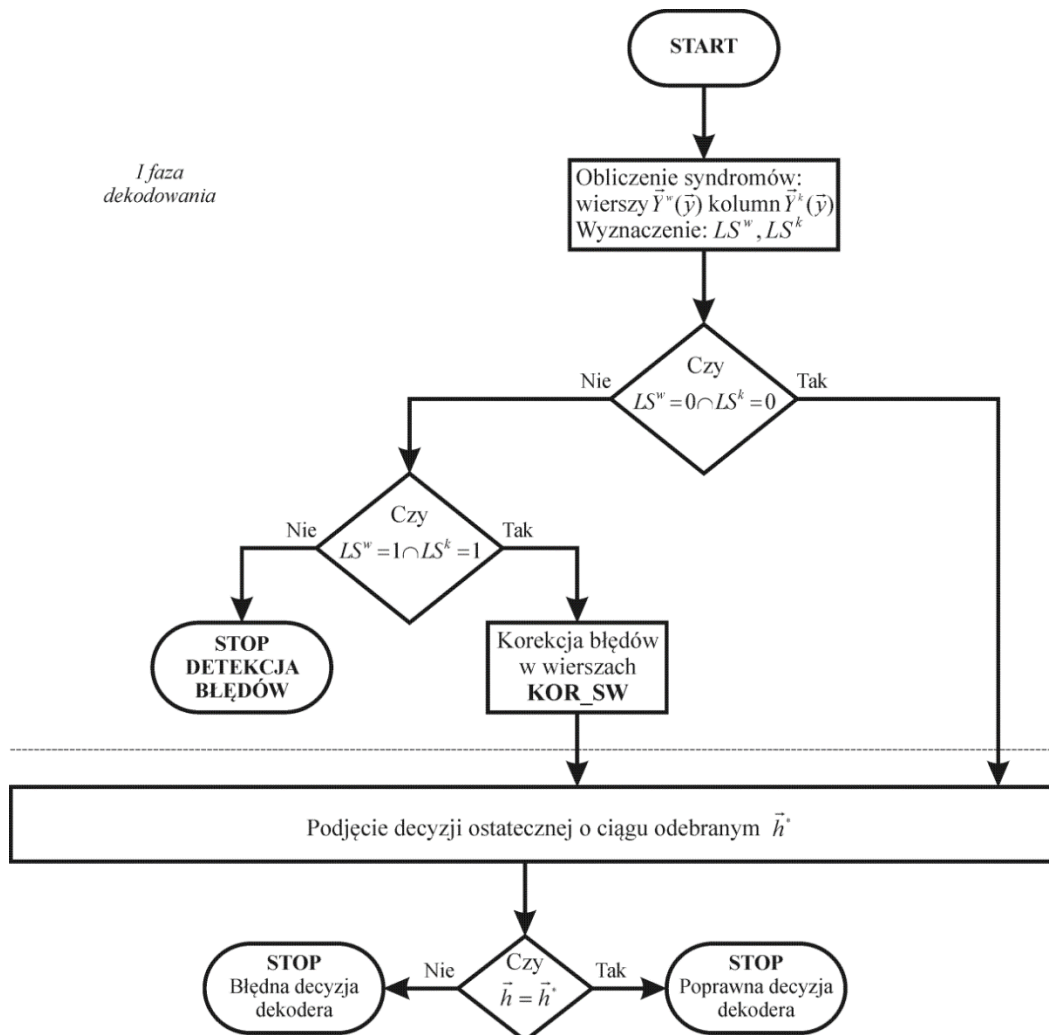
korekcja typu **KOR_SW**. Taka sytuacja będzie miała miejsce, jeżeli wystąpi błąd pojedynczy, który zostanie poprawnie skorygowany lub co najmniej siedem błędów odpowiednio położonych, które będą prowadziły do błędnej decyzji dekodera. Dla krotności błędów $(8 \cdot i) - 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) będą występowały takie sytuacje, że ciąg błędów będzie różnił się od jednego z dozwolonych ciągów kodowych $\{\bar{s}\}$ tylko na jednej pozycji, i wyniku korekcji **KOR_SW** wprowadzony zostanie jeszcze jeden dodatkowy błąd, który tą różnicę zlikwiduje i po całym procesie dekodowania uzyskamy błędną decyzję dekodera. Podobna sytuacja będzie występowała dla krotności błędów $(8 \cdot i) + 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) z tą różnicą, że w wyniku korekcji **KOR_SW** zostanie usunięty jeden z błędów, powodując powstanie ciągu błędów o postaci jednego z dozwolonych ciągów kodowych $\{\bar{s}\}$. W pozostałych przypadkach dekodery będzie podejmował decyzję o wykryciu błędów. W tym algorytmie dekodowania po wykonaniu korekcji **KOR_SW** zawsze otrzymamy ciąg, który będzie należał do zbioru ciągów kodowego $\{\bar{s}\}$ i detekcja błędów nie będzie występowała.

Podsumowując wnioski z przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że przedstawiony algorytm działa optymalnie w tym sensie, że poprawnie koryguje błędy pojedyncze i wykrywa błędy o krotnościach mniejszych od siedmiu. Przy błędach o krotnościach większych od sześciu, jeżeli ciąg zakłóceń będzie różnił się, co najwyżej na jednej pozycji od dozwolonego ciągu kodowego $\{\bar{s}\}$ dekodery będzie podejmował błędną decyzję, a pozostałe błędy będą wykrywane.

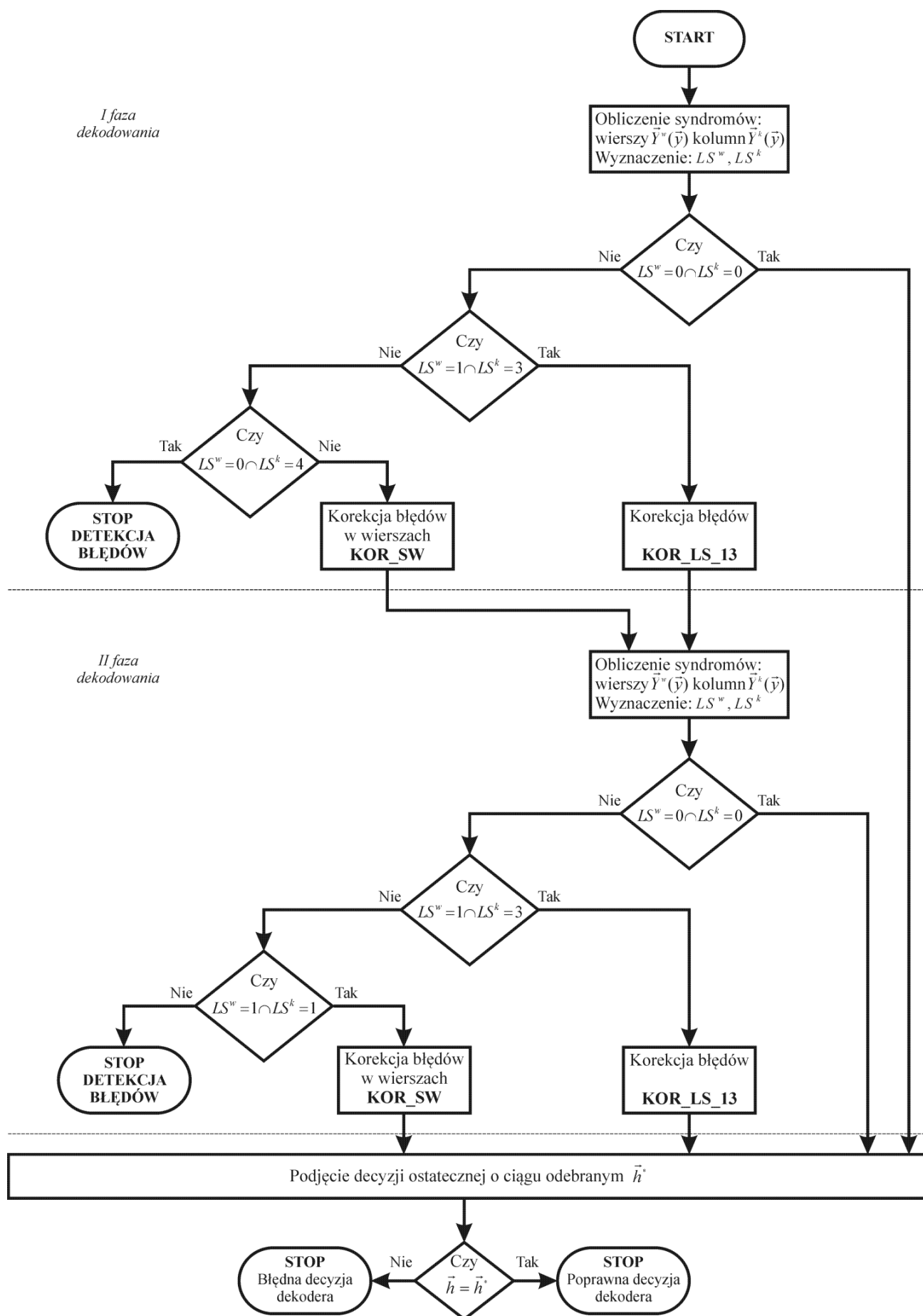
3.2. Dekodowanie detekcyjno-korelacyjne ($t=3, \gamma=4$)

Na Rys.2 przedstawiono algorytm dekodowania detekcyjno-korekcyjnego ($t=3, \gamma=4$) kodu dwukrotnie iterowanego na bazie rozszerzonego kodu Hamminga i kodu z kontrolą parzystości. Podobnie jak we wcześniej analizowanym algorytmie dekodowania w pierwszej kolejności wyznacza się wszystkie syndromy wierszy $\bar{Y}^w(\bar{y})$ i kolumn $\bar{Y}^k(\bar{y})$ a następnie ilości wierszy LS^w i ilości kolumn LS^k , dla których syndromy są różne od zera. W pierwszym etapie dekodowania, metodą **KOR_SW** poprawnie korygowane są wszystkie błędy pojedyncze oraz błędy o wyższych krotnościach, ale tak położone, że w jednym wierszu znajduje się jeden błąd. Dla błędów podwójnych położonych w jednym wierszu ($LS^w = 1$ i $LS^k = 2$) lub ($LS^w = 2$ i $LS^k = 2$) również przeprowadzana jest korekcja metodą **KOR_SW** powodując wprowadzenie dodatkowego błędu lub usunięcie jednego błędu w sytuacji, gdy drugi błąd położony jest w ostatniej kolumnie. W drugim etapie dekodowania błędy te zostaną poprawnie skorygowane metodą **KOR_LS_13** lub metodą **KOR_SW**. Pozostaje jeszcze jeden układ błędów, który należy skorygować a mianowicie trzy błędy położone w jednym wierszu, takie położenie błędów korygowane będzie bezpośrednio w pierwszym etapie dekodowania metodą **KOR_LS_13**. W pierwszym etapie dekodowania bezpośrednio wykrywane są również błędy czterokrotne położone w jednym wierszu.

I faza dekodowania



Rys. 1. Algorytm dekodowania detekcyjno-korekcyjnego kodu dwukrotnie iterowanego na bazie rozszerzonego kodu Hamminga i kodu z kontrolą parzystości ($t = 1, \gamma = 6$)



Rys. 2. Algorytm dekodowania detekcyjno-korekcyjnego kodu dwukrotnie iterowanego na bazie rozszerzonego kodu Hamminga i kodu z kontrolą parzystości ($t = 3, \gamma = 4$).

Tab. 2. Analiza działania algorytmu dekodowania detekcyjno-korekcyjnego kodu dwukrotnie iterowanego na bazie rozszerzonego kodu Hamminga i kodu z kontrolą parzystości ($t = 3, \gamma = 4$).

Liczba błędów	Etap dekodowania						Ocena decyzji dekodera
	I			II			
	LS^w	LS^k	Działanie dekodera	LS^w	LS^k	Działanie dekodera	
0	0	0					Bezbłędny odbiór
1	1	1	KOR_SW	0	0		Poprawna korekcja błędów
2	1	2	KOR_SW	1	1	KOR_SW	Poprawna korekcja błędów
				1	3	KOR_LS_13	Poprawna korekcja błędów
	2	0; 2	KOR_SW	0	0		Poprawna korekcja błędów
3	1	3	KOR_LS_13	0	0		Poprawna korekcja błędów
	2	1; 3	KOR_SW	1	1	KOR_SW	Poprawna korekcja błędów
				1	3	KOR_LS_13	Poprawna korekcja błędów
3	1; 3	KOR_SW	0	0		Poprawna korekcja błędów	
4	0	4	DETEKCJA				Detekcja błędów
	1	4	KOR_SW	1	3	KOR_LS_13	Poprawna korekcja błędów
				1	5	DETEKCJA	Detekcja błędów
	2	0	KOR_SW	2	0	DETEKCJA	Detekcja błędów
	2	2; 4	KOR_SW	0; 2	4	DETEKCJA	Detekcja błędów
	3	0; 2; 4	KOR_SW	1	1	KOR_SW	Poprawna korekcja błędów
1				3	KOR_LS_13	Poprawna korekcja błędów	
4	0; 2; 4	KOR_SW	0	0		Poprawna korekcja błędów	
5	1	3	KOR_LS_13	0	0		Błędna decyzja dekodera
	1	5	KOR_SW	0	4	DETEKCJA	Detekcja błędów
	2	1	KOR_SW	1	1	KOR_SW	Błędna decyzja dekodera
				1	3	KOR_LS_13	Błędna decyzja dekodera
	2	3	KOR_SW	1	3	KOR_LS_13	Poprawna korekcja błędów
				1	3	KOR_LS_13	Błędna decyzja dekodera
				1	5	DETEKCJA	Detekcja błędów
	2	5	KOR_SW	1	3	KOR_LS_13	Poprawna korekcja błędów
				1	3	KOR_LS_13	Błędna decyzja dekodera
				0	4	DETEKCJA	Detekcja błędów
				1	5; 7	DETEKCJA	Detekcja błędów
	3	1	KOR_SW	0	4	DETEKCJA	Detekcja błędów
				2	0	DETEKCJA	Detekcja błędów
3	3; 5	KOR_SW	0; 2	4	DETEKCJA	Detekcja błędów	
4	1; 3; 5	KOR_SW	1	1	KOR_SW	Poprawna korekcja błędów	
			1	3	KOR_LS_13	Poprawna korekcja błędów	
5	1,3,5	KOR_SW	0	0		Poprawna korekcja błędów	
$i > 5 \text{ or } i \leq n^k$	$i-1$	dowolne	KOR_SW	1	1	KOR_SW	Poprawna korekcja błędów
				1	3	KOR_LS_13	Poprawna korekcja błędów
	i	dowolne	KOR_SW	0	0		Poprawna korekcja błędów

szu na takich pozycjach, że tworzą jeden z dozwolonych ciągów rozszerzonego kodu Hamminga a więc syndrom dla takiego wiersza jest zerowy ($LS^w = 0$ i $LS^k = 4$). W drugim etapie dekodowania tylko dla dwóch układów błędów powodujących ($LS^w = 1$ i $LS^k = 1$) oraz ($LS^w = 1$ i $LS^k = 3$) przeprowadzana jest odpowiednio korekcja **KOR_SW** lub **KOR_LS_13**, w pozostałych sytuacjach podejmowana jest decyzja o wykryciu błędu lub przy wszystkich syndromach zerowych ($LS^w = 0$ i $LS^k = 0$) następuje zakończenie procesu dekodowania. Po wykonaniu korekcji **KOR_SW** lub **KOR_LS_13**, w drugim etapie dekodowania zawsze otrzymamy dozwolony ciąg kodu dwukrotnie iterowanego.

W tabeli Tab.2 przedstawiono dokładną analizę działania dekodera detekcyjno-korekcyjnego zgodnie algorytmem z Rys.2 dla różnych krotności błędów. Jak omówiono powyżej wszystkie błędy o krotnościach jeden, dwa i trzy są poprawnie korygowane w pierwszej lub drugiej fazie dekodowania. Błędy czterokrotne położone w czterech wierszach są poprawnie korygowane w pierwszej fazie dekodowania a położone trzech wierszach są poprawnie korygowane w drugiej fazie dekodowania.

Dodatkowo w drugiej fazie dekodowania korygowane są błędy czterokrotne, położone w jednym wierszu w części kodu Hamminga, ale niebędące ciągami Hamminga ($LS^w = 1$ i $LS^k = 4$), dla tak położonych błędów w pierwszej fazie dekodowania zostanie skorygowany jeden błąd metodą **KOR_SW** zaś pozostałe trzy błędy będą korygowane w drugiej fazie dekodowania metodą **KOR_LS_13**. Pozostałe układy błędów czterokrotnych będą wykrywane głównie w drugiej fazie dekodowania. Przy błędach o krotnościach większych od czterech będą zdarzały się sytuacje, w których dekoderek będzie podejmował błędną decyzję. Ten algorytm dekodowania zapewnia jednak poprawną korekcję błędów o dowolnej krotności, ale tak położonych, że co najwyżej w jednym wierszu są dwa błędy a pozostałe błędy występują w wierszach pojedynczo.

PODSUMOWANIE

W pracy analizowano dwie metody dekodowania detekcyjno-korekcyjnego ($t = 1, \gamma = 6$) i ($t = 3, \gamma = 4$) kodów dwukrotnie iterowanych na bazie: rozszerzonego kodu Hamminga dla kodowania wierszy i kodu z kontrolą parzystości dla kodowania kolumn. Opracowane algorytmy dekodowania bazują na dwóch rodzajach korekcji: korekcji na podstawie pierwszej części syndromów wierszy (**KOR_SW**), i korekcji na podstawie liczby syndromów różnych od zera (**KOR_LS_12**, **KOR_LS_13**). W pierwszym przypadku jest to klasyczna korekcja błędów dla kodów Hamminga, w których syndrom ciągu wskazuje w naturalnym kodzie binarnym korygowaną pozycję, z jednym wyjątkiem, gdy syndrom ten jest równy zero, to korygowana jest ostatnia pozycja rozszerzonego kodu Hamminga. W drugim przypadku korekcja jest przeprowadzana na pozycjach wyznaczonych przez numer wiersza i numery kolumn, w których syndromy są różne od zera.

W algorytmie dekodowania ($t = 1, \gamma = 6$) występuje jedna faza dekodowania. Po wyznaczeniu wszystkich syndromów wierszy i kolumn przeprowadzana jest korekcja **KOR_SW** w jednej sytuacji, gdy tylko jeden wiersz i jedna kolumna mają syndromy różne od zera, w pozostałych sytuacjach podejmowana jest decyzja o wykryciu

błędu. Zakończenie procesu dekodowania nastąpi również, gdy wszystkie syndromy zerowe, co oznacza bezbłędny odbiór lub błędną decyzję dekodera. Wyniki szczegółowej analizy działania dekodera detekcyjno-korekcyjnego dla wszystkich możliwych rozkładów błędów przedstawiono w Tab. 1 Z przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że opracowany algorytm działa optymalnie, to znaczy poprawnie koryguje błędy pojedyncze, poprawnie wykrywa błędy o krotnościach mniejszych od siedmiu. Przy błędach o krotnościach większych od sześciu zdecydowana większość błędów jest wykrywana, ale występują sytuacje, które prowadzą do błędnej decyzji dekodera.

W algorytmie dekodowania ($t = 3, \gamma = 4$) występują dwie fazy dekodowania. W obu fazach przeprowadzana jest korekcja metodą **KOR_SW** i **KOR_LS_13**. Algorytm ten umożliwia poprawną korekcję wszystkich błędów o krotnościach jeden, dwa, trzy i części błędów o krotności cztery, pozostałą część błędów o tej krotności będzie wykrywana. Po korekcjach w drugiej fazie dekodowania zawsze otrzymamy dozwolony ciąg kodu iterowanego.

W Tab. 2 przedstawiono dokładną analizę działania dekodera detekcyjno-korekcyjnego zgodnie algorytmem z Rys. 2 dla różnych krotności błędów. Przeprowadzona analiza potwierdza poprawność opracowanego algorytmu dekodowania, ponieważ błędy o krotnościach mniejszych od czterech są poprawnie korygowane, a błędy czterokrotne są albo korygowane albo wykrywane.

Podsumowując należy stwierdzić, że obie analizowane metody dekodowania zapewniają korygowanie i wykrywanie właściwej liczby błędów wynikającej z własności detekcyjno-korekcyjnych zastosowanego kodu.

Dobre własności detekcyjno – korekcyjne tego kodu dają możliwość wykorzystania go do transmisji danych w systemach ze sprzężeniem zwrotnym decyzyjnym dla kanałów, w których występują intensywne zakłócenia. Ze względów na probabilistyczny charakter reguł rozmytych [5,6] zastosowanie ich do analizowanego procesu dekodowania kodów iterowanych wydaje się nieuzasadnione.

BIBLIOGRAFIA

1. Baran Z., *Podstawy transmisji danych*, WKiŁ, Warszawa 1982.
2. Drózd J., *Podstawy kodowania nadmiarowego*. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1980.
3. Baran R., Fijałkowski M., *Dekodowanie korekcyjne kodów dwukrotnie iterowanych na bazie kodów Hamminga*. Logistyka 2014, nr 6.
4. Fijałkowski M., Baran R., *Dekodowanie detekcyjno-korekcyjne kodów dwukrotnie iterowanych na bazie kodów Hamminga*. Technika Transportu Szynowego 2015, nr 12.
5. Gorzałczany MB, *Interval-valued fuzzy inference involving uncertain (inconsistent) conditional propositions*. Fuzzy Sets and Systems, tom 29, 1989.
6. Gorzałczany MB, *A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, tom 21, 1987.
7. Haykin S., *Systemy telekomunikacyjne*. WKiŁ, Warszawa 2004.
8. Li FW., Yue Q., Li CJ., *The Minimum Hamming Distances of Irreducible Cyclic Codes*. Finite Fields and Their Applications, Vol. 29, 2014.
9. Wen GZ., *(7,4) Binary Hamming Code For Data Transition Of Spread Spectrum Communications*. Information Technology Applications in Industry II, PTS 1-4, 2013.

DETECTION-CORRECTION DECODING OF DOUBLE ITERATED CODES BASED ON THE EXTENDED HAMMING AND THE PARITY- CHECK CODES

Abstract

Results of comparative analysis of two different methods for detection-correction decoding of double iterated codes are presented in the paper. Analyzed methods are to decode the codes which, in particular, are based on the extended Hamming codes - in the case of rows coding, and on the parity-check codes – in the case of columns coding. A number of detected and corrected codes is the main difference between them. The detection-correction decoding algorithms, implemented by these methods to ensure an accurate detection and correction of a proper number of errors, are also presented. The row syndrome error correction scheme, typically applied for Hamming codes in which syndrome computed on a received word is the binary representation of the error location, is the base error correction scheme for the first method. In turn, an error correction based on a number of nonzero syndromes is incorporated in the second method. In this case however, error locations are

identified by intersection of rows and columns with nonzero syndromes. There is only one decoding phase in the case of the first method. The row syndrome error correction scheme is carried out during this phase when only one row and only one column with nonzero syndromes exist. Otherwise, an error detection is signaled. Thus, all the single-errors are accurately corrected as well as all the multiple-errors – with multiplicity less than seven - are identified. The second algorithm, in turn, has two decoding phases. Corrections of errors are carried out in both of them. An accurate correction of all the single-, double- and triple-errors is ensured in this way. In addition, some quadruple-errors are also properly corrected while the remaining errors of this multiplicity are correctly identified. Results presented in the paper show that analyzed detection-correction decoding methods are optimal regarding the applied codes. For these codes, they identify and correct an appropriate number of errors.

Autorzy:

dr inż. **Marek Fijałkowski** – Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, Wydział Elektrotechniki Automatyki i Informatyki, Katedra Informatyki Elektroniki i Elektrotechniki, Zakład Informatyki i Elektroniki, m.fijalkowski@tu.kielce.pl

dr inż. **Remigiusz Baran** – Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, Wydział Elektrotechniki Automatyki i Informatyki, Katedra Informatyki Elektroniki i Elektrotechniki, Zakład Informatyki i Elektroniki, r.baran@tu.kielce.pl