

**Tomasz Janusz TELESZEWSKI**

**Sławomir Adam SORKO**

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok

E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

## **Wyznaczanie pola prędkości i strat energii w przepływie cieczy przez przewód prostoosiowy o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego**

### **1 Wprowadzenie**

W wielu zagadnieniach inżynierskich związanych z projektowaniem urządzeń i systemów technicznych, w układach, w których ma miejsce przepływ różnorodnych cieczy i mieszanin wielofazowych, z uwagi na coraz częstsza konieczność kształtowania przewodów i kanałów o coraz bardziej złożonej geometrii istotnym zagadnieniem staje się racjonalne modelowanie kształtu przekroju poprzecznego przewodów i kanałów w funkcji wielu kryteriów przepływowych, wymiany ciepła i minimalizacji strat hydraulicznych w przepływach. Rozwój konstrukcji inżynierskich, w których mają miejsce przepływy płynów technologicznych w układach przepływowych o złożonej geometrii, stwarza potrzebę doskonalenia metod obliczeniowych w zakresie wyznaczania przepływów w tych urządzeniach. Szczególnie istotne z technicznego punktu widzenia przy postępującym rozwoju mikroukładów technicznych jest zagadnienie wyznaczania przepływów w mikrokanalach o różnych kształtach przekroju poprzecznego w przypadku, kiedy wymiary mikrokanalów pozwalają na zachowanie w analizie przepływu, ciągłego modelu płynu newtonowskiego i opis przepływu równaniami Naviera-Stokesa z warunkiem brzegowym postulującym zerową wartość prędkości na ściankach ograniczających przepływ.

Istotną grupę zagadnień przepływowych, ważnych z inżynierskiego punktu widzenia, w obszarze zagadnień obliczeniowych stanowią przepływy cieczy w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, w których przepływająca ciecz wypełnia cały dostępny przekrój, a czynnikiem powodującym przepływ jest różnica ciśnienia wzdłuż przewodu. Przepływy takie są określane mianem przepływów jednokierunkowych. Przepływ jednokierunkowy jest zadowalającym modelem przepływu cieczy w prostoliniowych przewodach i kanałach hydraulicznych całkowicie wypełnionych cieczą.

W wielu przypadkach, w których przepływ jest dostatecznie powolnym ruchem cieczy lepkiej, zagadnienie można opisać równaniem Stokesa. Istotą zagadnienia inżynierskiego jest wyznaczenie pola prędkości w przewodzie lub kanale, pozwalającym w dalszej kolejności na wyznaczenie natężenia przepływu oraz strat hydraulicznych w przepływie będących skutkiem lepkiej dyssypacji energii w analizowanym ruchu płynu.

Przedmiotem opracowania jest analiza jednokierunkowego, ustalonego, laminarnego ruchu cieczy lepkiej (newtonowskiej) w prostosiowych przewodach o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, sprowadzająca się do wyznaczenia rozkładu prędkości ruchu cieczy w przekroju poprzecznym przewodu, wyznaczenia natężenia przepływu oraz strat energii w przepływie przez wyznaczenie składowych tensora naprężenia i funkcji dyssypacji energii, której scałkowanie w wydzielonej objętości przepływającej cieczy jest miarą straty energii w przepływie powodowanej lepkością [1, 2].

Matematyczny opis zagadnienia przepływowego i algorytm obliczeniowy sformułowano przy użyciu metody elementów brzegowych, której właściwości w zakresie numerycznej realizacji zagadnień obliczeniowych w hydromechanice czynią metodę niezwykle użyteczną w rozwiązywaniu praktycznych zagadnień inżynierskich [3, 4].

## 2 Sformułowanie zagadnienia obliczeniowego

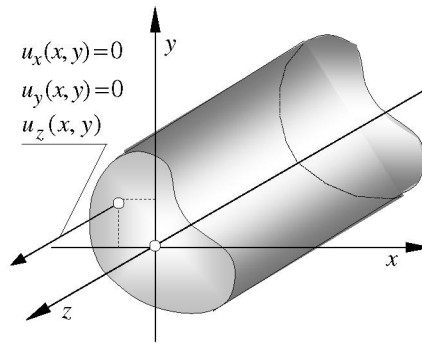
Ustalony, laminarny, jednokierunkowy przepływ cieczy lepkiej opisuje równanie:

$$\nabla^2 u_z = \wp, \text{ gdzie } \wp = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \text{ oraz } \text{def } \nabla^2 \equiv \left( \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \right), \quad (1)$$

z warunkiem brzegowym wynikającym z postulatu przyczepności płynu do ścianek materialnych ograniczających przepływ (warunek braku poślizgu cieczy na ścianie):

$$u_z|_s = 0, \quad (1a)$$

gdzie  $u_z \equiv \mathbf{u}(0,0,u_z)$ ,  $u_z = u_z(x,y)$  (rys. 1) jest prędkością ruchu cieczy,  $\mu$  oznacza lepkość dynamiczną, a  $\partial p / \partial z$  jest gradientem ciśnienia wzdłuż osi przewodu.



Rys. 1. Jednokierunkowy przepływ przez przewód prostoosiowy o dowolnym przekroju poprzecznym

Fig. 1. Unidirectional flow through a pipe of an arbitrary cross-section

W przepływie jednokierunkowym cieczy lepkiej cztery składowe tensora naprężenia mają wartości różne od zera, które w przypadku cieczy newtonowskiej są odpowiednio równe:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad ; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad ,$$

zatem funkcja dyssypacji energii ma postać:

$$\Phi = \frac{1}{\mu} (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) \quad . \quad (2)$$

W izotermicznym, ustalonym, jednokierunkowym przepływie równanie opisujące jednostkową dyssypację energii w przepływie (odniesioną do jednostkowej długości w kierunku przepływu w jednostkowym czasie) ma postać:

$$E_\Phi = \iiint_V \Phi dV = \mu \int_z \left[ \iint_\Lambda \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] d\Lambda \right] dz \quad . \quad (2^*)$$

### 2.1 Całkowe sformułowanie zagadnienia obliczeniowego

Całkując równanie (1) w obszarze ( $\Lambda$ ) i sprowadzając zagadnienie do wartości brzegowych, otrzymuje się całkowe sformułowanie zagadnienia obliczeniowego w postaci (oznaczenia rys. 2(a)):

$$\chi(\mathbf{p}) u_z(\mathbf{p}) + \int_L u_z(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} - \int_L \frac{\partial u_z(\mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{q}}} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} = - \iint_\Lambda \wp G(\mathbf{p}, \mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}} \quad (3)$$

$\mathbf{p} \in L \forall \Lambda, \mathbf{q} \in L; \mathbf{v} \in \Lambda \quad ,$

gdzie:  $u_z(\mathbf{p})$ ,  $u_z(\mathbf{q})$  i  $\partial u_z(\mathbf{q})/\partial n_{\mathbf{q}}$  są odpowiednio prędkościami w punkcie ustalonym  $\mathbf{p} \equiv (x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}})$  na brzegu ( $L$ ) i punkcie bieżącym  $\mathbf{q} \equiv (x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$  całkowania po brzegu ( $L$ ) oraz pochodną prędkości normalną do brzegu ( $L$ ) w punkcie bieżącym. Stała  $\chi(\mathbf{p})$  na gładkiej części brzegu ( $L$ ) jest równa  $1/2$ .

W równaniu (3) rozwiązania podstawowe  $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  i  $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  są odpowiednio równe:

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right) \quad , \quad r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| = \sqrt{(\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2 + (\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2} \quad , \quad (3^1)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{y\mathbf{q}} + \delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{x\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2} \quad , \quad (3^2)$$

przy czym  $\mathbf{n}_{\mathbf{q}} = [n_{x\mathbf{q}}, n_{y\mathbf{q}}] = \left[ \frac{\delta y_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}}, \frac{\delta x_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}} \right]$  jest wektorem  $\mathbf{n}_{\mathbf{q}} \perp L$  w punkcie  $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$ .

Z warunku brzegowego (1a) wynikającego z postulatu przyczepności płynu do ścianek materialnych ograniczających przepływ, tj.  $u_z(\mathbf{p}), u_z(\mathbf{q}) = 0$  ;  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L$ ,

po sprowadzeniu zagadnienia do wartości brzegowych otrzymuje się ostatecznie równanie całkowe o niewiadomej gęstości funkcji  $\partial u_z(\mathbf{q})/\partial n_{\mathbf{q}}$  na linii brzegowej ( $L$ ) ograniczającej obszar ( $\Lambda$ ) w postaci:

$$\frac{1}{2} g_z(\mathbf{p}) + \int_L g_z(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} = \wp \iint_{\Lambda} G(\mathbf{p}, \mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}}; \quad (4)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L; \mathbf{v} \in \Lambda$

gdzie:  $g_z(\mathbf{q}) = \partial u_z(\mathbf{q})/\partial n_{\mathbf{q}}$ , przy czym całka po lewej stronie równania jest rozumiana w sensie wartości głównej Cauchy'ego.

Po wyznaczeniu gęstości funkcji  $\partial u_z(\mathbf{q})/\partial n_{\mathbf{q}}$  na linii brzegowej ( $L$ ) wartości prędkości  $u_z(\mathbf{p})$ ,  $\mathbf{p} \in \Lambda$  we wnętrzu obszaru wyznacza się z równania (3), przy czym stała  $\chi(\mathbf{p})$  w obszarze ( $\Lambda$ ) jest równa 1, co prowadzi ostatecznie do zależności:

$$u_z(\mathbf{p}) = \int_L g_z(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} - \wp \iint_{\Lambda} G(\mathbf{p}, \mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}}; \quad (5)$$

$\mathbf{p} \in \Lambda, \mathbf{q} \in L; \mathbf{v} \in \Lambda$

Kierunkowe pochodne prędkości w punktach wewnętrznych  $\mathbf{p} \equiv (x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}}) \in \Lambda$  niezbędne do wyznaczenia składowych tensora naprężenia (równanie (2a)) i funkcji dyssypacji energii (równanie (2)), wyznacza się ze związków będących rezultatem różniczkowania wyrażenia (5):

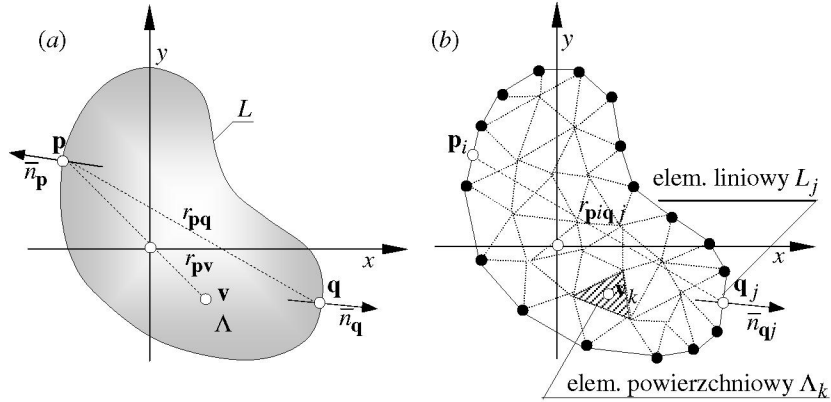
$$\frac{\partial u_z(\mathbf{p})}{\partial x_{\mathbf{p}}} = \int_L g_z(\mathbf{q}) \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_{\mathbf{p}}} dL_{\mathbf{q}} - \wp \iint_{\Lambda} \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{v})}{\partial x_{\mathbf{p}}} d\Lambda_{\mathbf{v}}, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial u_z(\mathbf{p})}{\partial y_{\mathbf{p}}} = \int_L g_z(\mathbf{q}) \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_{\mathbf{p}}} dL_{\mathbf{q}} - \wp \iint_{\Lambda} \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{v})}{\partial y_{\mathbf{p}}} d\Lambda_{\mathbf{v}}, \quad (6b)$$

gdzie:

$$\frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_{\mathbf{p}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2}; \quad \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_{\mathbf{p}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2}. \quad (6^{1,2})$$

W równaniu całkowym (5) będącym rozwiązaniem zagadnienia przepływowego opisanego równaniem Poissona (1) z warunkiem brzegowym (1a) w obszarze ( $\Lambda$ ), występuje całka powierzchniowa, przez co równanie całkowe traci walor rozwiązania brzegowego. W ramach metody elementów brzegowych istnieje szereg sposobów sprowadzenia całek powierzchniowych do całek brzegowych. Najczęściej stosowanymi metodami są: metoda dekompozycji niewiadomej funkcji w równaniu Poissona (1) [3, 4], oraz metoda podwójnej i wielokrotnej wzajemności [5, 6]. W rozważanym przypadku funkcja  $\wp(x, y)$  ma w obszarze ( $\Lambda$ ) stałą wartość, co istotnie upraszcza problem wyznaczenia całki powierzchniowej, sprowadzając rachunek do całkowania rozwiązania podstawowego w rozważanym obszarze.



Rys. 2. Jednokierunkowy przepływ przez przewód prostoosiowy o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego: (a) przekrój poprzeczny przewodu - obszar  $\Delta$  rozwiązania zagadnienia, brzeg  $L$ ; (b) dyskretyzacja obszaru i linii brzegowej

Fig. 2. Unidirectional flow through a straight pipe of an arbitrary cross-section shape: (a) cross-section of the straight pipe - area  $\Delta$  and boundary  $L$ ; (b) discretization of the flow area and boundary

## 2.2 Numeryczne rozwiązanie zagadnienia obliczeniowego

Dyskretne rozwiązanie równania całkowego (4) polega na sprowadzeniu całek brzegowych do układu algebraicznych równań liniowych względem dyskretnych wartości niewiadomej funkcji w punktach kolokacji na elementach brzegowych przybliżających brzeg rozpatrywanego obszaru i dyskretnym wyznaczeniu wartości wektora rozwiązań układu równań przy użyciu stosownych kubatur (oznaczenia rys. 2(b)).

Przyjmując przybliżenie brzegu  $L$   $J$ -elementowym układem elementów liniowych  $[L_j]_{j=1}^J$ , na których wartości funkcji  $[g_z(\mathbf{q}_j) = \partial u_z(\mathbf{q}_j) / \partial n_{\mathbf{q}_j}]_{j=1}^J$  w punktach centralnych elementów mają stałe wartości, równanie całkowe (4) sprowadza się do układu algebraicznych równań liniowych:

$$\sum_{j=1}^J g_z(\mathbf{q}_j) \bar{G}^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \sum_{k=1}^K \varphi \sum_{j=1}^J G^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k), \quad (7)$$

gdzie:

$$G^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \int_{L_j} G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) dL_{\mathbf{q}_j} \quad \text{oraz} \quad \bar{G}^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \begin{cases} G^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) & j \neq i \\ G^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) + 1/2 & i = j \end{cases} \quad (7^{1,2})$$

Całkę powierzchniową w równaniu (5) po triangulacji obszaru ( $\Lambda$ ) na  $K$ -elementów  $\Delta_k$  i wyznaczeniu wartości funkcji podcałkowej  $[G(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k)]_{k=1}^K$  w punktach centralnych elementów, przyjmując, że w obrębie poszczególnych elementów ma ona stałą wartość, sprowadza się kubatury [7]:

$$\oint_{\Lambda} G(\mathbf{p}, \mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^J \oint \sum_{k=1}^K G(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k) \Delta_k . \quad (7^3)$$

Po dyskretnym wyznaczeniu wartości funkcji  $[g_z(\mathbf{q}_j)]_{j=1}^J$  w punktach kolokacji  $[\mathbf{q}_j]_{j=1}^J$  elementów brzegowych  $[L_j]_{j=1}^J$  prędkość  $[u_z(\mathbf{p}_i)]_{i=1}^I$  w punktach  $[\mathbf{p}_i]_{i=1}^I$ ;  $\mathbf{p}_i \in \Lambda$  wewnątrz obszaru i kierunkowe pochodne wyznacza się ze zdyskretyzowanych związków (5) oraz (6a,b):

$$u_z(\mathbf{p}_i) = \sum_{j=1}^J g_z(\mathbf{q}_j) G^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) - \sum_{k=1}^K \oint \sum_{j=1}^J G(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k) \Delta_k \quad (8)$$

oraz:

$$\frac{\partial u_z(\mathbf{p}_i)}{\partial x_{pi}} = \sum_{j=1}^J g_z(\mathbf{q}_j) G_x^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) - \sum_{k=1}^K \oint \sum_{j=1}^J G_x(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k) \Delta_k , \quad (9a)$$

$$\frac{\partial u_z(\mathbf{p}_i)}{\partial y_{pi}} = \sum_{j=1}^J g_z(\mathbf{q}_j) G_y^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) - \sum_{k=1}^K \oint \sum_{j=1}^J G_y(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k) \Delta_k , \quad (9b)$$

gdzie:

$$G_x^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{\delta y_{piqj}}{r_{piqj}^2} dL_j , \quad G_y^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{\delta x_{piqj}}{r_{piqj}^2} dL_j , \quad (9a^*)$$

$$G_x(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta y_{pivk}}{r_{pivk}^2} , \quad G_y(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta x_{pivk}}{r_{pivk}^2} . \quad (9b^*)$$

### 3 Weryfikacja algorytmu MEB

Dogodnym modelem do weryfikacji sformułowanego wyżej zagadnienia przepływowego jest przepływ laminarny cieczy lepkiej w prostoosiowym przewodzie o kołowym kształcie przekroju poprzecznego, opisany równaniem Hagena-Poiseulle'a. Profil prędkości rozważanego przepływu w przewodzie o promieniu  $R$  jest opisany zależnością [8]:

*Wyznaczanie pola prędkości i strat energii w przepływie cieczy  
przez przewód prostoosiowy o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego*

---

$$u_z(r) = \frac{\wp}{4}(R^2 - r^2); \quad u_{z\max} \equiv u_z(r=0) = \frac{\wp R^2}{4}, \quad u_{z\infty} = \frac{1}{2}u_{z\max} = \frac{\wp R^2}{8}, \quad (10)$$

gdzie:

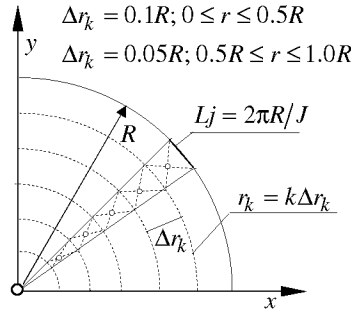
$$\wp = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p_{1-2}}{\Delta z_{1-2}}, \quad \text{przy czym } \Delta p_{1-2} \text{ oznacza spadek ciśnienia na odcinku } \Delta z_{1-2} \text{ przewodu}, \quad \wp = \frac{8u_{z\infty}}{R^2}. \quad (10^1)$$

Funkcja dyssypacji energii w przepływie jest równa:

$$\Phi(r) = \mu \left( \frac{\partial u_z(r)}{\partial r} \right)^2 = \frac{\wp^2 r^2}{4} = 16\mu u_{z\infty}^2 \left( \frac{r}{R} \right)^2, \quad (11)$$

a energia rozpraszana w przepływie (na jednostkę długości przewodu  $\Delta z_{1-2} = 1.0$ ) w czasie 1s jest równa:

$$E_\Phi = \iiint_V \Phi dV = 8\pi\mu u_{z\infty}^2. \quad (11^*)$$



*Rys. 3. Schemat dyskretyzacji przekroju poprzecznego przewodu prostoosiowego o kształcie kołowym*

*Fig. 3. Discretization of the cross-section of the circular straight pipe*

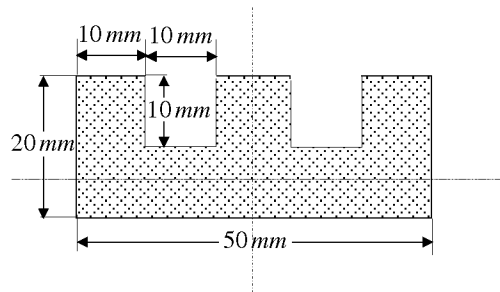
Obliczenia profilu prędkości, składowych tensora naprężenia i funkcji dyssypacji energii oraz energii rozpraszanej w przepływie, przy użyciu metody elementów brzegowych w przewodzie o promieniu jednostkowym  $R=0.01$  m, zrealizowano przybliżając linię brzegową  $J=180$  elementami  $L_j = 2\pi R/J$  o łącznej długości  $\Sigma L_j = 0.06283$  m, wydzielając przy tym w obszarze  $K_0=180$  powierzchniowych elementów oraz  $K_r=3240$  powierzchniowych elementów trapezowych o łącznym polu  $\Delta S = 3.14159 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , generując przy tym błąd względny przybliżenia linii brzegowej  $\delta_L = 0.01\%$  i przybliżenia powierzchni przez elementy powierzchniowe  $\delta_L = 0.02\%$ . W rozwiązaniu analitycznym i numerycznym przyjęto wartość funkcji  $\wp = 800.0(\text{sxm})^{-1}$ , uzyskując przy tym dokładność numerycznego wyznaczenia profilu prędkości z błędem  $\delta_u < 0.03\%$  i numerycznego wyznaczenia tensora naprężenia

i funkcji dyssypacji energii odpowiednio  $\delta_\tau; \delta_\Phi < 0.04\%$  (gdzie względny błąd rozwiązania  $\delta_f = 100 * (f^a - f^n) / f^a$  [%], przy czym  $f^a$  i  $f^n$  oznaczają odpowiednio wartości analityczne i numeryczne rozpatrywanej funkcji w zadanych punktach obszaru).

#### 4 Przykład obliczeniowy

Niżej zaprezentowano przykład zastosowania przedstawionego algorytmu obliczeniowego wyznaczania ruchu cieczy lepkiej, w tym pola prędkości i funkcji dyssypacji energii.

Dokonano obliczeń laminarnego przepływu gliceryny (gęstość  $\rho = 1261.08 \text{ kg/m}^3$ ; lepkość dynamiczna  $\mu = 1.499 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  w temperaturze  $20^\circ\text{C}$ ) przy wymuszeniu  $\varphi = 1000.0 (\text{s}\cdot\text{m})^{-1}$  w prostoosiowym profilowanym przewodzie (kanale zamkniętym, całkowicie wypełnionym cieczą, o geometrii jak na rys. 4) radiatora cieczowego.



Rys. 4. Geometria profilowanego przewodu przepływowego radiatora cieczowego

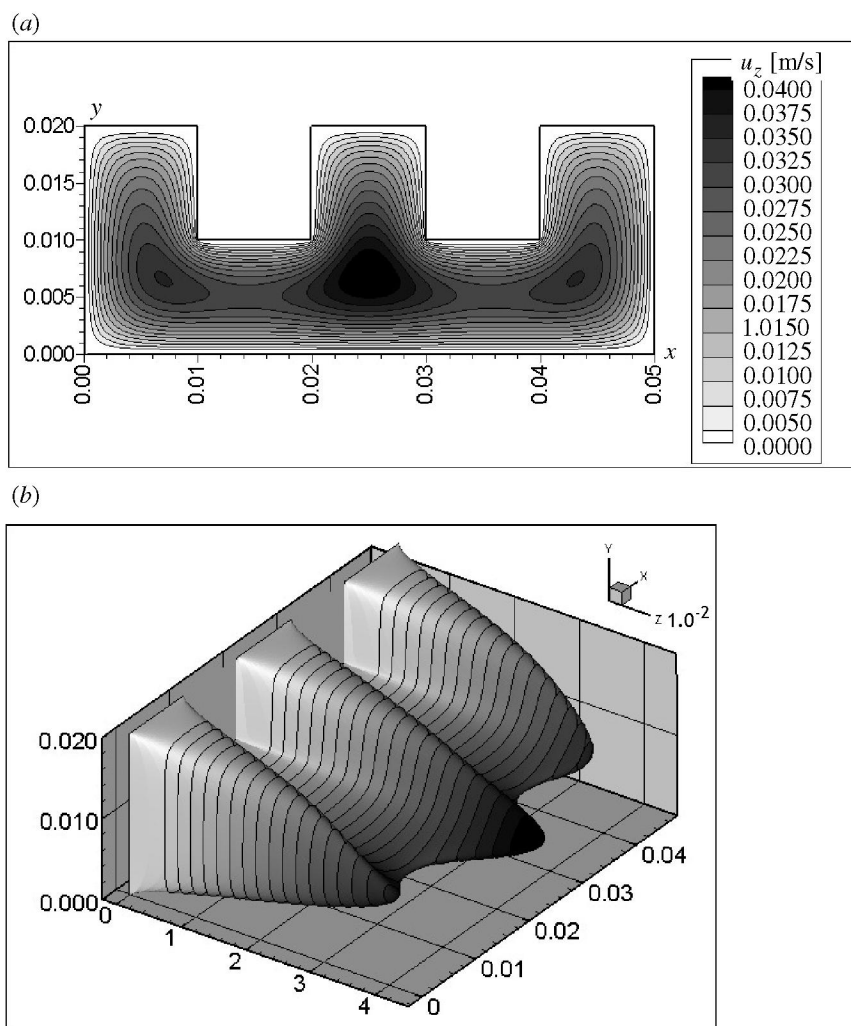
Fig. 4. Geometry of the profiled cross-section of the fluid flow radiator pipe

Rozwiązano numerycznie równanie całkowe (4) w postaci układu algebraicznych równań liniowych (7) o niewiadomych wartościach gradientu prędkości na  $J=1800$  liniowych elementach brzegowych o jednakowej długości ze współczynnikami opisanymi zależnościami (7<sup>1,2</sup>) i wektorem rozwiązania układu równań opisanym zależnością (7<sup>3</sup>). Po wyznaczeniu wartości poszukiwanej funkcji wartości prędkości dyskretnie wyznaczono prędkość w wybranych punktach pola  $K=800$ , wygenerowanych jako węzły prostokątnej siatki podziału obszaru z krokiem  $\Delta x = \Delta y = 1.0 \text{ mm}$ , oraz jej pochodne opisane zależnościami (6a), (6b), a w dyskretniej formie równaniami (9a) i (9b), jak też rozkład funkcji dyssypacji energii i jej objętościową całkę opisującą jednostkową stratę energii w rozważanym przepływie. Wartości poszukiwanych funkcji wyznaczono w całym rozpatrywanym obszarze, jakkolwiek w analizowanym przypadku istnieje możliwość redukcji obszaru rozwiązania z uwagi na oś symetrii.

Na prezentowanych niżej rysunkach, stanowiących graficzną formę wyników obliczeń, przedstawiono odpowiednio wykresy pola prędkości i pozostałych omawianych wyżej charakterystyk przepływu.

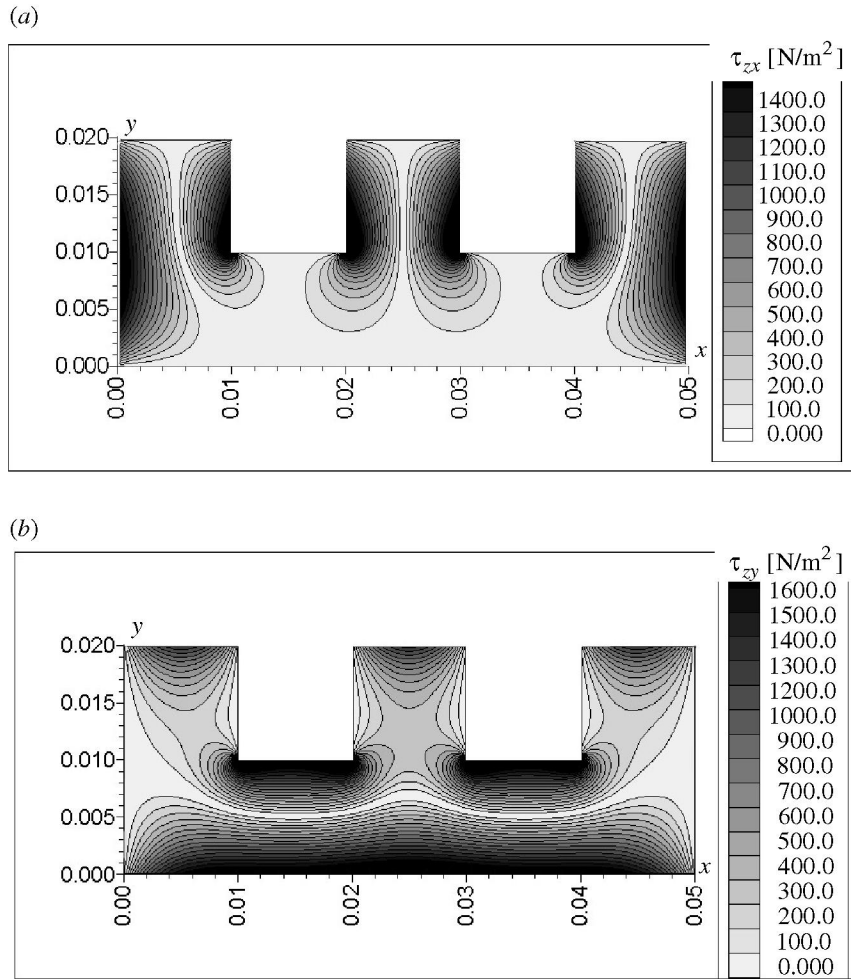


Wyznaczanie pola prędkości i strat energii w przepływie cieczy  
przez przewód prostoosiowy o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego



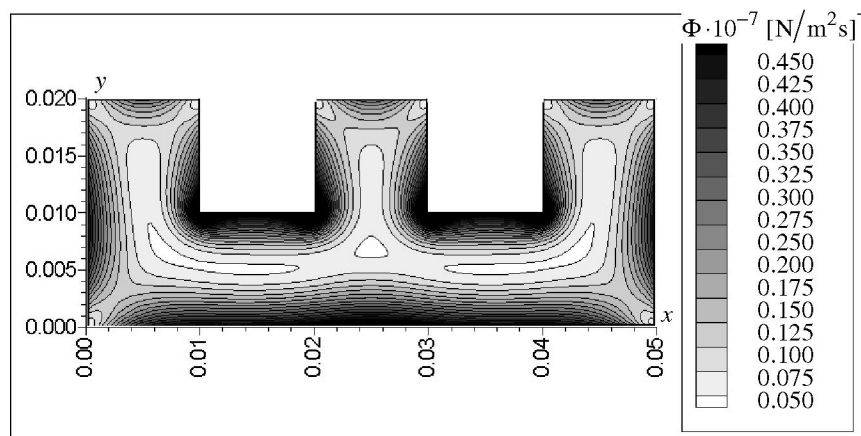
Rys. 5. Pole prędkości przepływu przez profilowany przewód prostoosiowy:  
(a) wykres warstwowy; (b) wykres przestrzenny

Fig. 5.. Velocity field of the flow through a straight pipe of an arbitrary  
cross-section shape: (a) contour-map of the velocity flow field;  
(b) Three-dimensional sketch of the velocity flow field line



Rys. 6. Składowe tensora naprężenia w przepływie przez profilowany przewód prostoosiowy: (a) wykres składowej  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  tensora naprężenia; (b) wykres składowej  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  tensora naprężenia

Fig. 6. Tensor components of the flow through a straight pipe of an arbitrary cross-section shape: (a) contour-map of the  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  component of the viscous stress tensor ; (b) contour-map of the  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  component of the viscous stress tensor



Rys. 7. Rozkład funkcji dyssypacji energii w przepływie przez profilowany przewód prostoosiowy

Fig. 7. Distribution of the dissipation function of the flow through a straight pipe of an arbitrary cross-section shape

#### Komentarz do rozwiązania zagadnienia jednokierunkowego przepływu cieczy lepkiej w przewodzie o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego

Obliczenia przepływu w rozpatrywanym układzie geometrycznym za pomocą metody brzegowych równań całkowych zrealizowano w całym przekroju poprzecznym kanału, rozwiązując dyskretnie równanie (1) z warunkiem (1a), zakładającym brak poślizgu cieczy na ściankach ograniczających przepływ, po sprowadzeniu zagadnienia do zagadnienia brzegowego opisanego równaniem całkowym (4) i jego dyskretną formą (7). Z uwagi na osiową symetrię kanału zagadnienie przepływowe można sprowadzić do analizy jednej części kanału z warunkiem symetrii, postulującym zerową wartość pochodnej prędkości w kierunku normalnym do płaszczyzny symetrii. Taka forma opisu zagadnienia przepływowego prowadzi do opisu pola prędkości równaniem różniczkowym (1) z warunkiem brzegowym Dirichleta, dotyczącym wartości prędkości na części brzegu obszaru i warunkiem brzegowym Neumanna, dotyczącym wartości normalnej do brzegu pochodnej prędkości na pozostałej części brzegu, co zmienia matematyczny opis zagadnienia przy użyciu związków całkowych. W wielu praktycznych zagadnieniach inżynierskich związanych z wyznaczaniem przepływu w przewodach i kanałach o skomplikowanym kształcie przekroju poprzecznego, pomimo powtarzalności osiowej struktury geometrycznej, z uwagi na charakter używanego do rozwiązania narzędzia, w tym przypadku metody brzegowych równań całkowych, wyznaczanie pól przepływu (prędkości, ciśnienia) i pozostałych charakterystyk przepływu w całym analizowanym obszarze jest częstokroć korzystniejsze i mniej pracochłonne niż obliczenia dla wybranego fragmentu obszaru [9, 10]. Redukcja obszaru wynikająca z powtarzalności konfiguracji jest natomiast istotnym elementem algorytmów i programów obliczeniowych do wyznaczania

zagadnień przepływowych metodami różnic skończonych i elementów skończonych [11, 12].

## 5 Podsumowanie

Prezentowany wyżej algorytm wyznaczania laminarnego ruchu cieczy lepkiej w przewodach prostoosiowych o złożonych kształtach przekroju poprzecznego jest użytecznym modelem do komputerowej symulacji i numerycznego rozwiązywania wielu zagadnień inżynierskich w zakresie przepływów w złożonych geometrycznie strukturach, w konstrukcji zaawansowanych wymienników ciepła oraz budowie szeregu przyrządów i urządzeń w nanotechnice.

Użycie metody brzegowych równań całkowych (metody elementów brzegowych) do matematycznego sformułowania zagadnienia przepływowego i dyskretnego rozwiązania równań opisujących przepływ umożliwia tworzenie stosunkowo prostych algorytmów, znacząco mniej czasochłonnych w realizacji obliczeń w porównaniu z rozwiązaniami przy użyciu metody różnic skończonych i elementów skończonych. Realizacja zagadnienia obliczeniowego przy użyciu metod siatkowych (MRS, MES) wymaga generowania w analizowanym obszarze siatek, równolicznych z rozmiarem układów algebraicznych równań liniowych uzyskiwanych w ramach dyskretyzacji równań różniczkowych opisujących zagadnienie. Metoda równań brzegowych do wyznaczenia wartości brzegowych poszukiwanych funkcji opisujących przepływ wymaga jedynie dyskretyzacji brzegu rozpatrywanego obszaru, dopuszczając przy tym dowolność jego kształtu, co prowadzi do mniej licznych układów algebraicznych równań liniowych, umożliwiając ich rozwiązywanie metodami bezpośrednimi. W prezentowanym wyżej algorytmie obliczeniowym ma miejsce wyznaczanie całki obszarowej, jednak w tym przypadku istotna jest tylko dokładność jej numerycznego obliczenia (kubatury), przy czym zadanie to nie nakłada żadnych szczególnych uwarunkowań w zakresie wyboru węzłów kolokacji zadanych wartości całkowanej funkcji w elementach obszarowych.

Obliczenia zagadnień przepływowych w zakresie przepływów newtonowskich cieczy lepkich są realizowane w Centrum Komputerowych Sieci Rozległych Politechniki Białostockiej na wieloprocesorowej maszynie wirtualnej (16xXSEON 2,4GHz, 16 GB RAM) przy wykorzystaniu oprogramowania sporządzonego w Politechnice Białostockiej (programy sporządzone przez autorów opracowania w języku programowania FORTRAN, modyfikowane i kompilowane w systemie maszyny wirtualnej).

## Literatura

1. Batchelor G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1967
2. Spurr J.H.: T1. *Fluid Mechanics*, T2 *Fluid Mechanics Problems and Solutions*, Springer, 1997
3. Kythe P. K.: *An Introduction to Boundary Element Method*, CRC Press, 1955
4. Katsikadelis J.T.: *Boundary Elements. Theory and applications*, Elsevier, 2012
5. Wróbel L.C.: *The Boundary Element Method Vol. I Applications in Thermo-Fluids an Acoustics*, John Willey & Sons, Ltd, 2002
6. Pozrikidis C.: *A Practical Guide to Boundary element method with the software Library BEMLIB*, Chapman & Hall / CRC, 2002

7. Press W.H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W.T.: *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1988
8. Spurk J.H.: T1. *Fluid Mechanics*, T2 *Fluid Mechanics Problems and Solutions*, Springer, 1997
9. Wrobel L.C.: *The Boundary Element Method Vol. I Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*, John Willey & Sons, LTD, 2002
10. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Rozwiązanie jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego metodą elementów skończonych, *Symulacja w Badaniach i Rozwoju*, vol.3, no.1, 2012
11. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P.: *Finite Element Method for Fluid Dynamics*, 6th ed. Butterworth Heinemann, 2005
12. Liu G.H.: *Meshfree Methods. Moving Beyond The Finite Element Method*, CRC Press, 2010
13. Kakac S., Liu H.: *Heat exchangers selection, rating, and thermal design*, CRC Press, 2002

## Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono algorytm obliczeniowy wyznaczania pola prędkości i wyznaczania strat energii w jednokierunkowym, laminarnym przepływie cieczy przez przewody o dowolnych kształtach w przekroju poprzecznym. Równanie różniczkowe opisujące przepływ z warunkiem brzegowym zakładającym zerową wartość prędkości na ścianie materialnej ograniczającej przepływ sprowadzono do równań całkowych (metoda elementów brzegowych) rozwiązywanych dyskretnie. Wyznaczono pole prędkości, pole komponentów tensora naprężeń i rozkład funkcji lepkiej dyssypacji energii. Zaprezentowano wykresy obrazujące rozwiązanie zagadnienia przepływowego w profilowanym przewodzie radiatora.

**Słowa kluczowe:** metoda elementów brzegowych, tensor naprężeń, funkcja dyssypacji energii

# Calculation of velocity field and dissipation of energy of the fluid flow through straight pipe of arbitrary cross-section

## Summary

In the elaboration the computational algorithm for velocity field and function of the losses of the energy calculation in the unidirectional, laminar flow of liquid through straight pipes of arbitrary cross-section shapes was presented. The differential equation describing the flow with the boundary condition founding the zero-value of the velocity on the material side bounding the flow was brought to integral equations (boundary element method) and dissolved discretely. The velocity field, components of the tensor of viscous tensions and dissipation function of the mechanical energy was calculated. The results of calculation of flow in cross-sectioned of the radiator pipe was showing on the graphs presenting the solution of the problem

**Keywords:** boundary element method, shear stress, dissipation function of mechanical energy

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej nr S/WBiIS/4/2014.