

**Jan LESZCZYŃSKI**  
POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

## Krótkie sygnały testujące model obiektu dynamicznego

Doc. dr inż. Jan LESZCZYŃSKI

Absolwent Moskiewskiego Instytutu Łączności. Stopień doktora uzyskał na Wydziale Elektroniki Politechniki Warszawskiej r. 1970. Pracownik Katedry Automatyki i Elektroniki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Aktywnie uczestniczył w wielu konferencjach naukowych, krajowych i zagranicznych, o tematyce związanej głównie z problemami teorii sterowania.



Adres e-mail: lesjan@pb.bialystok.pl

### Streszczenie

W referacie przedstawiono koncepcję teoretyczną i niektóre możliwości zastosowania schodkowych oddziaływań wejściowych implikujących skończoną odpowiedź ciągłego obiektu dynamicznego. Sygnały tego typu mogą stanowić użyteczne narzędzie identyfikacji modelu i detekcji różnic między stosowanym modelem a rzeczywistością.

**Słowa kluczowe:** sygnały testujące, transformacja modelu, identyfikacja

### The short signals for testing of models of the dynamic plants

#### Abstract

In the paper, theoretical concept and some applications of the piecewise constant signals with need for the finite time of response of the continuous dynamic plant are considered. These signals are a convenient tool for identification and detection of differences between used model and reality.

**Keywords:** Test signals, Transform methods, Identification

## 1. Wprowadzenie

Zadania identyfikacji obiektów dynamicznych LTI (LTI - *Linear Time Invariant*) na podstawie przebiegów przejściowych są rozwiązywane od lat [1]. Waga i szerokość problematyki opisu rzeczywistości za pośrednictwem modelu matematycznego implikuje ciągły rozwój idei i aktualizację niektórych interpretacji.

W p.2 referatu wprowadzono pojęcie **charakterystycznego zafalowania schodkowego**. Wykazano, że pojęcie to wiąże się bezpośrednio z określoną interpretacją fizyczną współczynników wielomianów licznika i mianownika transmitancji dyskretnej opisywanego obiektu.

W p.3 pojęcie charakterystycznego zafalowania zastosowano do **transformacji modelu obiektu** dynamicznego LTI w postaci odpowiedzi impulsowej  $g(t)$  na model w formie transmitancyjnej. Przedstawiono zasady kompletowania układu równań, wiążących współczynniki wielomianów transmitancji dyskretnej charakteryzowanego obiektu z przebiegiem znanej, np. zarejestrowanej doświadczalnie, odpowiedzi impulsowej  $g(t)$  lub skokowej  $h(t)$ .

W p.4 referatu przedstawiono niektóre praktyczne aspekty związane z zastosowaniem zasygnalizowanych rezultatów teoretycznych w trakcie procesu identyfikacji, a tak że przedstawiono **koncepcję krótkich oddziaływań testujących** ukierunkowanych na pomiar niedopasowania rzeczywistego modelu, do określonego modelu odniesienia. W koncepcji tej, w przeciwieństwie do „izotropowych” sygnałów testujących ogólnego przeznaczenia, oddziaływanie testujące zawiera

określoną informację - zapytanie. Przejrzysta odpowiedź jest zawarta w sygnale wyjściowym badanego obiektu.

## 2. Zafalowania charakterystyczne

Model dyskretny ciągłego obiektu dynamicznego LTI zależy od przyjętego okresu próbkowania i od wersji zastosowanej metody transformacji [2]. W celu **uniknięcia niejednoznaczności**, w dalszych rozważaniach będziemy posługiwać się transmitancją dyskretną obiektu ciągłego, w wersji zachowującej niezmienny kształt jego odpowiedzi na wejściowe oddziaływanie typu schodkowego.

**Zgodną wersją przekształcenia modelu obiektu dynamicznego LTI**, w formie liniowego równania różniczkowego ( $n > m$ ):

$$y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + c_0y(t) = d_m u^{(m)}(t) + d_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + d_0u(t) \quad (1)$$

do modelu z czasem dyskretnym, jest takie równanie różnicowe:

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_nu(k-n), \quad (2)$$

które zachowuje niezmienną postać odpowiedzi  $y(t)$ , w sensie:

$$y(kT) = y(t), \quad \text{przy } t = kT, \quad \text{gdzie } k \text{ jest liczbą naturalną}, \quad (3)$$

na ograniczone wymuszenie  $u(t)$ , w postaci funkcji schodkowej zsynchronizowanej z momentami próbkowania:

$$u(t) = u(kT), \quad \text{dla } t_0 + kT \leq t < t_0 + (k+1)T, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

Zakłada się przy tym start obu rozwiązań z równoważnych warunków początkowych i racjonalny wybór okresu próbkowania  $T$ , uwzględniający wszystkie składniki eksponencjalne w rozwiązaniu równania (1) w wersji jednorodnej. Przejście od równania (1) do (2) z zachowaniem własności (3) będziemy określać jako proces zgodnej transformacji modelu.

Uwzględnienie w modelu członu wejściowego impulsatora-ekstrapolatora rzędu zerowego jest, w praktyce inżynierskiej, rzeczą naturalną.

**Charakterystycznym zafalowaniem schodkowym**  $\Theta(t, T)$  zbioru obiektów LTI, z jednakowym równaniem ruchu autonomicznego:

$$y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + c_1y'(t) + c_0y(t) = 0, \quad (5)$$

będziemy nazywać funkcję schodkową opisywaną ciągiem:

$$\Theta(t, T) = u_{\Theta}(t) = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, 0, 0, \dots\}. \quad (6)$$

Poziom ( $n+1$ ) niezerowych wyrazów  $s_i$  jest przy tym proporcjonalny do kolejnych współczynników lewej strony równania (2), będącego zgodnym przekształceniem (1), przy zastosowaniu okresu próbkowania  $T$  równego szerokości schodków:  $s_i = \kappa a_i$ .

Odpowiedź modelu (1) pobudzanego jego własnym zafalowaniem schodkowym ustala się, przy zerowych warunkach początkowych, po upływie ( $n+1$ ) okresów próbkowania. Jest to własność na tyle istotna, że ujmijemy ją w postaci twierdzenia.

**Twierdzenie 1.** Rozwiązanie szczególne  $f(t, T)$  liniowego równania różniczkowego (1), uzyskiwane przy:

- pobudzeniu charakterystycznym zafalowaniem schodkowym  $u(t) = \Theta(t, T)$ , wygenerowanym na podstawie współczynników  $a_i$  w **zgodnym modelu** (2), w którym  $b_0 = 0$ ,
- zerowych warunkach początkowych:

$$y^{(n)}(t_0) = 0, \quad y^{(n-1)}(t_0) = 0, \quad \dots, \quad y'(t_0) = 0, \quad y(t_0) = 0, \quad (7)$$

posiada następujące własności:

**A.** ustala się po upływie czasu  $(n+1)T$ , tj. w momencie  $t_k = t_0 + (n+1)T$ , na poziomie zerowym:

$$y^{(n)}(t_k) = 0, \quad y^{(n-1)}(t_k) = 0, \quad \dots, \quad y'(t_k) = 0, \quad y(t_k) = 0, \quad (8)$$

**B.** wartości rozwiązania (1) w pierwszych momentach, będących wielokrotnością okresu próbkowania  $t=iT$  ( $i=1, \dots, n$ ), są równe kolejnym współczynnikom  $b_i$  prawej strony równania (2).

**Dowód twierdzenia.** Współczynnik  $b_0$  w zgodnym modelu (2) jest zerowy z założenia. Wprowadzając do równania (2), w roli kolejnych oddziaływań, wartości schodkowego zafalowania charakterystycznego  $\Theta(t, T)$ :

$$u(0)=1, u(1)=a_1, \dots, u(n)=a_n, u(n+1)=0, u(n+2)=0, \dots \quad (9)$$

otrzymujemy następującą sekwencję wyjściową:

$$y(1)=b_1u(0)=b_1,$$

$$y(2)=-a_1y(1)+b_1u(1)+b_2u(0)=-a_1b_1+b_1a_1+b_2=b_2, \quad (10)$$

$$y(3)=-a_1y(2)+\dots+b_2u(0)=-a_1b_2-a_2b_1+b_1a_2+b_2a_1+b_3=b_3, \text{ itd.}$$

Sekwencja ta określa także poziom rozwiązania równania (1) w kolejnych momentach próbkowania (teza B twierdzenia).

Poziom rozwiązanie równania (2) w momencie  $(n+1)T$  i jego dalsze wartości  $y(nT+iT)$  przyjmują, w świetle (10), wartości zerową. W związku z tym, że od momentu  $(n+1)T$  oddziaływanie  $u(t)$  jest również zerowe, to przebieg rozwiązania  $y(t)$  stabilnego i zgodnego równania (1) ogranicza się także, od tego momentu, do wartości zerowej, co dowodzi poprawności tezy A twierdzenia.

#### Komentarze

➤ Z twierdzenia wynika, że charakterystyczne zafalowanie schodkowe, dopasowane za pośrednictwem amplitud schodków do współczynników wielomianu mianownika transmitancji dyskretnej pobudzanego systemu dynamicznego, implikuje odpowiedź, w postaci której, w określonych momentach czasowych, występują wartości, równe **współczynnikom wielomianu licznika** tejże transmitancji.

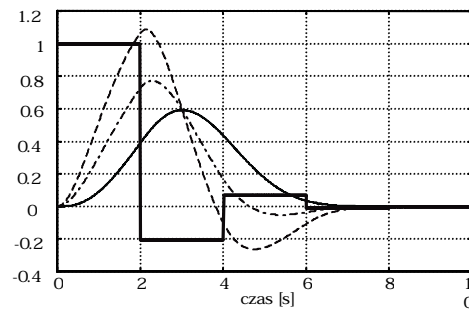
➤ Odpowiedź obiektu, pobudzanego charakterystycznym zafalowaniem schodkowym, niesie w ten sposób uzupełniające dane na temat jego modelu. Nawijając do interpretacji równań (1), (2), jako zgodnych modeli obiektu dynamicznego LTI, nazwiemy ją **charakterystycznym zafalowaniem wyjściowym** i będziemy oznaczać przez  $f(t, T)$ . Długość przedziału czasowego  $[t_0, t_k]$ , w którym charakterystyczne zafalowanie wyjściowe jest niezerowe, nie zależy od prawej strony równania różniczkowego (1). Ważny jest jedynie stosowany okres próbkowania  $T$  i postać równania jednorodnego.

➤ Przy racjonalnym wyborze okresu próbkowania  $T$ , przedstawione w twierdzeniu rozwiązanie jest jednoznaczne dla danego modelu obiektu LTI. Współczynniki wielomianów występujących w transmitancji obiektu otrzymują w ten sposób określoną interpretację fizyczną, a **para sprzężonych przebiegów charakterystycznych**  $\{\Theta(t, T), f(t, T)\}$  stanowi swoisty jego podpis. Rząd obiektu dynamicznego możemy powiązać z minimalną liczbą schodków niezerowego oddziaływania schodkowego, po upływie których, może przejść on od zerowego stanu początkowego (7) do zerowego stanu końcowego (8).

➤ Model stosowany w twierdzeniu jest dostatecznie **reprezentatywny w zastosowaniach**. Uwzględnienie niezerowych wartości współczynnika  $b_0$ , wprowadziłoby do rozważań celowość przeprowadzenia szerszej analizy, z uwzględnieniem otoczenia momentów próbkowania  $kT^+$ ,  $kT^-$ . Obecność w równaniu (1) opóźnienia, będącego wielokrotnością okresu próbkowania  $T$ , spowoduje jedynie odpowiednie, zsynchronizowane przesunięcia indeksów w (10). Uwzględnienie w rozważaniach tych czynników rozszerzyłoby znacznie analizę w kierunku aspektów natury drugoplanowej.

➤ Trajektoria w przestrzeni stanu obiektu dynamicznego LTI wywołana jego własnym charakterystycznym zafalowaniem schodkowym, ma charakter przebiegu zamkniętego, rozpoczynającego się i kończącego w początku przestrzeni stanu. Otrzymujemy w ten sposób zamkniętą trajektorię tworzącą charakterystyczny, dla danego okresu próbkowania  $T$  (a w istocie „przedziału schodkowania”), **cykl stanu**. Mimo skończonej długości oddziaływania nie dochodzi do ruchu autonomicznego testowanego układu dynamicznego.

Na rys.1 przedstawiono, w roli ilustratywnego przykładu, przebieg wejściowego oddziaływania  $\Theta(t, 2s)$  i odpowiedzi charakterystycznej  $f(t, 2s)$  dla trzech obiektów LTI trzeciego rzędu różniących się jedynie wielomianem licznika transmitancji. Różnica jest widoczna w postaci przebiegów odpowiedzi  $f(t, 2s)$  badanych obiektów dynamicznych.



Rys.1. Charakterystyczne zafalowanie schodkowe  $\Theta(t, 2s)$  dla obiektów z wielomianem charakterystycznym  $M(s)=s^3+2.4s^2+2.4s+1$  pokazano linią pogrubioną. Odpowiedzi  $f(t, 2s)$  obiektów  $L_i(s)/M(s)$  pokazano różnymi liniami: ciągłą:  $L_1(s)=1$ , kreskową:  $L_2(s)=s+1$  i kropkono-kreskową  $L_3(s)=2s+1$ .  
Fig.1. Examples of associated signals  $\Theta(t, 2s)$ ,  $f(t, 2s)$  for three LTI plants  $L_i(s)/M(s)$ .

### 3. Transformacja modelu obiektu

Odpowiedź obiektu dynamicznego LTI  $y(t)$  na oddziaływanie wejściowe  $u(t)$  możemy wyliczyć, przy znajomości jego odpowiedzi impulsowej  $g(t)$ , posługując się pojęciem spłotu dwu funkcji. Przy zerowych warunkach początkowych (6):

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (11)$$

Przyjmijmy, że dany obiekt poddano wymuszeniu  $u(t)$  w postaci zafalowania charakterystycznego  $\Theta(t, T)$ . W związku ze stałą wartością tego oddziaływania, w przedziałach czasowych między równomiernie rozmieszczonymi momentami próbkowania, (11) możemy wrazić za pomocą sumy ważonej całek zawierających, w roli funkcji podcałkowej, wyłącznie odpowiednie fragmenty odpowiedzi impulsowej  $g(t)$ . Współczynniki wazące są przy tym równe amplitudom schodków a<sub>i</sub>:

$$y(k) = \sum_{i=0}^n a_i \int_{(k-i)T}^{(k-i-1)T} g(\tau) d\tau, \quad (12)$$

Znajomość odpowiedzi impulsowej charakteryzowanego obiektu wystarcza do wyznaczenia całek – składników widocznej tu sumy ważonej. Będziemy nazywać je dalej **całkami próbkowania**  $g(t)$  i oznaczać przez:  $G_1, G_2, G_3, \dots$ . Wyliczenie całek próbkowania:

$$G_1 = \int_0^T g(\tau) d\tau, G_2 = \int_T^{2T} g(\tau) d\tau, G_3 = \int_{2T}^{3T} g(\tau) d\tau, \dots \quad (13)$$

może stanowić początek procesu obliczeniowego, prowadzącego do wyznaczenia transmitancji obiektu. Potencjalne wyniki wyznaczenia (11) za pośrednictwem (12), możemy przedstawić, przy  $u(t)=\Theta(t, T)$ , w formie układu równań liniowych.

Przy kompletowaniu układu równań skorzystamy z tez zawartych w przedstawionym twierdzeniu I dotyczącym charakterystycznego zafalowania wyjściowego.

**Twierdzenie 2.** Współczynniki  $\{a_i, b_i\}$  równania różnicowego (2) z zerowym  $b_0=0$ , zgodnego (tj. zachowującego cechę niezmienności odpowiedzi na oddziaływanie typu schodkowego) z równaniem (1), spełniają następujący układ równań:

$$\begin{aligned} G_1 &= b_1, & G_2 + G_1 a_1 &= b_2, & G_3 + G_2 a_1 + G_1 a_2 &= b_3, \dots, \\ G_n + G_{n-1} a_1 + \dots + G_1 a_{n-1} &= b_n, & G_{n+1} + G_n a_1 + \dots + G_1 a_n &= 0, \\ G_{n+2} + G_{n+1} a_1 + \dots + G_2 a_n &= 0, \dots \text{ itd.} \end{aligned} \quad (14)$$

przy czym  $G_i$  reprezentują w równaniach całki próbkowania wyznaczone na podstawie (13) i odpowiedzi  $g(t)$  modelu (1).

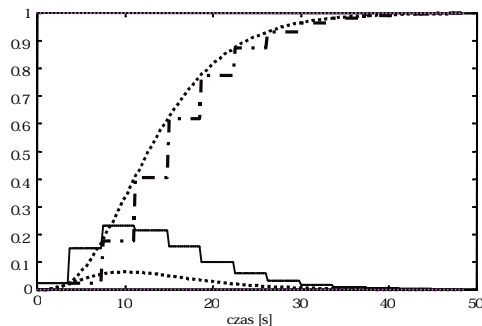
**Dowód twierdzenia.** Lewe strony równań (14) stanowią po prostu zapis liniowych kombinacji całek próbkowania  $G_i$ ,

występujących w kolejnych wyrażeniach splotowych (12). Jeżeli  $G_i$  wyznacza się na podstawie odpowiedzi impulsowej  $g(t)$  modelu (1) obiektu LTI, to wyrażają one wartości wyjścia  $y(k)$  w kolejnych chwilach próbkowania, przy schodkowym oddziaływaniu wejściowym  $u(t)$  z amplitudami schodków  $a_i$ . Jeżeli, poza tym,  $u(t)=\Theta(t,T)$ , to wobec też twierdzenia 1, na temat zafalowania wyjściowego  $f(t,T)$ , wartości te są równe współczynnikom widocznym w prawych stronach równań (14).

#### Wniosek

Kolejne,  $(n+1)$ -elementowe sekwencje zstępujące całek próbkowania, począwszy od początkowej:  $\{G_{n+1}, G_n, \dots, G_2, G_1\}$ , spełniają **równanie charakterystyczne obiektu LTI** w zgodnej wersji dyskretnej, związanej z zastosowanym, przy podziale  $g(t)$ , okresem próbkowania  $T$ :

$$G_{n+1}+G_{n+1}a_1+\dots+G_1a_n=0, \quad G_{n+2}+G_{n+1}a_1+\dots+G_2a_n=0, \dots, \text{ itd} \quad (15)$$



Rys.2. Ilustracja do zawartego w tekście przykładu transformacji modelu z odpowiedzi impulsowej lub skokowej badanego obiektu (przebiegi  $g(t)$ ,  $h(t)$  wykropkowano) do transmitancji na podstawie całek próbkowania lub różnic odpowiedzi skokowej (przebiegi schodkowe pokazują stosowane  $G_i$ ,  $\Delta h_i$ ).  
Fig.2. Chart illustrating problem of model transformation (description in text).

#### Komentarze

➤ **Problem współczynników** wielomianów licznika  $\{b_i\}$  i mianownika  $\{a_i\}$ , dogodniej jest rozpatrywać oddzielnie. Kierując się wnioskiem (15) można skompletować (nadmiarowy) układ równań, zawierający tylko połowę wszystkich poszukiwanych współczynników w modelu dyskretnym. Po rozwiązaniu (15), współczynniki  $\{b_i\}$  dają się wyznaczyć bezpośrednio z pierwszych  $n$  zależności (14). Interpretacja, nieuwzględnianego w równaniach, współczynnika  $b_0$  wielomianu licznika  $B(z^{-1})$  byłaby z tego punktu widzenia specyficzna. Wyrażenie związane z jego wyznaczeniem przyjęłoby postać typu:  $y(0^+)=g(0^+)=b_0$ .

➤ **Z inżynierskiego punktu widzenia** przedstawione twierdzenie zawiera zasady kompletowania układu równań, wiążącego współczynniki występujące w wielomianach transmitancji dyskretnej opisywanego obiektu z przebiegiem znanej  $g(t)$ . Nie korzysta się przy tym ze związków wynikających z transformacji całkowych. Nie występują także ograniczenia związane z aproksymacją pochodnej. Układ równań (14) odzwierciedla wiernie zależności wynikające z (wirtualnej) dyskretyzacji w czasie modelu obiektu dynamicznego LTI.

➤ Przy rozwiązywaniu skompletowanego układu równań mogą wystąpić natomiast trudności numeryczne, związane z niedostatecznym dopasowaniem stopnia uwarunkowania układu równań do stopnia dokładności (znajomości) występujących w nim całek próbkowania. **Uwarunkowanie układu równań** pogarsza się szybko wraz ze wzrostem liczby niewiadomych. Zmiany są gwałtowne przy próbie przekroczenia, w trakcie obliczeń, rzeczywistego rzędu modelowanego obiektu.

➤ Kolejne wartości całek próbkowania możemy wyznaczyć bezpośrednio na podstawie przebiegu **odpowiedzi skokowej**  $h(t)$ . W świetle znanego związku między odpowiedziami czasowymi  $g(t)$  i  $h(t)$  obiektu dynamicznego, całki próbkowania  $G_i$  (13) możemy interpretować i wyznaczać za pośrednictwem różnic  $h(t)$ :

$$G_1=\Delta h_1=h(T)-h(0), \quad G_2=\Delta h_2=h(2T)-h(T), \dots \quad (16)$$

Przenosząc ten fakt na (15) otrzymamy nieco inną wersję układu równań, związanego z wielomianem charakterystycznym modelu dyskretnego:

$$\Delta h_{n+1}+\Delta h_{n+1}a_1+\dots+\Delta h_1a_n=0, \quad \Delta h_{n+2}+\Delta h_{n+1}a_1+\dots+\Delta h_2a_n=0, \dots \quad (17)$$

**Przykład transformacji.** Proces transformacji odpowiedzi impulsowej obiektu LTI na model w postaci transmitancji dyskretnej zilustrowano przy pomocy obliczeń numerycznych w Matlabie. Niezbędną informację startową uzyskano po wprowadzeniu do przestrzeni roboczej Matlab'a współczynników wielomianów mianownika:  $Mo=(s+1)(2s+1)(3s+1)(4s+1)(5s+1)$  i licznika  $Lo=1$  przykładowej transmitancji obiektu, a następnie wyznaczeniu poprzez:  $g=impz(Lo,Mo,0:0.1:70)$  jego odpowiedzi impulsowej.

Rozwiązywanie układów równań typu (14,15), na tle różnych (np.  $N=10-20$ ) współczynników zwielokrotnienia podstawowego okresu rejestracji  $T_R=0,1s$ , tj. przy  $T=1-2s$ , daje rezultaty równoważne (dokładność przynajmniej 4 cyfr po przecinku) do uzyskiwanych metodą 'zoh' (ang. zero order holder) w ramach m-funkcji *c2dm*. Wyznaczanie transmitancji dyskretnej charakteryzowanego obiektu, na podstawie transmitancji Laplace'a, przeprowadza się w danej wersji obliczeń Matlab'a za pośrednictwem wyliczenia macierzy tranzycyjnej równoważnych równań stanu dla zadanego okresu próbkowania.

Przy numerycznym wyznaczeniu całek próbkowania  $G_i$  (13) stosowano metodę trapezów.

## 4. Proces identyfikacji transmitancji

Przedstawiona metoda przekształcenia odpowiedzi czasowej obiektu LTI, na jego transmitancję dyskretną, posiada postać dostosowaną do wykorzystania w trakcie badań empirycznych. Doświadczenie prowadzące potencjalnie do identyfikacji modelu parametrycznego badanego obiektu jest tu krańcowo proste. Sprawą otwartą pozostaje natomiast odpowiedź na pytanie na temat możliwości skorzystania z przedstawionych układów równań (14) w określonym zadaniu identyfikacji. W konkretnej sytuacji, może wystąpić „niedopasowanie” dokładności rejestracji odpowiedzi czasowej badanego obiektu do wymagań stawianych przez poziom uwarunkowania uzyskiwanych układów równań. Uwarunkowanie równań pogarsza się wraz ze wzrostem rzędu modelu.

**Środki zaradcze natury ogólnej** mogą być związane z:

- starannym doбором obliczeniowego okresu dyskretyzacji  $T$ , niezależnego od okresu próbkowania w trakcie rejestracji  $T_R$ ,
- kompletowaniu nadmiarowych równań i rozwiązywaniem układu przy pomocy estymatora najmniejszych kwadratów,
- rezygnacją z odtwarzania niektórych drugorzędnych szczegółów w modelu, a tym samym zmniejszenia rzędu modelu i liczby niewiadomych.

**Racjonalny wybór  $T$**  jest problemem trudnym w tych sytuacjach, w których całki próbkowania  $G_i$  są wyznaczone przy udziale istotnego czynnika natury losowej. Problem wyboru komplikuje się szczególnie przy identyfikacji tych obiektów, w przebiegach przejściowych których reprezentowane są jednocześnie bardzo szybkie i bardzo wolne składniki eksponencjalne.

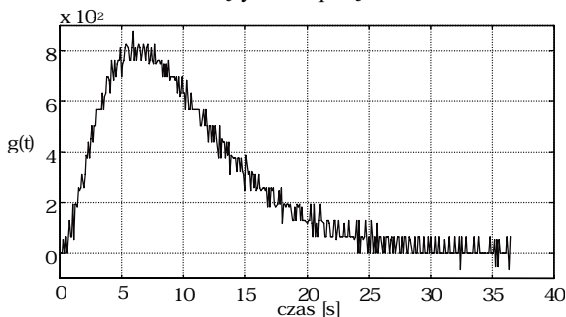
Zmniejszanie  $T$  zmniejsza wartość wyznaczanych całek próbkowania  $G_i$  i prowadzi do wzrostu roli czynnika przypadkowego. Zwiększanie  $T$  natomiast wiąże się z szybkim spadkiem norm wektorów współczynników równań:  $[G_{n+1}, \dots, G_{i+1}, G_i]$ , ze „starszymi” indeksami  $i$ , w konsekwencji, z ich małą nieprzydatnością.

W praktyce, wartość  $T^*$  bliska optymalnej, możemy otrzymać przy zastosowaniu, w trakcie rejestracji, względnie wysokiej częstotliwości próbkowania  $f_R=1/T_R$ . Uzyskujemy wówczas, przy zastosowaniu różnych współczynników  $N$  zwielokrotnienia  $T_R$ :  $T=NT_R$ , możliwość przeprowadzenia reprezentatywnej analizy obliczeniowej. Obliczeniowy okres próbkowania  $T^*=N^*T_R$  można wówczas wybrać na podstawie weryfikacji jakości poszczególnych wersji transmitancji z otrzymanego w ten sposób, dyskretnego zbioru rozwiązań.

**Nadmiarowość układu równań** może być potencjalnie środkiem zmniejszenia wariancji ocen współczynników  $a_1, \dots, a_n$  w



sytuacjach, w których należy się liczyć z występowaniem istotnego czynnika natury losowej. Oprócz naturalnego mechanizmu powtarzania i uśredniania wyników doświadczeń, odnotujemy możliwość skompletowania nadmiarowego układu równań na podstawie (15) lub (17). Ograniczenia w tym zakresie związane są z obliczeniowym okresem próbkowania  $T$ . Poziom  $T$  zależy od postaci modelu i wariancji zakłóceń pomiarowych. Możliwość szerszego spojrzenia na ten problem wynika ze stwierdzonej w [3], poprawności analogicznych równań, sformułowanych przy pomocy wyrazów dyskretnej wersji funkcji korelacji własnej  $R(k)$  odpowiedzi impulsowej badanego obiektu. **Redukcja rzędu modelu** jest problemem indywidualnym, związanym w każdej sytuacji z analizą przydatności uzyskiwanego modelu. W trakcie identyfikacji, na tle struktur modelu niedostatecznie dopasowanych do rzeczywistości, mogą być formułowane i rozwiązywane sprzężone zadania dodatkowe.



Rys.3. Przebieg odtworzonej odpowiedzi impulsowej w przykładzie identyfikacji.  
Fig.3. Restored impulse response in the example of identification.

**Przykład identyfikacji.** Na stanowisku laboratoryjnym z możliwością modelowania analogowych obiektów dynamicznych skompletowano obiekt trójinercyjny z (ustalonymi przy pomocy standardowych elementów elektronicznych) stałymi czasowymi 2s, 3s i 5s. Nie forsując dokładności pomiarów zarejestrowano ( $T_R=0,1s$ ) jego odpowiedź skokową. Szum kwantowania przetwornika AC jest wyraźnie widoczny na odpowiedzi impulsowej ( $g_i=\Delta h_i/T_R$ ) pokazanej na rys.3. Po 18-krotnym zwielokrotnieniu  $T=18T_R$  w obliczeniach, otrzymano wielomian charakterystyczny obiektu:  $A(z^{-1})=1-1.64z^{-1}+0.87z^{-2}-0.15z^{-3}$ , podczas gdy postać nominalna:  $A^*(z^{-1})=1-1.65z^{-1}+0.89z^{-2}-0.16z^{-3}$ . Różnice w określeniu wielomianu licznika są nieco większe. Uzyskano wynik:  $B(z^{-1})=0.0211z^{-1}+0.0506z^{-2}+0.0101z^{-3}$  wobec wielomianu nominalnego  $B^*(z^{-1})=0.0206z^{-1}+0.0523z^{-2}+0.0081z^{-3}$ . Odpowiedzi skokowe obu modeli (hipotetycznego i zidentyfikowanego) wizualnie się nie różnią. Po przeniesieniu biegunów modelu dyskretnego na płaszczyznę zmiennej zespolonej „s” otrzymano zwrótnie informację na temat stałych czasowych otrzymanego modelu: 1.81s, 3.18s i 5.06s.

**Weryfikacja uzyskanego modelu** może być przeprowadzona na podstawie porównywania odpowiedzi otrzymanego modelu z analogicznymi przebiegami z doświadczenia. Niezależnie od analizy standardowych odpowiedzi typu  $g(t)$ ,  $h(t)$ , w świetle rozważań z poprzednich punktów, pojawia się także dodatkowa możliwość ukształtowania sygnału testującego.

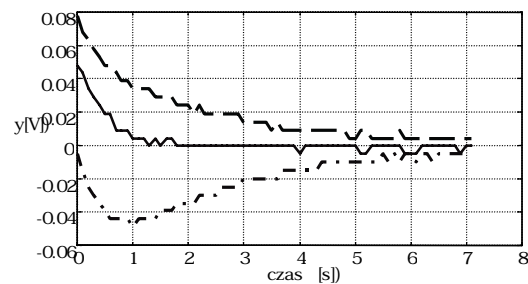
Doświadczenie weryfikacyjne możemy przeprowadzić oddziaływując sygnałem testującym, uformowanym na kształt charakterystycznego zafalowania schodkowego  $\Theta(t,T)$ , skonstruowanego zgodnie uzyskanym w trakcie identyfikacji wielomianem  $A(z^{-1})$  lub jego odpowiednikiem. Biorąc pod uwagę znajomość oczekiwanej odpowiedzi badanego obiektu, otrzymamy wówczas możliwość bardzo przejrzystej oceny zgodności modelu z rzeczywistością.

Z metrologicznego punktu widzenia, doświadczenie tego rodzaju zawiera bezpośrednio **elementy pomiaru typu różnicowego**. Przy pełnej zgodności wielomianów charakterystycznych obu obiektów zafalowanie wyjściowe, po przekroczeniu momentu  $t_k=t_0+(n+1)T$ , zanika. Z drugiej strony, nawet przy stosunkowo nieznacznej różnicy wielomianów charakterystycznych, zaobserwujemy wydłużoną odpowiedź badanego obiektu.

Wystarczy w związku z tym, przeanalizować stosunkowo krótki, kilkutaktowy, fragment odpowiedzi.

Racjonalnie zaplanowana, za pośrednictwem  $\Theta(t,T)$ , sekwencja skokowych przyrostów oddziaływania wejściowego  $u(t)$  może być informacyjnie efektywniejsza od pojedynczego skoku oddziaływania wejściowego.

Na rys.4 zilustrowano ten efekt, przedstawiając końcowy fragment przebiegu zafalowania wyjściowego, pod wpływem oddziaływania  $5\Theta(t,1.8s)$ , skonstruowanego na podstawie wyniku otrzymanego w przedstawionym przykładzie identyfikacji. Fakt zakończenia odpowiedzi po upływie 4 taktów jest świadectwem poprawności tego wyniku.



Rys.4. Takty 4-7 przebiegu zafalowania  $y(t)$  w odpowiedzi na  $u(t)=5\Theta(t,1.8s)$ , dla obiektu zgodnego (linia ciągła) i po zmianie jednej ze stałych czasowych o 1s w stronę wzrostu (linia przerywana) i spadku (linia kropkowo-przerywana).

Fig.4. The differences of outputs signals in three situations described below.

Warto podkreślić, że w praktyce (m.in. w doświadczeniach *on line*) zafalowanie charakterystyczne może stanowić jedynie punkt wyjściowy, bazę, do konstruowania bardziej skomplikowanych **sygnałów testujących**, uwrażliwiających lub zwiększających odporność procesu detekcji niezgodności na zakłócenia. Skuteczniejszym może być na przykład zastosowanie w trakcie weryfikacji modelu zwielokrotnionej sekwencji zafalowań charakterystycznych lub wygenerowanie przebiegu testującego wynikającego z pomnożenia wielomianu charakterystycznego przez „uwrażliwiający” wielomian, itp.

## 5. Uwagi końcowe

Przedstawione wyniki są formą zasygnalizowania możliwości niestandardowego rozwiązania kilku istotnych problemów identyfikacji i weryfikacji stosowanego modelu.

Przedstawiony sposób transformacji przebiegu przejściowego obiektu dynamicznego LTI na jego model w postaci równania różnicowego może stanowić potencjalnie, przynajmniej w prostszych sytuacjach, dobry punkt wyjściowy do skutecznego rozwiązania zadania identyfikacji modelu parametrycznego obiektu dynamicznego. Zwraca przy tym uwagę prostota wymaganego doświadczenia wynikająca z możliwości wyrażenia różnych wersji obliczeniowych całek próbkowania na podstawie odpowiedzi skokowej badanego obiektu.

Proces detekcji różnicy własności stosowanego modelu w stosunku do rzeczywistości może być, potencjalnie, usprawniany w wyniku zastosowania krótkich sygnałów testujących, zawierających „w sobie” informacje na temat testowanego modelu.

## 6. Literatura

- [1] Nahorski Z.: Identyfikacja obiektów z czasem ciągłym na podstawie zakłóconych dyskretnych pomiarów przebiegów przejściowych. PWN, Warszawa – Łódź, 1991.
- [2] Zieliński T.P.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKiŁ, Warszawa, 2005
- [3] Leszczyński J.: Transformacja modelu obiektu dynamicznego. III Krajowa Konferencja Modelowanie i Symulacja, Kościelisko, 21-24.06.2004 strony od 439-do 446.