

Jerzy AUGUSTYN

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA,
Al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-314 Kielce

Algorytm estymacji składowych impedancji w trójkanałowym układzie akwizycji danych

Dr hab. inż. Jerzy AUGUSTYN



Ukończył studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w 1978 r. Na tym samym Wydziale w roku 1988 uzyskał stopień doktora nauk technicznych, a w roku 2008 – doktora habilitowanego. Profesor w Katedrze Elektrotechniki i Systemów Pomiarowych Wydziału Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Świętokrzyskiej. Główne zainteresowania naukowe: pomiary impedancji, algorytmy przetwarzania danych pomiarowych, propagacja niepewności w systemach pomiarowych.

e-mail: j.augustyn@tu.kielce.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono algorytm do estymacji składowych impedancji, wyznaczonych na podstawie spróbkowanych wartości napięć związanych z tą impedancją oraz napięcia generatora zasilającego układ pomiarowy. W celu wykorzystania algorytmu dopasowania do elipsy, do zredukowania wymiaru macierzy danych wejściowych, zastosowano analizę głównych składowych. Uzyskane wyniki porównano z algorytmem dopasowania do elipsy dla danych pierwotnych, nie uwzględniających ograniczenia wynikającego z pomiaru napięcia generatora.

Słowa kluczowe: algorytmy pomiarowe, analiza głównych składowych, dopasowanie do elipsy, pomiary składowych impedancji.

Impedance component estimation algorithm in a three-channel data acquisition system

Abstract

The paper presents an algorithm for estimating impedance components that were determined on the basis of sampled voltages associated with this impedance as well as a voltage of the signal generator feeding the measuring system. Since all signal processing circuit elements introduce errors, a set of N points described by equations (5) does not lie on the plane but it creates a cloud in the 3-D space. To determine the parameters of the plane (5b) on which the measurement results should be located, the principal component analysis can be used [10]. In this method the data dimension is reduced by searching for a plane which maximizes the variance of the data collected in \mathbf{X} . For sequences of the sampled signal values, the covariance matrix of a sample (6) can be calculated. Then there are determined eigenvalues λ_j and eigenvectors \mathbf{a}_j of the covariance matrix \mathbf{C} . A base of the plane which is the best 2-D approximation of the data contained in \mathbf{X} is defined by the eigenvectors \mathbf{a}_1 and \mathbf{a}_2 . For the determined base of the plane, the data can be transformed to the coordinate system defined by the vectors \mathbf{a}_1 and \mathbf{a}_2 (8). The adjusted coordinate values of points in the coordinate system $Oxyz$, are obtained after transformation (9). The first two columns of this matrix are the input data for the ellipse-fit algorithm. The results obtained with use of the principal component analysis were compared with those from the ellipse-fit algorithm for raw data, without taking into account constraints of the generator voltage measurement. Properties of the proposed algorithm and particularly the influence of incoherent sampling were examined with the Monte Carlo method. The influence of incoherent sampling on the random characteristics of the relative measurement error of impedance components is shown in Fig. 3 in the form of histograms of error values of the module $\delta|Z|$ and the phase angle $\delta\varphi$ of the impedance Z .

Keywords: measurement algorithms, principal component analysis, ellipse fitting, measurement of impedance components.

1. Wprowadzenie

Zastosowanie układów pomiarowych z przetwarzaniem analogowo-cyfrowym umożliwia wykorzystanie odpowiednich algorytmów cyfrowego przetwarzania spróbkowanych sygnałów pomiarowych do wyznaczenia wartości składowych impedancji

[1-9]. Znanych jest wiele algorytmów przetwarzania stosowanych przy zasilaniu mierzonej impedancji sinusoidalnym napięciem lub prądem. Często w takich przypadkach wykorzystuje się algorytmy dopasowania do sygnałów sinusoidalnych zapisanych w postaci parametrycznej lub uwikłanej. Dane wejściowe do wyznaczenia parametrów tych sygnałów uzyskuje się w dwukanałowym układzie akwizycji danych, w którym próbkowane są jednocześnie przebiegi napięcia na mierzonej impedancji oraz napięcia na szeregowym oporniku wzorcowym - proporcjonalnego do prądu płynącego przez tą impedancję. W przypadku niekoherentnego próbkowania stosowany jest algorytm dopasowania do elipsy, w którym estymowane parametry wyznacza się z równania krzywej stożkowej, otrzymanej po wyeliminowaniu czasu z układu równań opisujących napięcie $u(t)$ i prąd $i(t)$ na mierzonej impedancji [7-9]. Jeżeli

$$u(t) = U_0 + U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (1a)$$

$$i(t) = I_0 + I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (1b)$$

gdzie: U_0, I_0 oznaczają składowe stałe przebiegów napięcia i prądu, U_m, I_m – wartości amplitud, a ψ_u, ψ_i – wartości ich faz początkowych,

to po wyeliminowaniu czasu t , układ równań (1), opisujący elipsę, można zapisać go w postaci równania krzywej stożkowej

$$\left(\frac{u-U_0}{U_m}\right)^2 + \left(\frac{i-I_0}{I_m}\right)^2 - 2\frac{(u-U_0)(i-I_0)}{U_m I_m} \cos\varphi - \sin^2\varphi = 0, \quad (2)$$

gdzie: $\varphi = \psi_u - \psi_i$ oznacza kąt przesunięcia fazowego pomiędzy napięciem a prądem.

Występujące w równaniu (2) wartości amplitud prądu I_m i napięcia U_m oraz $\cos\varphi$ mogą być wykorzystane do obliczenia wartości składowych impedancji.

Układ pomiarowy złożony z szeregowo połączonej mierzonej impedancji Z oraz rezystora wzorcowego R_N jest zasilany z generatora napięcia sinusoidalnego. Dla takiego obwodu można napisać równanie napięć:

$$u_G(t) = u(t) + R_N i(t). \quad (3)$$

Równanie (3) wprowadza dodatkowe ograniczenie na wartości sygnałów związanych z mierzoną impedancją Z , które można wykorzystać do zmniejszenia niepewności związanych z estymowanymi składowymi impedancjami. W tym celu należy uzupełnić układ pomiarowy o dodatkowy tor akwizycji sygnału generatora $u_G(t)$. W każdym z trzech kanałów układu akwizycji danych wartości chwilowe napięć $u(t)$, $u_G(t)$ oraz prądu $i(t)$ są przetwarzane na ciągi wartości sygnałów wyjściowych przetworników a/c $\{u(n)\}$, $\{u_G(n)\}$ oraz $\{i(n)\}$, wyznaczone w chwilach próbkowania $n=0, 1, \dots, N-1$. W prezentowanej pracy przedstawiono dwustopniowy algorytm, wykorzystujący dodatkową informację o próbkowanych sygnałach, zawartą w (3) oraz algorytm dopasowania do elipsy oparty na równaniu krzywej stożkowej (2), do estymacji składowych impedancji.

2. Algorytm dopasowania do płaszczyzny

Równaniom (2) oraz (3) opisującym model pomiaru składowych impedancji można przypisać interpretację geometryczną

(rys. 1). Biorąc pod uwagę, że sygnały związane z impedancją Z muszą spełniać jednocześnie oba te równania, zbiór punktów

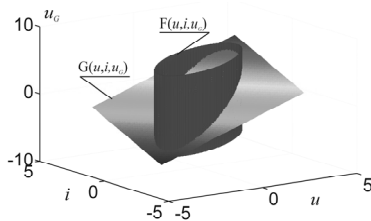
$$P_n(u(n), i(n), u_G(n)) = P_i(x_i, y_i, z_i), \quad (4)$$

otrzymanych w wyniku spróbkowania trzech napięć występujących w analizowanym obwodzie przedstawia elipsę w trójwymiarowym układzie współrzędnych kartezjańskich Oxyz, otrzymaną w wyniku przecięcia walca eliptycznego

$$F(u, i, u_G) = au^2 + bui + ci^2 + du + ei + g = 0 \quad (5a)$$

z płaszczyzną

$$G(u, i, u_G) = Au + Bi + Cu_G + D = 0. \quad (5b)$$



Rys. 1. Interpretacja geometryczna modelu pomiaru składowych impedancji w trójkanalowym układzie akwizycji danych

Fig. 1. Geometric interpretation of the impedance component measurement model in a three-channel data acquisition system

Ponieważ wszystkie elementy toru przetwarzania sygnałów, począwszy od układów wstępnego przetwarzania napięcia i prądu, poprzez układy próbkująco-pamiętające i przetworniki analogowo-cyfrowe wprowadzają błędy, zbiór N punktów opisanych równaniami (5) nie leży na płaszczyźnie ale tworzy chmurę w przestrzeni 3-wymiarowej. Do wyznaczenia parametrów płaszczyzny (5b), na której powinny znajdować się wyniki pomiarów można wykorzystać analizę głównych składowych [10]. W metodzie tej redukuje się wymiar przestrzeni danych, poszukując płaszczyzny maksymalizującej wariancję wyjściowej przestrzeni danych.

Dla ciągów spróbkowanych wartości sygnałów, zebranych w $N \times 3$ wymiarowej macierzy danych \mathbf{X} , można obliczyć macierz kowariancji z próby:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N-1} \left(\mathbf{X} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_{N \times N} \mathbf{X} \right)^T \left(\mathbf{X} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_{N \times N} \mathbf{X} \right) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (6)$$

gdzie: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{bmatrix} = [\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}]$, a $\mathbf{1}_{N \times N}$ jest $N \times N$ wymiarową

macierzą jedynek.

Następnie wyznacza się wartości własne oraz wektory własne macierzy kowariancji \mathbf{C} :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3, \quad (7)$$

gdzie: $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ to 3×3 wymiarowa macierz kolumnowych wektorów własnych \mathbf{a}_j , odpowiadających wartościom własnym λ_j .

Wartości własne λ_1 oraz λ_2 odpowiadają największej z możliwych do przedstawienia na płaszczyźnie wariancji danych wejściowych \mathbf{X} . Ponieważ macierz kowariancji \mathbf{C} jest z założenia macierzą rzeczywistą i symetryczną, wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Dlatego wektory własne \mathbf{a}_1 oraz \mathbf{a}_2 definiują bazę płaszczyzny, która jest najlep-

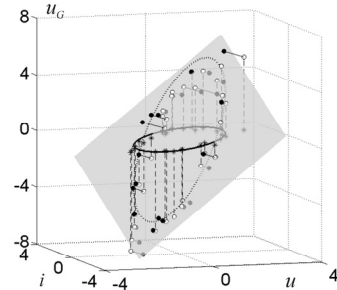
szą dwuwymiarową aproksymacją danych zawartych w \mathbf{X} . Natomiast elementy wektora własnego \mathbf{a}_3 definiują wektor normalny do tej płaszczyzny. Dla wyznaczonej bazy płaszczyzny można dokonać transformacji danych do układu współrzędnych określonego przez wektory bazy

$$\mathbf{X}_{2D} = \left(\mathbf{X} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_{N \times N} \mathbf{X} \right) [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] \in \mathbb{R}^{N \times 2}. \quad (8)$$

Natomiast w celu wyznaczenia skorygowanych wartości współrzędnych punktów $\tilde{P}_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$ w układzie współrzędnych Oxyz, należy wykonać przekształcenie

$$\tilde{\mathbf{X}} = [\tilde{\mathbf{x}} \ \tilde{\mathbf{y}} \ \tilde{\mathbf{z}}] = \frac{1}{N} \mathbf{1}_{N \times N} \mathbf{X} + \mathbf{X}_{2D} [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]^T \in \mathbb{R}^{N \times 3}. \quad (9)$$

Dwie pierwsze kolumny macierzy skorygowanych wartości współrzędnych stanowią dane wejściowe dla algorytmu dopasowania do elipsy. Sposób wykorzystania analizy głównych składowych do wyznaczenia skorygowanych wartości współrzędnych punktów elipsy przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Interpretacja geometryczna algorytmu dopasowania do płaszczyzny danych 3-wymiarowych. Symbolem \bullet oznaczono punkty zebrane w macierzy danych \mathbf{X} , tworzące chmurę w przestrzeni 3-wymiarowej, \circ - rzuty tych punktów na płaszczyznę zdefiniowaną przez wektory własne \mathbf{a}_1 oraz \mathbf{a}_2 , zebrane w macierzy $\tilde{\mathbf{X}}$, $*$ - rzuty tych punktów na płaszczyznę Oxy (dwie pierwsze kolumny macierzy (9))

Fig. 2. Geometric interpretation of algorithm for fitting a plane to 3-D data. By symbol \bullet are marked points collected in the data matrix \mathbf{X} , forming a cloud in 3-D space, \circ - projections of these points on a plane, defined by eigenvectors \mathbf{a}_1 and \mathbf{a}_2 , gathered in matrix $\tilde{\mathbf{X}}$, $*$ - projections of these points on the Oxy plane (first two columns of the matrix (9))

3. Algorytm dopasowania do elipsy

Dla każdego z wyznaczonych skorygowanych wartości współrzędnych punktów położonych w układzie współrzędnych Oxy, równanie (5a) można zapisać w postaci wektorowej

$$F(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i \mathbf{a} = 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

gdzie: $\mathbf{x}_i = [\tilde{x}_i^2, \tilde{x}_i \tilde{y}_i, \tilde{y}_i^2, \tilde{x}_i, \tilde{y}_i, 1]$, $\mathbf{a} = [a, b, c, d, e, g]^T$.

Do obliczenia wartości elementów wektora \mathbf{a} stosuje się metodę najmniejszych kwadratów, minimalizując sumę kwadratów funkcji (10) dla wszystkich N chwil próbkowania. Dla $b^2 - 4ac < 0$ opisuje ono elipsę. Aby ograniczyć zbiór rozwiązań jedynie do elipsy nierówność przeskalowuje się do równania [7-9,11]

$$4ac - b^2 = 1. \quad (11)$$

Ostatecznie rozwiązanie otrzymuje się w wyniku zastosowania mnożników Lagrange'a i wyznaczeniu sześciu wartości własnych λ_i . Poszukiwanym rozwiązaniem jest wektor własny $\mathbf{a}(\min \lambda_i > 0)$, odpowiadający najmniejszej dodatniej wartości λ_i

własnej. Na podstawie znanych wartości elementów wektora współczynników \mathbf{a} , wartości składowych impedancji wyznacza się z zależności

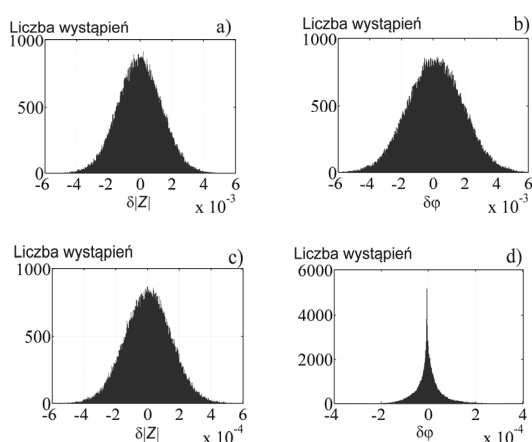
$$Z = \sqrt{\frac{a}{c}}, \quad \varphi = k \arccos \frac{-\text{sign}(a)b}{2\sqrt{ac}}, \quad (12)$$

gdzie znak współczynnika $k=\pm 1$ (w zależności od kierunku rotacji elipsy), wyznacza się na podstawie pomocniczej procedury [8]. Ponieważ do wyznaczenia składowych (12) wymagana jest znajomość jedynie elementów a , b i c macierzy współczynników \mathbf{a} , w celu obliczenia wektora własnego można posłużyć się algorytmem [11], wykorzystującym dekompozycję wektora \mathbf{x} na część liniową i nieliniową, co umożliwi zmniejszenie wymiaru poszukiwanego wektora własnego do postaci $\mathbf{a}_1 = [a, b, c]^T$.

4. Badania symulacyjne

Ocenę niepewności pomiaru w układzie złożonym z przetwornika próbkującego oraz algorytmu przetwarzania umożliwia zastosowanie metody Monte Carlo, wykorzystującej matematyczny model pomiaru oraz zasadę propagacji rozkładów prawdopodobieństwa [5-7, 12].

W celu zbadania wpływu niekoherentnego próbkowania oraz błędu kwantowania na niepewność pomiaru składowych impedancji dla zaproponowanego algorytmu, przeprowadzono eksperyment symulacyjny. Przedstawiony algorytm porównano z algorytmem dopasowania do elipsy, wykorzystującym nieskorygowane wartości próbek sygnałów napięcia i prądu związanych z badaną impedancją. Założono, że współczynnikiem 12-bitowe przetworniki a/c o zakresach odpowiadających amplitudom przetwarzanych sygnałów, a sinusoidalny sygnał wymuszający o częstotliwości $f=1000\text{Hz}$ miał amplitudę 5V . Przyjęto, że elementy układu pomiarowego wprowadzają przesunięcie zera, a z próbkowanymi sygnałami związany jest addytywny szum o rozkładzie normalnym, niezależny w każdym z kanałów. Ponadto założono próbkowanie niekoherentne z współczynnikiem desynchronizacji [7] losowanym z populacji o rozkładzie jednostajnym, ograniczonym do zakresu $\alpha \in (-0,05, 0,05)$. Badania symulacyjne dla impedancji $Z=1000 - j1000 \Omega$, $N=64$ próbek, powtarzano 100 000 razy, a wyniki w postaci histogramów względnych błędów estymacji modułu $\delta|Z|$ i kąta fazowego $\delta\varphi$ impedancji przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Histogramy błędów określenia wartości modułu $\delta|Z|$ i kąta fazowego $\delta\varphi$ impedancji Z , otrzymane na podstawie algorytmu dopasowania do elipsy (a i b) oraz po zastosowaniu analizy głównych składowych (c i d)

Fig. 3. Histograms of error values of the module $\delta|Z|$ and the phase angle $\delta\varphi$ of the impedance Z obtained from the ellipse fitting algorithm (a, b) and after application of the principal component analysis (c, d)

5. Wnioski

Wyniki symulacji wskazują na możliwość zmniejszenia niepewności estymacji składowych impedancji o jeden rząd wielkości w wyniku zastosowania analizy głównych składowych. Względne błędy estymacji modułu impedancji $\delta|Z|$, charakteryzują się rozkładem zbliżonym do normalnego (rys. 3a, 3c). Histogram względnej błęd estymacji kąta fazowego $\delta\varphi$, wyznaczonego jedynie na podstawie próbek napięcia i prądu związanych z badaną impedancją (rys. 3b), również charakteryzuje się rozkładem normalnym o nieznacznie większej wariancji w porównaniu z rozkładem błęd modułu impedancji. Zastosowanie metody analizy głównych składowych, jako wstępnego etapu przetwarzania danych zmierzonych w trójkanałowym układzie akwizycji danych, spowodowało zmianę typu rozkładu prawdopodobieństwa błęd kąta fazowego oraz ponad 20-krotne zmniejszenie jego rozproszenia (rys. 3d) w porównaniu z wynikami uzyskanymi w układzie dwukanałowym. Wynika to z wykorzystania w algorytmie przetwarzania dodatkowych informacji, wynikających z ograniczenia narzuconego na przetwarzane sygnały przez równanie napięć (3).

6. Literatura

- [1] Augustyn J.: Pomiary impedancji metodami algorytmicznymi, *Pomiary Automatyka Kontrola*, 4 (2006), s. 14-16.
- [2] Augustyn J.: Algorytmiczne metody pomiaru impedancji, *Monografie, Studia, Rozprawy Nr 53*, Wyd. Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2006.
- [3] Augustyn J.: Influence of the structure of signal conditioning circuits on the uncertainty of impedance measurement with algorithmic methods, *Metrology and Measurement Systems*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008, vol. XIV, no. 4/2007, pp. 529-541.
- [4] Augustyn J.: Algorytmy przetwarzania sygnałów pomiarowych w układach do pomiarów składowych immitancji, *Metrology and Measurement Systems*, 4 (1999), s. 223-230.
- [5] Augustyn J.: Niepewność pomiaru impedancji metodami algorytmicznymi, *Pomiary Automatyka Kontrola*, nr 10, 2007, s. 3-6.
- [6] Augustyn J.: Some LMS-based algorithms for impedance measurements, *Measurement*, vol. 41, no. 2, 2008, pp. 178-185.
- [7] Augustyn J.: Niepewność pomiaru impedancji metodą dopasowania do elipsy, *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, nr 02/2011, s. 180-183.
- [8] Ramos P.M., Janeiro F.M., Radil T.: Comparison of impedance measurement in DSP using ellipse-fit and seven-parameter sine-fit algorithms, *Measurement*, 42 (2009), pp. 1370-1379.
- [9] Ramos P.M., Janeiro F.M., Tlemaçani M., Cruz Sierra A.: Recent Developments on Impedance Measurements with DSP-Based Ellipse-Fit Algorithms, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. 58, No. 5, 2009, pp. 1680-1687.
- [10] Martinez W.L., Martinez A.R.: *Computational Statistics Handbook with MATLAB*, Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, Boca Raton FL, 2008.
- [11] Halif R., Flusser J.: Numerically stable direct least squares fitting of ellipses, *Proceedings WSCG'98*, University of West Bohemia, Czech Republic, Feb. 1998, pp. 125-132.
- [12] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the propagation of Distributions, BIPM.

otrzymano / received: 27.10.2012

przyjęto do druku / accepted: 03.12.2012

artykuł recenzowany / revised paper