

dr inż. Marek MRÓZ  
Akademia Sztuki Wojennej w Warszawie  
Wydział Zarządzania i Dowodzenia  
Instytut Logistyki  
e-mail: m.mroz@akademia.mil.pl  
nr ORCID: 0000-0003-1826-0495

## PROGNOZA WIELKOŚCI PRZEWOZU ŁADUNKÓW TRANSPORTEM KOLEJOWYM W POLSCE METODĄ WAG HARMONICZNYCH

### Streszczenie

Tematem artykułu jest prognozowanie wielkości przewozu ładunków transportem kolejowym w Polsce metodą wag harmoniczných w oparciu o przeprowadzone badania empiryczne. Celem głównym niniejszego artykułu jest obliczenie prognoz na kolejne kwartały roku 2019, na bazie danych statystycznych z lat 2015÷2019 oraz zademonstrowanie praktycznego wykorzystania opracowanego szczegółowego algorytmu prognozowania metodą wag harmoniczných, po uprzednim wygładzeniu szeregu czasowego metodą trendu pełzającego.

Biorąc pod uwagę tendencje rozwojowe europejskiego transportu drogowego, kolejowego i wodnego zamieszczone w Białej Księdze Transportu, a w szczególności uwzględniając perspektywy rozwojowe transportu kolejowego, który jest konkurencyjnym i zasobooszczędnym systemem transportu, obliczono prognozę wielkości przewozu ładunków w Polsce tym transportem.

**Słowa kluczowe:** prognoza, przewozy ładunków, transport kolejowy, metoda wag harmoniczných, metoda trendu pełzającego

### Abstract

The subject of the article is the prediction of the volume of rail transport in Poland using the harmonic weight method based on empirical studies. The main goal of this article is to calculate predictions for subsequent quarters of 2019, based on statistical data from 2015÷2019, and to demonstrate the practical use of the developed detailed prediction algorithm using harmonic weights method, after smoothing the time series with the creeping trend method.

Taking into account the development trends of European road, rail and water transport, included in the White Paper of Transport, and in particular considering

the development prospects of rail transport, which is a competitive and resource efficient transport system, the prediction of the volume of freight in Poland was calculated.

**Key words:** prediction, cargo transport, rail transport, harmonic weight method, creeping trend method

## WSTĘP

Przewóz ładunków transportem kolejowym w Polsce jest niezmiernie istotną kwestią dla gospodarki narodowej i jej dynamiki rozwoju. Transport kolejowy w Polsce i w Europie według strategicznych celów zawartych w Białej Księdze Transportu<sup>1</sup> ma odgrywać z roku na rok coraz większe znaczenie przede wszystkim w ilościach przewożonych ładunków.

Wybór do analizy merytorycznej przewozu towarów transportem kolejowym w Polsce nie był przypadkowy biorąc pod uwagę tendencje rozwojowe europejskiego transportu drogowego, kolejowego i wodnego zamieszczone w Białej Księdze Transportu. Według niej, spośród sformułowanych dziesięciu celów strategicznych, dwa z nich bezpośrednio dotyczą perspektyw rozwojowych transportu kolejowego, który jest konkurencyjnym i zasobooszczędnym systemem transportu. Cel drugi i trzeci projektu TRANSFORuM<sup>2</sup> wskazuje, że do 2030 r. 30% drogowego transportu towarów na odległościach większych niż 300 km należy przenieść na inne środki transportu, np. kolej lub transport wodny, zaś do 2050 r. powinno to być ponad 50% tego typu transportu oraz powinno nastąpić ukończenie szybkiej europejskiej sieci kolejowej do 2050 r., a także trzykrotny wzrost istniejącej sieci szybkich kolei do 2030 r. oraz zachowanie gęstej sieci kolejowej we wszystkich państwach członkowskich. Do 2050 r. większa część ruchu pasażerskiego na średnie odległości powinna odbywać się koleją<sup>3</sup>.

W marcu 2011 roku Komisja Europejska zaaprobowała do wdrożenia strategię konkurencyjnego systemu transportu – *Transport 2050*, który zwiększy mobilność, usunie główne bariery w kluczowych obszarach i spowoduje wzrost zatrudnienia, a także przyczyni się do znacznego ograniczenia zależności Europy od importu ropy

---

<sup>1</sup> Biała Księga Transportu jest zwyczajowo przyjętą i ugruntowaną formą zapisu europejskich dokumentów strategicznych związanych z transportem. Formułuje 10 strategicznych celów. <http://www.transforum-project.eu/pl/transforum/biala-ksiega-transportu.html> (05.07.2019).

<sup>2</sup> Konsorcjum TRANSFORuM składa się z jednych z najbardziej szanowanych instytucji eksperckich w swojej dziedzinie w całej Europie. <http://www.transforum-project.eu/pl/transforum/biala-ksiega-transportu.html> (05.07.2019).

<sup>3</sup> Tamże.

naftowej do roku 2050 oraz spowoduje w transporcie redukcję emisji dwutlenku węgla o 60%<sup>4</sup>.

Powyższe przesłanki były kluczowym elementem do podjęcia decyzji o analizie danych kwartalnych przewozu ładunków krajowym transportem kolejowym (tabela 1), jako najbardziej perspektywicznego systemu transportu, który jest i będzie dynamicznie rozwijany w najbliższych latach w Polsce i w Europie.

Uwzględniając powyższe, za **cel badań** autor przyjął *obliczenie prognozy przewozu ładunków transportem kolejowym oraz zademonstrowanie zastosowania algorytmu prognozowania metodą wag harmonicznych po uprzednim wygładzeniu szeregu czasowego metodą trendu pełzającego*. Tak sformułowany cel badań implikuje **problem badawczy**: *jak wykorzystać do prognozy przewozu ładunków krajowym transportem kolejowym metodę wag harmonicznych po wygładzeniu szeregu metodą trendu pełzającego, aby uzyskać jak najmniejszy błąd predykcji?* Zbudowany problem badawczy pomógł utworzyć **hipotezę badawczą**: *prognozowanie przewozu ładunków transportem kolejowym metodą wag harmonicznych należy rozpocząć od wyrównania szeregu metodą trendu pełzającego przy obliczonym najmniejszym błędzie średniokwadratowym aby uzyskać dokładniejszą prognozę*.

Do prognozowania procesów logistycznych wykorzystuje się wiele metod i narzędzi. Autor podjął próbę pokazania praktycznego przykładu zastosowania algorytmu prognozowania metodą wag harmonicznych oraz próbę usystematyzowania obszaru wiedzy w tym zakresie.

Prognozowanie metodą wag harmonicznych w ujęciu empirycznym przeprowadzono na bazie danych statystycznych<sup>5</sup> zawartych w zestawie wybranych kwartalnych wskaźników makroekonomicznych<sup>6</sup> opisujących podstawowe tendencje rozwoju społeczno-gospodarczego Polski, a w tym konkretnym przykładzie *przewozy ładunków krajowym transportem kolejowym* (tabela 1). Zgromadzone dane empiryczne dotyczą analizy kolejnych kwartałów, od trzeciego 2015 roku do pierwszego kwartału 2019 roku. W sumie poddano analizie piętnaście kwartałów (liczba obserwacji  $t = 15$ ) w latach 2015÷2019. Zamieszczone dane empiryczne  $y_t$  dotyczą wielkości przewozu ładunków koleją w Polsce w tysiącach ton (tabela 1).

Aby rozpocząć proces prognozowania przewozu towarów metodą wag harmonicznych należy najpierw wygładzić analizowany empiryczny szereg czasowy (tabela 1) metodą trendu pełzającego. Wygładzenie to ma na celu wyeliminowanie wahań przypadkowych (Maciąg, Piertoń, Kukła, 2013, s. 74.).

---

<sup>4</sup> Tamże.

<sup>5</sup> Dane statystyczne według rodzajów działalności prezentuje się zgodnie z Polską Klasyfikacją Działalności 2007 (PKD 2007), opracowaną na podstawie Statystycznej Klasyfikacji Działalności Gospodarczych we Wspólnocie Europejskiej (*Statistical Classification of Economic Activities in the European Community – NACE Rev.2*). <https://stat.gov.pl/wskazniki-makroekonomiczne/> (04.07.2019).

<sup>6</sup> Tamże.

**Tabela 1.** Wielkości przewozu ładunków koleją w Polsce w latach 2015÷2019

Lata	Kwartaly	Numer obserwacji $t$	Wielkości przewozu ładunków $y_t$ [tys. ton]
2015	III	1	41 259
	IV	2	42 097
2016	I	3	33 362
	II	4	36 965
	III	5	41 508
	IV	6	42 490
2017	I	7	36 543
	II	8	41 438
	III	9	43 530
	IV	10	43 052
2018	I	11	41 313
	II	12	41 042
	III	13	42 226
	IV	14	41 858
2019	I	15	38 923

Źródło: opracowanie własne na podstawie <https://stat.gov.pl/wskazniki-makroekonomiczne> (04.07.2019).

Proces prognozowania metodą wag harmonicznych realizowany jest zazwyczaj w dwóch niezależnych etapach (Mróz, 2018, s. 313):

1. W pierwszym etapie, według przyjętego algorytmu, zostaje wyrównany szereg czasowy *metodą trendu pelzającego* dla przyjętego przez badacza dowolnego okresu wygładzania np.:  $k = 3$ ,  $k = 4$ ,  $k = 5$  itp.;
2. W drugim etapie następuje obliczanie prognozy (na kolejne okresy  $T > n$ ) metodą wag harmonicznych na bazie otrzymanego, w pierwszym etapie, wyrównanego szeregu czasowego.

## WYRÓWNANIE SZEREGU CZASOWEGO METODĄ TRENDU PELZAJĄCEGO

Przystępując do realizacji pierwszego etapu prognozowania metodą wag harmonicznych, dokonano wygładzenia szeregu czasowego metodą trendu pelzającego

przy zastosowaniu z góry ustalonego algorytmu, polegającego na realizacji następujących po sobie czynności (Mróz, 2018, s. 314):

- 1) Oszacowanie parametrów strukturalnych liniowych funkcji cząstkowych trendu z jedną zmienną  $t$ , dla przyjętych przez badacza dwóch okresów wygładzania  $k = 3$  i  $k = 5$ , korzystając z Klasycznej Metody Najmniejszych Kwadratów (KMNK);
- 2) Tworzenie cząstkowych modeli teoretycznych  $\hat{y}_i$  na podstawie oszacowanych parametrów strukturalnych liniowych funkcji cząstkowych trendu z jedną zmienną  $t$ ;
- 3) Obliczanie wartości teoretycznych (wygładzonych) dla kolejnych wartości  $t$ , które posłużyły do tworzenia cząstkowych modeli teoretycznych w etapie szacowania parametrów strukturalnych, przy przyjętym okresie wygładzania  $k$ ;
- 4) Ostateczne wygładzenie całości szeregu czasowego poprzez obliczenie średnich arytmetycznych prostych z wcześniej uzyskanych wartości teoretycznych  $\hat{y}_t$ .

Wygładzając szereg czasowy metodą trendu pełzającego należy rozpocząć od szacowania parametrów strukturalnych cząstkowych funkcji liniowych trendu z jedną zmienną dla przyjętych stałych wygładzania np.:  $k = 3$  i  $k = 5$ .

### **Szacowanie parametrów strukturalnych cząstkowych funkcji liniowych trendu z jedną zmienną $t$ dla stałej wygładzania $k = 3$**

Chcąc dokonać estymacji parametrów strukturalnych liniowych funkcji cząstkowych z jedną zmienną, którą jest czas  $t$  należy wykorzystać w praktyce do tego celu KMNK, stosując *metodę macierzową* lub dowolnie wybrany sposób rozwiązywania układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami (Mróz, 2018, s. 315):

- 1) metoda podstawiania,
- 2) metoda przeciwnych współczynników,
- 3) metoda klasyczna,
- 4) metoda wyznaczników.

Szacowanie parametrów strukturalnych pierwszych pięciu modeli cząstkowych funkcji liniowych trendu z jedną zmienną  $t$  dla stałej wygładzania  $k = 3$ , dokonano najpierw metodą macierzową według KMNK, a następnie dla przykładowego zobrazowania, pozostałymi podanych powyżej metodami rozwiązywania układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami. Kolejne modele cząstkowe z oszacowanymi parametrami uzyskano przy zastosowaniu tylko jednej wybranej metody (wyznacznikowej).

Wybór dowolnego sposobu rozwiązywania układu dwóch równań z dwiema zmiennymi, a w tym przypadku z dwoma niewiadomymi parametrami, daje w rezultacie identyczne wyniki, dlatego też badacz może wybrać dowolny ulubiony

sposób i powielać go wielokrotnie przy powtarzających się podobnych realizacjach obliczeń.

### Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego $\hat{y}_1$ , dla $t = 1, 2, 3$ , metodą macierzową

Przystępując do obliczania pierwszego cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_1$  metodą macierzową przy przyjętej stałej wygładzania  $k = 3$ , dla  $t = 1, 2, 3$  korzystamy na wstępie ze znanej postaci modelu empirycznego<sup>7</sup>  $y_t$  z jedną zmienną  $t$  (wzór 1):

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \xi_t \quad (1)$$

gdzie:

$y_t$  – zmienna zależna,

$\alpha_0, \alpha_1$  – nieoszacowane parametry strukturalne,

$t$  – zmienna niezależna (czas),

$\xi_t$  – czynnik losowy.

Obliczenie pierwszego cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_1$  metodą macierzową, rozpoczęto od utworzenia tabeli pomocniczej (tabela 2), w której wykorzystano z głównej tabeli 1 jedynie trzy pierwsze dane empiryczne  $y_t$  dla  $t = 1, 2, 3$ , ze względu na przyjęty trzelementowy (Kukuła, 2014, s.131) poziom wygładzania (stała wygładzania  $k = 3$ ).

**Tabela 2.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_1$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
1	41259,0	41259,0	1,0
2	42097,0	84194,0	4,0
3	33362,0	100086,0	9,0
$\Sigma$	<b>6</b>	<b>116718,0</b>	<b>225539,0</b>

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą macierzową należy wyznaczyć wektor oceny parametrów strukturalnych modelu (wzór 2):

$$a = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y \rightarrow a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

W tym celu należy utworzyć macierz  $X^T X$  (wzór 3) oraz macierz jednokolumnową zwaną wektorem  $X^T y$  (wzór 4):

<sup>7</sup> Modele empiryczne w ogólnej postaci funkcyjnej mogą posłużyć do budowy modeli teoretycznych z oszacowanymi parametrami strukturalnymi (Bendkowski, Kramarz, Kramarz, 2010, s. 28).

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$X^T y = \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum y_t t \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$X^T y = \begin{bmatrix} 116718 \\ 225539 \end{bmatrix}$$

Do utworzenia powyższych macierzy posłużyły dokonane obliczenia w tabeli pomocniczej (tabela 2). Teraz należy przystąpić do sprawdzenia, czy macierz  $X^T X$  jest osobliwa czy też nie jest. W tym celu obliczono wyznacznik macierzy  $X^T X$ :

$$\det(X^T X) = \det \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} = 3 \cdot 14 - 6 \cdot 6 = 6$$

Z dokonanych obliczeń wyznacznika macierzy  $\det(X^T X) = 6$  wynika, że macierz jest nieosobliwa, ponieważ  $\det(X^T X) \neq 0$ , a zatem możemy obliczać macierz odwrotną<sup>8</sup>.

Macierz odwrotną obliczamy po uprzednim wyznaczeniu (lub obliczeniu) macierzy dopełnień  $(X^T X)^D$ . Korzystając z ogólnej własności, że macierz  $(X^T X)$  jest kwadratowa i symetryczna o rozmiarze  $2 \times 2$ , tworzymy (bez obliczania) macierz dopełnień (Mróz, 2018, s. 316) z utworzonej zależności<sup>9</sup> (wzór 5):

$$(X^T X)^D = \begin{bmatrix} \sum t^2 & -(\sum t) \\ -(\sum t) & n \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$(X^T X)^D = \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczamy macierz odwrotną (wzór 6):

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{\det(X^T X)} \cdot [(X^T X)^D]^T \quad (6)$$

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,3 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu macierzy odwrotnej, możemy przystąpić do obliczenia wektora  $a$  – ocen parametrów strukturalnych (wzór 1):

$$a = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y = \begin{bmatrix} 2,3 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 116718 \\ 225539 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46803 \\ -3948,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

<sup>8</sup> Macierz odwrotna istnieje tylko wtedy, gdy macierz  $X^T X$  jest nieosobliwa (Pelc, Juszczak, 2003, s. 160).

<sup>9</sup> Macierz dopełnień można otrzymać bezpośrednio z macierzy wyjściowej  $X^T X$ , jeżeli jest ona kwadratowa i symetryczną macierzą o rozmiarze  $2 \times 2$ , poprzez zamianę miejscami wartości elementów tej macierzy na głównej przekątnej (lewo ukośnej) oraz dodaniu znaków ujemnych pozostałym elementom (Mróz, 2018, s. 316).

Otrzymane parametry posłużą do utworzenia modelu teoretycznego z jedną zmienną (wzór 7), o postaci:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t \quad (7)$$

gdzie:

$\hat{y}_t$  – wartości teoretyczne zmiennej zależnej (w modelu teoretycznym z oszacowanymi parametrami strukturalnymi),

$a_0, a_1$  – oszacowane parametry strukturalne modelu teoretycznego,

$t$  – zmienna niezależna (czas).

Pierwszy cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla pierwszego kroku  $i = 1$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_1 = 46803 - 3948,5t$$

### Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego $\hat{y}_2$ , dla $t = 2, 3, 4$ , metodą podstawiania

**Tabela 3.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_2$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
2	42097,0	84194,0	4,0
3	33362,0	100086,0	9,0
4	36965,0	147860,0	16,0
$\Sigma$	<b>9</b>	<b>112424,0</b>	<b>29,0</b>

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą podstawiania należy rozwiązać układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami (wzór 8), korzystając z tabeli pomocniczej (tabela 3):

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \Sigma t = \Sigma y_t \\ a_0 \Sigma t + a_1 \Sigma t^2 = \Sigma y_t t \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot 3 + a_1 \cdot 9 = 112424 \\ a_0 \cdot 9 + a_1 \cdot 29 = 332140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{(112424 - 9a_1)}{3} \\ \frac{(112424 - 9a_1)}{3} \cdot 9 + 29a_1 = 332140 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_o = \frac{(112424-9a_1)}{3} \\ 112424 \cdot 3 - 27a_1 + 29a_1 = 332140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_o = \frac{(112424-9a_1)}{3} \\ a_1 = \frac{332140-112424 \cdot 3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_o = 45172,7 \\ a_1 = -2566 \end{cases}$$

Drugi cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla drugiego kroku  $i = 2$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_o + a_1 t$$

$$\hat{y}_2 = 45172,7 - 2566t$$

**Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_3$ , dla  $t = 3, 4, 5$ , metodą przeciwnych współczynników**

**Tabela 4.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_3$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
3	33362,0	100086,0	9,0
4	36965,0	147860,0	16,0
5	41508,0	207540,0	25,0
$\Sigma$ 12	<b>111835,0</b>	<b>455486,0</b>	<b>50,0</b>

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą przeciwnych współczynników należy rozwiązać układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami (wzór 9), korzystając z tabeli pomocniczej (tabela 4):

$$\begin{cases} a_o n + a_1 \Sigma t = \Sigma y_t \\ a_o \Sigma t + a_1 \Sigma t^2 = \Sigma y_t t \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} a_o \cdot 3 + a_1 \cdot 12 = 111835 & / \cdot (-4) \\ a_o \cdot 12 + a_1 \cdot 50 = 455486 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12a_o - 48a_1 = -447340 \\ 12a_o + 50a_1 = 455486 \end{cases}$$

$$\hline 0 + 2a_1 = 8146$$

$$\begin{cases} 3a_0 + 12a_1 = 111835 \\ a_1 = 4073 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_0 + 12 \cdot 4073 = 111835 \\ a_1 = 4073 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 20986,3 \\ a_1 = 4073 \end{cases}$$

Trzeci cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla trzeciego kroku  $i = 3$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_3 = 20986,3 + 4073 t$$

### Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego $\hat{y}_4$ , dla $t = 4, 5, 6$ , metodą klasyczną

Obliczenie parametrów strukturalnych  $a_0$  i  $a_1$  wykonujemy na podstawie gotowych zależności (wzór 10 i 11):

$$a_1 = \frac{\sum (y_t - \bar{y})(t - \bar{t})}{\sum (t - \bar{t})^2} \quad (10)$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{t} \quad (11)$$

Aby wykorzystać w praktyce zalety gotowych wzorów (wzór 10 i 11) do obliczania parametrów strukturalnych cząstkowego modelu teoretycznego, należy najpierw dokonać obliczeń średnich arytmetycznych zmiennych zależnych i niezależnych (wzór 12 i 13):

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^k y_t}{k} \quad (12)$$

$$\bar{y} = \frac{120963}{3} = 40321$$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{t=1}^k t}{k} \quad (13)$$

$$\bar{t} = \frac{15}{3} = 5$$

gdzie:

$\bar{y}$  – średnia arytmetyczna części zmiennych zależnych  $y_t$ , dla przyjętej stałej wygładzania  $k$ ,

$\sum_{t=1}^k y_t$  – suma części zmiennych zależnych  $y_t$ , dla przyjętej stałej wygładzania  $k$ ,  
 $k$  – stała wygładzania,

$\bar{t}$  – średnia arytmetyczna części zmiennych niezależnych  $t$ , dla przyjętej stałej wygładzania  $k$ ,

$\sum_{t=1}^k t$  – suma części zmiennych niezależnych  $t$ , dla przyjętej stałej wygładzania  $k$ .

Następnie należy skonstruować tabelę pomocniczą (tabela 5).

**Tabela 5.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_4$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t - \bar{y}$	$t - \bar{t}$	$(y_t - \bar{y})(t - \bar{t})$	$(t - \bar{t})^2$
4	36965,0	-3356,0	-1,0	3356	1
5	41508,0	1187,0	0,0	0	0
6	42490,0	2169,0	1,0	2169	1
$\Sigma$ 15	<b>120963,0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>5525</b>	<b>2</b>

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą klasyczną, wykorzystujemy zbudowaną tabelę pomocniczą (tabela 5) do wykonania poniższych obliczeń (wzory 10 i 11):

$$a_1 = \frac{\sum(y_t - \bar{y})(t - \bar{t})}{\sum(t - \bar{t})^2} = \frac{5525}{2} = 2762,5$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{t} = 40321 - (2762,5 \cdot 5) = 26508,5$$

Czwarty cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla czwartego kroku  $i = 4$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_4 = 26508,5 + 2762,5t$$

**Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_5$ , dla  $t = 5, 6, 7$ , metodą wyznaczników**

**Tabela 6.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_5$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
5	41508,0	207540,0	25,0
6	42490,0	254940,0	36,0
7	36543,0	255801,0	49,0
$\Sigma$ 18	<b>120541,0</b>	<b>718281,0</b>	<b>110,0</b>

Do oszacowania parametrów strukturalnych modelu  $y_t = a_0 + a_1 t$  metodą wyznaczników, należy w pierwszej kolejności zbudować tabelę pomocniczą (tabela 6).

la 6), która będzie pomocna do przeprowadzenia poniższych obliczeń na podstawie utworzonych wzorów na wyznaczniki (wzory 14÷18):

$$W = \begin{vmatrix} n & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{vmatrix} \quad (14) \quad W_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum y_t & \sum t \\ \sum y_t t & \sum t^2 \end{vmatrix} \quad (15) \quad W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \sum y_t \\ \sum t & \sum y_t t \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 18 & 110 \end{vmatrix} = 3 \cdot 110 - 18 \cdot 18 = 6$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} 120541 & 18 \\ 718281 & 110 \end{vmatrix} = 120541 \cdot 110 - 18 \cdot 718281 = 330452$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} 3 & 120541 \\ 18 & 718281 \end{vmatrix} = 3 \cdot 718281 - 120541 \cdot 18 = -14895$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} \quad (17)$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} \quad (18)$$

$$a_0 = \frac{330452}{6} = 55075,3$$

$$a_1 = \frac{-14895}{6} = -2482,5$$

Piąty cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla piątego kroku  $i = 5$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_5 = 55075,3 - 2482,5 t$$

Pozostałe cząstkowe modele teoretyczne zostaną obliczone metodą wyznaczników, gdyż według autora jest ona najprostsza i najbardziej przejrzysta, a ponadto nie wymaga tworzenia układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi parametrami do rozpoczęcia obliczeń.

### Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego $\hat{y}_6$ , dla $t = 6, 7, 8$ , metodą wyznaczników

**Tabela 7.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_6$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
6	42490,0	254940,0	36,0
7	36543,0	255801,0	49,0
8	41438,0	331504,0	64,0
$\Sigma$	<b>21</b>	<b>120471,0</b>	<b>149,0</b>

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą wyznaczników należy zbudować tabelę pomocniczą (tabela 7), która będzie pomocna do poniższych obliczeń (wzory 14÷18):

$$W = \begin{vmatrix} n & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 21 \\ 21 & 149 \end{vmatrix} = 6$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum y_t & \sum t \\ \sum y_t t & \sum t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 120471 & 21 \\ 842245 & 149 \end{vmatrix} = 263034$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \sum y_t \\ \sum t & \sum y_t t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 120471 \\ 21 & 842245 \end{vmatrix} = -3156$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} = \frac{263034}{6} = 43839$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} = \frac{-3156}{6} = -526$$

Szósty cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla szóstego kroku  $i = 6$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_6 = 43839 - 526t$$

**Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_7$ , dla  $t = 7, 8, 9$ , metodą wyznaczników**

**Tabela 8.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_7$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
7	36543,0	255801,0	49,0
8	41438,0	331504,0	64,0
9	43530,0	391770,0	81,0
$\Sigma$ 24	121511,0	979075,0	194,0

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą wyznaczników należy zbudować tabelę pomocniczą (tabela 8), która będzie pomocna do poniższych obliczeń (wzory 14÷18):

$$W = \begin{vmatrix} n & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 24 \\ 24 & 194 \end{vmatrix} = 6$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum y_t & \sum t \\ \sum y_t t & \sum t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 121511 & 24 \\ 979075 & 194 \end{vmatrix} = 75334$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \sum y_t \\ \sum t & \sum y_t t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 121511 \\ 24 & 979075 \end{vmatrix} = 20961$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} = \frac{75334}{6} = 12555,7$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} = \frac{20961}{6} = 3493,5$$

Siódmy cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla siódmego kroku  $i = 7$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_7 = 12555,7 + 3493,5t$$

**Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_8$ , dla  $t = 8, 9, 10$ , metodą wyznaczników**

**Tabela 9.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_8$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
8	41438,0	331504,0	64,0
9	43530,0	391770,0	81,0
10	43052,0	430520,0	100,0
$\Sigma$ 27	<b>128020,0</b>	<b>1153794,0</b>	<b>245,0</b>

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą wyznaczników należy zbudować tabelę pomocniczą (tabela 9), która będzie pomocna do poniższych obliczeń (wzory 14÷18):

$$W = \begin{vmatrix} n & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 27 \\ 27 & 245 \end{vmatrix} = 6$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum y_t & \sum t \\ \sum y_t t & \sum t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 128020 & 27 \\ 1153794 & 245 \end{vmatrix} = 212462$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \sum y_t \\ \sum t & \sum y_t t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 128020 \\ 27 & 1153794 \end{vmatrix} = 4842$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} = \frac{212462}{6} = 35410,3$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} = \frac{4842}{6} = 807$$

Ósmy cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla ósmego kroku  $i = 8$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_8 = 35410,3 + 807t$$

**Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_9$ , dla  $t = 9, 10, 11$ , metodą wyznaczników**

**Tabela 10.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_9$  dla  $k = 3$

	$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
	9	43530,0	391770,0	81,0
	10	43052,0	430520,0	100,0
	11	41313,0	454443,0	121,0
$\Sigma$	<b>30</b>	<b>127895,0</b>	<b>1276733,0</b>	<b>302,0</b>

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą wyznaczników należy zbudować tabelę pomocniczą (tabela 10), która będzie pomocna do poniższych obliczeń:

$$W = \begin{vmatrix} n & \Sigma t \\ \Sigma t & \Sigma t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 30 \\ 30 & 302 \end{vmatrix} = 6$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} \Sigma y_t & \Sigma t \\ \Sigma y_t t & \Sigma t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 127895 & 30 \\ 1276733 & 302 \end{vmatrix} = 322300$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \Sigma y_t \\ \Sigma t & \Sigma y_t t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 127895 \\ 30 & 1276733 \end{vmatrix} = -6651$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} = \frac{322300}{6} = 53716,7$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} = \frac{-6651}{6} = -1108,5$$

Dziewiąty cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla dziewiątego kroku  $i = 9$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_9 = 53716,7 - 1108,5t$$

**Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_{10}$ , dla  $t = 10, 11, 12$ , metodą wyznaczników**

**Tabela 11.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_{10}$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
10	43052,0	430520,0	100,0
11	41313,0	454443,0	121,0
12	41042,0	492504,0	144,0
$\Sigma$ 33	125407,0	1377467,0	365,0

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą wyznaczników należy zbudować tabelę pomocniczą (tabela 11), która będzie pomocna do poniższych obliczeń (wzory 14÷18):

$$W = \begin{vmatrix} n & \Sigma t \\ \Sigma t & \Sigma t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 33 \\ 33 & 365 \end{vmatrix} = 6$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} \Sigma y_t & \Sigma t \\ \Sigma y_t t & \Sigma t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 125407 & 33 \\ 1377467 & 365 \end{vmatrix} = 317144$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \Sigma y_t \\ \Sigma t & \Sigma y_t t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 125407 \\ 33 & 1377467 \end{vmatrix} = -6030$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} = \frac{317144}{6} = 52857,3$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} = \frac{-6030}{6} = -1005$$

Dziesiąty cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla dziesiątego kroku  $i = 10$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_{10} = 52857,3 - 1005t$$

**Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_{11}$ , dla  $t = 11, 12, 13$ , metodą wyznaczników**

**Tabela 12.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_{11}$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
11	41313,0	454443,0	121,0
12	41042,0	492504,0	144,0
13	42226,0	548938,0	169,0
$\Sigma$ 36	124581,0	1495885,0	434,0

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą wyznaczników należy zbudować tabelę pomocniczą (tabela 12), która będzie pomocna do poniższych obliczeń (wzory 14÷18):



$$W = \begin{vmatrix} n & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 36 \\ 36 & 434 \end{vmatrix} = 6$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum y_t & \sum t \\ \sum y_t t & \sum t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 124581 & 36 \\ 1495885 & 434 \end{vmatrix} = 216294$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \sum y_t \\ \sum t & \sum y_t t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 124581 \\ 36 & 1495885 \end{vmatrix} = 2739$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} = \frac{216294}{6} = 36049$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} = \frac{2739}{6} = 456,5$$

Jedenasty cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla jedenastego kroku  $i = 11$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_{11} = 36049 + 456,5t$$

**Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_{12}$ , dla  $t = 12, 13, 14$ , metodą wyznaczników**

**Tabela 13.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_{12}$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
12	41042,0	492504,0	144,0
13	42226,0	548938,0	169,0
14	41858,0	586012,0	196,0
$\Sigma$	<b>39</b>	<b>125126,0</b>	<b>1627454,0</b>
			<b>509,0</b>

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą wyznaczników należy zbudować tabelę pomocniczą (tabela 13), która będzie pomocna do poniższych obliczeń (wzory 14÷18):

$$W = \begin{vmatrix} n & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 39 \\ 39 & 509 \end{vmatrix} = 6$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum y_t & \sum t \\ \sum y_t t & \sum t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 125126 & 39 \\ 1627454 & 509 \end{vmatrix} = 218428$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \sum y_t \\ \sum t & \sum y_t t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 125126 \\ 39 & 1627454 \end{vmatrix} = 2448$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} = \frac{218428}{6} = 36404,7$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} = \frac{2448}{6} = 408$$

Dwunasty cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla dwunastego kroku  $i = 12$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_{12} = 36404,7 + 408t$$

**Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_{13}$ , dla  $t = 13, 14, 15$ , metodą wyznaczników**

**Tabela 14.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_{13}$  dla  $k = 3$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
13	42226,0	548938,0	169,0
14	41858,0	586012,0	196,0
15	38923,0	583845,0	225,0
$\Sigma$ 42	123007,0	1718795,0	590,0

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą wyznaczników należy zbudować tabelę pomocniczą (tabela 14), która będzie pomocna do poniższych obliczeń (wzory 14÷18):

$$W = \begin{vmatrix} n & \Sigma t \\ \Sigma t & \Sigma t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 42 \\ 42 & 590 \end{vmatrix} = 6$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} \Sigma y_t & \Sigma t \\ \Sigma y_t t & \Sigma t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 123007 & 42 \\ 1718795 & 590 \end{vmatrix} = 384740$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \Sigma y_t \\ \Sigma t & \Sigma y_t t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 123007 \\ 42 & 1718795 \end{vmatrix} = -9909$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} = \frac{384740}{6} = 64123,3$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} = \frac{-9909}{6} = -1651,5$$

Trzynasty cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami (wzór 7), dla trzynastego kroku  $i = 13$ , przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_{13} = 64123,3 - 1651,5t$$

Po obliczeniu wszystkich trzynastu cząstkowych modeli teoretycznych według kroku  $i = n - k + 1$  i zgodnie z przyjętą przez autora stałą wygładzania  $k = 3$ , przystąpiono na ich podstawie do obliczenia stosownych cząstkowych wartości teore-

tycznych (tabela 15). Rozpoczynając od pierwszego modelu z oszacowanymi parametrami:

$$\hat{y}_1 = 46803 - 3948,5t$$

podstawiano do równania kolejne wartości  $t = 1, 2$  i  $3$ . Podobne obliczenia zrealizowano dla drugiego i kolejnych modeli cząstkowych, aż do trzynastego. Przykłady obliczania wartości teoretycznych dla uzyskanych modeli cząstkowych zamieszczono w tabeli 15.

**Tabela 15.** Przykłady obliczania wartości teoretycznych modeli cząstkowych dla  $k = 3$

Stała wygładzania $k = 3$			
$i$	$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$	$t$	$\hat{y}_i(t) = a_0 + a_1 t$
1	$\hat{y}_1 = 46803 - 3948,5t$	1, 2, 3	$\hat{y}_1(1) = 46803 - 3948,5 \cdot 1 = 42854,5$ $\hat{y}_1(2) = 46803 - 3948,5 \cdot 2 = 38906,0$ $\hat{y}_1(3) = 46803 - 3948,5 \cdot 3 = 34957,5$
2	$\hat{y}_2 = 45172,7 - 2566t$	2, 3, 4	$\hat{y}_2(2) = 45172,7 - 2566 \cdot 2 = 40040,7$ $\hat{y}_2(3) = 45172,7 - 2566 \cdot 3 = 37474,7$ $\hat{y}_2(4) = 45172,7 - 2566 \cdot 4 = 34908,7$
⋮	⋮	⋮	⋮
13	$\hat{y}_{13} = 64123,3 - 1651,5t$	13, 14, 15	$\hat{y}_{13}(13) = 64123,3 - 1651,5 \cdot 13 = 42653,8$ $\hat{y}_{13}(14) = 64123,3 - 1651,5 \cdot 14 = 41002,3$ $\hat{y}_{13}(15) = 64123,3 - 1651,5 \cdot 15 = 39350,8$

Po dokonaniu obliczeń (tabela 15), według ustalonej liczby wszystkich potrzebnych modeli:  $i = n - k + 1$ , przystąpiono do utworzenia zbiorczej tabeli pomocniczej (tabela 16), w której umieszczono w odpowiednich wierszach i kolumnach obliczone wartości teoretyczne dla wszystkich modeli cząstkowych. Na ich podstawie obliczono średnie arytmetyczne proste z wartości zamieszczonych w poszczególnych wierszach tabeli 16, a także dokonano, w dwóch ostatnich kolumnach, obliczeń pomocniczych potrzebnych do wyznaczenia współczynnika wag harmonicznych  $\omega$ .

**Tabela 16.** Wartości teoretyczne i ich średnie arytmetyczne dla  $k = 3$  oraz obliczenia pomocnicze do wyznaczenia współczynnika wag harmoniczných  $\omega$ 

$t$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	$\hat{y}_4$	$\hat{y}_5$	$\hat{y}_6$	$\hat{y}_7$	$\hat{y}_8$	$\hat{y}_9$	$\hat{y}_{10}$	$\hat{y}_{11}$	$\hat{y}_{12}$	$\hat{y}_{13}$	$\bar{y}_t$	$\bar{y}_n - \bar{y}_t$	$\frac{\bar{y}_n - \bar{y}_t}{n-t}$
1	42854,50	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42854,50	-3503,67	-250,26
2	38906,00	40040,67	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	39473,33	-122,50	-9,42
3	34957,50	37474,67	33205,33	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35212,50	4138,33	344,86
4	–	34908,67	37278,33	37558,50	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36581,83	2769,00	251,73
5	–	–	41351,33	40321,00	42662,83	–	–	–	–	–	–	–	–	41445,06	-2094,22	-209,42
6	–	–	–	43083,50	40180,33	40683,00	–	–	–	–	–	–	–	41315,61	-1964,78	-218,31
7	–	–	–	–	37697,83	40157,00	37010,17	–	–	–	–	–	–	38288,33	1062,50	132,81
8	–	–	–	–	–	39631,00	40503,67	41866,33	–	–	–	–	–	40667,00	-1316,17	-188,02
9	–	–	–	–	–	–	43997,17	42673,33	43740,17	–	–	–	–	43470,22	-4119,39	-686,56
10	–	–	–	–	–	–	–	43480,33	42631,67	42807,33	–	–	–	42973,11	-3622,28	-724,46
11	–	–	–	–	–	–	–	–	41523,17	41802,33	41070,50	–	–	41465,33	-2114,50	-528,63
12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40797,33	41527,00	41300,67	–	41208,33	-1857,50	-619,17
13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41983,50	41708,67	42653,83	42115,33	-2764,50	-1382,25
14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42116,67	41002,33	41559,50	-2208,67	-2208,67
15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	39350,83	39350,83	0,00	–
															$\Sigma$	<b>-6295,77</b>

### Szacowanie parametrów strukturalnych cząstkowych funkcji liniowych trendu z jedną zmienną $t$ dla stałej wygładzania $k = 5$

Estymację wszystkich cząstkowych modeli teoretycznych dla przyjętego przez autora parametru wygładzania  $k = 5$  przeprowadzono, dla uproszczenia obliczeń, jedną wybraną metodą, czyli metodą wyznaczników.

**Obliczanie cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_1$ , dla  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ , metodą wyznaczników**

**Tabela 17.** Obliczenia pomocnicze do budowy cząstkowego modelu teoretycznego  $\hat{y}_1$  dla  $k = 5$

$t$	$y_t$	$y_t \cdot t$	$t^2$
1	41259,0	41259,0	1,0
2	42097,0	84194,0	4,0
3	33362,0	100086,0	9,0
4	36965,0	147860,0	16,0
5	41508,0	207540,0	25,0
$\Sigma$	<b>15</b>	<b>195191,0</b>	<b>55,0</b>

Aby oszacować parametry strukturalne modelu metodą wyznaczników należy zbudować tabele pomocniczą (tabela 17), która będzie pomocna do wykonania poniższych obliczeń (wzory 14÷18):

$$W = \begin{vmatrix} n & \Sigma t \\ \Sigma t & \Sigma t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{vmatrix} = 50$$

$$W_{a_0} = \begin{vmatrix} \Sigma y_t & \Sigma t \\ \Sigma y_t t & \Sigma t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 195191 & 15 \\ 580939 & 55 \end{vmatrix} = 2021420$$

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} n & \Sigma y_t \\ \Sigma t & \Sigma y_t t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 195191 \\ 15 & 580939 \end{vmatrix} = -23170$$

$$a_0 = \frac{W_{a_0}}{W} = \frac{2021420}{50} = 40428,4$$

$$a_1 = \frac{W_{a_1}}{W} = \frac{-23170}{50} = -463,4$$

Pierwszy cząstkowy model teoretyczny z oszacowanymi parametrami dla pierwszego kroku  $i = 1$  (wzór 7), przyjmuje postać:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$$

$$\hat{y}_1 = 40428,4 - 463,4t$$

Estymacja cząstkowych modeli teoretycznych dla  $k = 5$ , przebiega analogicznie jak przeprowadzona wcześniej estymacja dla stałej wygładzania  $k = 3$ . Jediną różnicą jest budowa tabel pomocniczych (patrz np. tabela 12 i tabela 14). Przy stałej wygładzania  $k = 3$  mamy zawsze trzy obserwacje (trzy wiersze z danymi empirycznymi), a przy stałej wygładzania  $k = 5$  mamy pięć obserwacji (pięć wierszy z danymi empirycznymi). Poniżej przedstawione zostały ostateczne wyniki, już oszacowanych modeli teoretycznych  $\hat{y}_2 \div \hat{y}_{11}$  (wzór 7) dla  $k = 5$ :

$$\hat{y}_2 = 35711,6 + 893,2t$$

$$\hat{y}_3 = 32230,1 + 1188,7t$$

$$\hat{y}_4 = 37400,2 + 398,1t$$

$$\hat{y}_5 = 39007,4 + 299,2t$$

$$\hat{y}_6 = 34921,8 + 811,1t$$

$$\hat{y}_7 = 31136,6 + 1115,4t$$

$$\hat{y}_8 = 45084,0 - 300,9t$$

$$\hat{y}_9 = 47312,4 - 461,8t$$

$$\hat{y}_{10} = 43668,2 - 147,5t$$

$$\hat{y}_{11} = 46225,6 - 396,4t$$

Liczbę wszystkich modeli, dla przyjętej stałej wygładzania  $k = 5$ , określa zależność ustalająca liczbę realizowanych kolejnych kroków:  $i = n - k + 1$ , która w tym konkretnym przypadku wskazuje, że tych modeli cząstkowych będzie jedenastie ( $i = 15 - 5 + 1 = 11$ ). Na ich podstawie, dokonano obliczeń cząstkowych wartości teoretycznych, podobnie jak dla stałej wygładzania  $k = 3$ , które następnie zamieszczono w tabeli 18.

**Tabela 18.** Przykłady obliczania wartości teoretycznych kolejnych modeli cząstkowych dla  $k = 5$

Stała wygładzania $k = 5$			
$i$	$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$	$t$	$\hat{y}_i(t) = a_0 + a_1 t$
1	$\hat{y}_1 = 40428,4 - 463,4t$	1, 2, 3, 4, 5	$\hat{y}_1(1) = 40428,4 - 463,4 \cdot 1 = 39965,0$ $\hat{y}_1(2) = 40428,4 - 463,4 \cdot 2 = 39501,6$ $\hat{y}_1(3) = 40428,4 - 463,4 \cdot 3 = 39038,2$ $\hat{y}_1(4) = 40428,4 - 463,4 \cdot 4 = 38574,8$ $\hat{y}_1(5) = 40428,4 - 463,4 \cdot 5 = 38111,4$
2	$\hat{y}_2 = 35711,6 + 893,2t$	2, 3, 4, 5, 6	$\hat{y}_2(2) = 35711,6 + 893,2 \cdot 2 = 37498,0$ $\hat{y}_2(3) = 35711,6 + 893,2 \cdot 3 = 38391,2$

Stała wygładzania $k = 5$			
$i$	$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t$	$t$	$\hat{y}_i(t) = a_0 + a_1 t$
			$\hat{y}_2(4) = 35711,6 + 893,2 \cdot 4 = 39284,4$ $\hat{y}_2(5) = 35711,6 + 893,2 \cdot 5 = 40177,6$ $\hat{y}_2(6) = 35711,6 + 893,2 \cdot 6 = 41070,8$
⋮	⋮	⋮	⋮
<b>11</b>	$\hat{y}_{11} = 46225,6 - 396,4t$	11, 12, 13, 14, 15	$\hat{y}_{11}(11) = 46225,6 - 396,4 \cdot 11 = 41865,2$ $\hat{y}_{11}(12) = 46225,6 - 396,4 \cdot 12 = 41468,8$ $\hat{y}_{11}(13) = 46225,6 - 396,4 \cdot 13 = 41072,4$ $\hat{y}_{11}(14) = 46225,6 - 396,4 \cdot 14 = 40676,0$ $\hat{y}_{11}(15) = 46225,6 - 396,4 \cdot 15 = 40279,6$

Po obliczeniu wszystkich cząstkowych wartości teoretycznych (tabela 18) dla stałej wygładzania  $k = 5$ , zamieszczono ich wyniki w zbiorczej tabeli pomocniczej (tabela 19). Następnie dokonano obliczeń średnich arytmetycznych prostych, według wartości zapisanych w poszczególnych wierszach tabeli 19 i utworzono kolumnę ze średnimi wartościami teoretycznymi  $\bar{\hat{y}}_t$ . Ponadto, w tej samej tabeli zamieszczono wyniki obliczeń (dwie ostatnie kolumny), potrzebne do wyznaczenia współczynnika wag harmonicznych  $\omega$ .

**Tabela 19.** Wartości teoretyczne i ich średnie arytmetyczne dla  $k = 5$  oraz obliczenia pomocnicze do wyznaczenia współczynnika wag harmoniczných  $\omega$ 

$t$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	$\hat{y}_4$	$\hat{y}_5$	$\hat{y}_6$	$\hat{y}_7$	$\hat{y}_8$	$\hat{y}_9$	$\hat{y}_{10}$	$\hat{y}_{11}$	$\bar{y}_t$	$\bar{y}_n - \bar{y}_t$	$\frac{\bar{y}_n - \bar{y}_t}{n-t}$
1	39965,00	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	39965,00	314,60	22,47
2	39501,60	37498,00	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38499,80	1779,80	136,91
3	39038,20	38391,20	35796,20	–	–	–	–	–	–	–	–	37741,87	2537,73	211,48
4	38574,80	39284,40	36984,90	38992,60	–	–	–	–	–	–	–	38459,18	1820,43	165,49
5	38111,40	40177,60	38173,60	39390,70	40503,40	–	–	–	–	–	–	39271,34	1008,26	100,83
6	–	41070,80	39362,30	39788,80	40802,60	39788,40	–	–	–	–	–	40162,58	117,02	13,00
7	–	–	40551,00	40186,90	41101,80	40599,50	38944,40	–	–	–	–	40276,72	2,88	0,36
8	–	–	–	40585,00	41401,00	41410,60	40059,80	42676,80	–	–	–	41226,64	947,04	135,29
9	–	–	–	–	41700,20	42221,70	41175,20	42375,90	43156,20	–	–	42125,84	1846,24	307,71
10	–	–	–	–	–	43032,80	42290,60	42075,00	42694,40	42193,20	–	42457,20	2177,60	435,52
11	–	–	–	–	–	–	43406,00	41774,10	42232,60	42045,70	41865,20	42264,72	1985,12	496,28
12	–	–	–	–	–	–	–	41473,20	41770,80	41898,20	41468,80	41652,75	1373,15	457,72
13	–	–	–	–	–	–	–	–	41309,00	41750,70	41072,40	41377,37	1097,77	548,88
14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41603,20	40676,00	41139,60	860,00	860,00
15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40279,60	40279,60	0,00	–
													$\Sigma$	<b>3891,94</b>



Sprawdzenie poziomu wygładzenia szeregu empirycznego w metodzie trendu pełzającego polega na określeniu stopnia dopasowania danych empirycznych do danych teoretycznych poprzez obliczenie pierwiastka błędu średniokwadratowego dla przyjętych przez autora stałych wygładzania  $k = 3$  i  $k = 5$  oraz wyboru na tej podstawie stałej wygładzania  $k$ , dla której wartość tego pierwiastka jest najmniejsza. Oznacza to, że dla wybranej stałej wygładzania  $k$ , wygładzenie empirycznego szeregu czasowego jest lepsze.

### Błąd średniokwadratowy oraz pierwiastek błędu średniokwadratowego dla $k = 3$

Błąd średniokwadratowy, a właściwie pierwiastek błędu średniokwadratowego można wykorzystać do obliczenia dopasowania danych empirycznych do otrzymanych wartości wygładzonych analizowanego szeregu czasowego metodą trendu pełzającego. Stopień wygładzenia, a właściwie wielkość błędu odchylenia jednych danych od drugich, można obliczać za pomocą miary dyspersji: *Mean Squared Error* – błędu średniokwadratowego (wzór 19) oraz *Root Mean Squared Error* – pierwiastka błędu średniokwadratowego (wzór 20):

$$s_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2 = MSE \quad (19)$$

gdzie:

$s_*^2$  – błąd średniokwadratowy – *Mean Squared Error* (MSE),

$n$  – liczba obserwacji (danych empirycznych),

$y_t$  – wartości empiryczne zmiennej zależnej (w modelu empirycznym),

$\bar{y}_t$  – średnie arytmetyczne wartości teoretycznych zmiennej zależnej (średnie wartości teoretyczne).

$$s_* = \sqrt{s_*^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2} = RMSE \quad (20)$$

gdzie:

$s_*$  – pierwiastek błędu średniokwadratowego – *Root Mean Squared Error* (RMSE).

*Root Mean Squared Error* (RMSE) jest to pierwiastek błędu średniokwadratowego, który określa, o ile średnio rzecz biorąc, wartości empiryczne zmiennej zależnej  $y_t$  odchylają się od średnich wartości teoretycznych  $\bar{y}_t$ , czyli średnich wartości wygładzonych.

Aby wyznaczyć pierwiastek błędu średniokwadratowego (wzór 20) należy najpierw obliczyć błąd średniokwadratowy (wzór 19) na podstawie dokonanych obliczeń pomocniczych zawartych w tabeli 20.

$$s_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2 = \frac{1}{15} \cdot 18369254,47 = 1224616,96$$

**Tabela 20.** Obliczenia pomocnicze do wyznaczenia błędu średniokwadratowego dla  $k = 3$  oraz błędu predykcji

$t$	$y_t$	$\bar{y}_t$	$y_t - \bar{y}_t$	$(y_t - \bar{y}_t)^2$	$y_t^2$
1	41259,0	42854,5	-1595,5	2545620,3	1702305081,0
2	42097,0	39473,3	2623,7	6883626,8	1772157409,0
3	33362,0	35212,5	-1850,5	3424350,2	1113023044,0
4	36965,0	36581,8	383,2	146816,7	1366411225,0
5	41508,0	41445,1	62,9	3962,0	1722914064,0
6	42490,0	41315,6	1174,4	1379189,3	1805400100,0
7	36543,0	38288,3	-1745,3	3046188,4	1335390849,0
8	41438,0	40667,0	771,0	594441,0	1717107844,0
9	43530,0	43470,2	59,8	3573,4	1894860900,0
10	43052,0	42973,1	78,9	6223,5	1853474704,0
11	41313,0	41465,3	-152,3	23205,4	1706763969,0
12	41042,0	41208,3	-166,3	27666,8	1684445764,0
13	42226,0	42115,3	110,7	12247,1	1783035076,0
14	41858,0	41559,5	298,5	89102,3	1752092164,0
15	38923,0	39350,8	-427,8	183041,4	1514999929,0
			$\Sigma$	<b>18369254,47</b>	<b>24724382122,0</b>

Następnie należy obliczyć pierwiastek z otrzymanego wyniku błędu średniokwadratowego:

$$s_* = \sqrt{s_*^2} = \sqrt{1224616,96} = 1106,6 = RMSE$$

Otrzymany Root Mean Squared Error (pierwiastek błędu średniokwadratowego) dla stałej wygładzania  $k = 3$  wskazuje, że wartości empiryczne zmiennej zależnej  $y_t$ , odchylają się od średnich wartości teoretycznych  $\bar{y}_t$  czyli średnich wartości wygładzonych, średnio rzecz biorąc o 1106,6. Podobne obliczenia wielkość błędu odchylenia jednych danych od drugich w celu porównania, należy wykonać dla stałej wygładzania  $k = 5$ .

### Błąd średniokwadratowy oraz pierwiastek błędu średniokwadratowego dla $k = 5$

**Tabela 21.** Obliczenia pomocnicze do wyznaczenia błędu średniokwadratowego dla  $k = 5$

$t$	$y_t$	$\bar{y}_t$	$y_t - \bar{y}_t$	$(y_t - \bar{y}_t)^2$
-----	-------	-------------	-------------------	-----------------------

$t$	$y_t$	$\bar{y}_t$	$y_t - \bar{y}_t$	$(y_t - \bar{y}_t)^2$
1	41259,0	39965,0	1294,0	1674436,0
2	42097,0	38499,8	3597,2	12939847,8
3	33362,0	37741,9	-4379,9	19183232,0
4	36965,0	38459,2	-1494,2	2232558,9
5	41508,0	39271,3	2236,7	5002648,0
6	42490,0	40162,6	2327,4	5416883,9
7	36543,0	40276,7	-3733,7	13940665,0
8	41438,0	41226,6	211,4	44673,0
9	43530,0	42125,8	1404,2	1971665,3
10	43052,0	42457,2	594,8	353787,0
11	41313,0	42264,7	-951,7	905771,0
12	41042,0	41652,8	-610,8	373015,6
13	42226,0	41377,4	848,6	720178,5
14	41858,0	41139,6	718,4	516098,6
15	38923,0	40279,6	-1356,6	1840363,6
			$\Sigma$	<b>67115824,21</b>

Obliczenie pierwiastka błędu średniokwadratowego (wzór 20) dla stałej wygładzania  $k = 5$ , musi być poprzedzone obliczeniem błędu średniokwadratowego (wzór 19) z wykorzystaniem danych zamieszczonych w tabeli pomocniczej (tabela 21):

$$s_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2 = \frac{1}{15} \cdot 67115824,21 = 4474388,28$$

$$s_* = \sqrt{s_*^2} = \sqrt{4474388,28} = 2115,3 = RMSE$$

Obliczona wartość pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE) wskazuje, że wartości empiryczne zmiennej zależnej  $y_t$ , odchylają się od średnich wartości teoretycznych – wartości wygładzonych  $\bar{y}_t$ , średnio rzecz biorąc o około 2115,3.

Reasumując, dla stałej wygładzania  $k = 3$  wartość pierwiastka błędu średniokwadratowego wyniósł 1106,6 a dla stałej wygładzania  $k = 5$ , wartość tego pierwiastka wyniósł 2115,3. Analizując otrzymane wyniki obliczeń pierwiastków błędów średniokwadratowych dla stałych wygładzania  $k = 3$  i  $k = 5$  możemy zauważyć, że wartość pierwiastka dla stałej wygładzania  $k = 3$  jest około dwukrotnie niższa niż dla stałej wygładzania  $k = 5$ . Dlatego też, do wyznaczenia prognozy metodą wag harmoniczných wybieramy za podstawę, wygładzenie szeregu czasowego metodą trendu pełzającego ze stałą wygładzania  $k = 3$ , dla którego stopień dopasowania danych empirycznych do danych teore-

tycznych jest lepszy. Im bowiem mniejsza wartość błędu średniokwadratowego<sup>10</sup>, tym lepsze dopasowanie.

## PROGNOZOWANIE METODĄ WAG HARMONICZNYCH

W związku z tym, że pierwiastek błędu średniokwadratowego dla stałej wygładzania  $k = 3$  wykazał lepsze wyrównanie danych empirycznych, do dalszych obliczeń będzie wykorzystane jedynie to wygładzenie szeregu czasowego metodą trendu pełzającego.

Obliczenia predykcji metodą wag harmonicznycch dla okresu prognozowanego  $T > n$  dokonano na podstawie wzoru 21.

$$y_T^P = \omega \cdot (T-n) + \bar{y}_n \quad (21)$$

gdzie:

$y_T^P$  – prognoza dla okresu  $T$ ,

$\omega$  – współczynnik wag harmonicznycch,

$T$  – okres, dla którego obliczamy prognozę ( $T > n$ ),

$n$  – liczba obserwacji (danych empirycznych),

$\bar{y}_n$  – średnia wartość wygładzona dla ostatniego elementu szeregu czasowego (średnia wartość teoretyczna dla  $n$ -tego okresu).

Na podstawie dokonanych obliczeń pomocniczych w tabeli 16, pierwszym etapem wyznaczania prognozy jest obliczenie współczynnika wag harmonicznycch  $\omega$  (wzór 22):

$$\omega = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\bar{y}_n - \bar{y}_t}{n-t} \quad (22)$$

$$\omega = \frac{1}{15-1} \cdot (-6295,77) = -449,70$$

gdzie:

$\omega$  – współczynnik wag harmonicznycch,

$n$  – liczba obserwacji (danych empirycznych),

$t$  – kolejny okres obserwacji zmiennej niezależnej<sup>11</sup>,

<sup>10</sup> Najmniejszą wartość jaką może przyjąć pierwiastek błędu średniokwadratowego wynosi zero, gdyż podobnie jak w odchyleniu standardowym, uzyskamy ją wówczas, gdy wszystkie wartości w zbiorze są jednakowe, a więc przy braku jakiegokolwiek zróżnicowania (Podgórski, 2005, s. 66).

<sup>11</sup> Zmienne niezależne w modelach matematycznych i ekonometrycznych w literaturze przedmiotu badań przez różnych autorów nazywane są także zmiennymi objaśniającymi lub egzogenicznymi (Mróz, 2017, s. 129).

$\bar{y}_n$  – średnia wartość wygładzona dla ostatniego elementu szeregu czasowego (średnia wartość teoretyczna dla *n-tego* okresu),

$\bar{y}_t$  – średnie arytmetyczne wartości teoretycznych zmiennej zależnej (średnie wartości teoretyczne),

$\bar{y}_n - \bar{y}_t$  – różnica pomiędzy średnią wartością teoretyczną w *n-tym* okresie a średnią wartością teoretyczną w kolejnym okresie *t*.

Obliczony współczynnik wag harmoniczných wynoszący  $\omega = -449,7$  tys. ton wskazuje na to, że o tyle średnio z kwartału na kwartał, będzie malała wielkość ładunków przewożonych w Polsce transportem kolejowym.

Natomiast, całkowitą wielkość przewożonych ładunków w prognozowanym okresie  $T = 16$  i  $T = 17$  można obliczyć na podstawie wzoru 21 przy znanej liczbie obserwacji  $n = 15$  i obliczonej średniej wartości wygładzonej dla ostatniego elementu szeregu czasowego  $\hat{y}_n = \hat{y}_{15}$  (patrz tabela 16).

Prognoza dla okresów  $T = 16$  i  $T = 17$  wynosi:

$$y_T^P = \omega \cdot (T-n) + \bar{y}_n$$

$$\text{dla } T = 16 \quad y_{16}^P = -449,70 \cdot (16-15) + 39350,83 = 38901,1$$

$$\text{dla } T = 17 \quad y_{17}^P = -449,70 \cdot (17-15) + 39350,83 = 38451,4$$

Na podstawie obliczonej powyżej prognozy metodą wag harmoniczných możemy spodziewać się, że w analizowanym 16. kwartale, czyli w drugim kwartale 2019 roku, wielkość przewożonych ładunków transportem kolejowym w Polsce wyniesie około 38 901 tys. ton, a w 17. kwartale, czyli w trzecim kwartale 2019 roku, około 38 451 tys. ton.

### Błąd prognozy

Obliczone powyżej prognozy wymagają weryfikacji pod kątem wielkości błędu prognozowania czyli określenia wielkości błędu z jakim one zostały wyznaczone. Można do tego celu wykorzystać miernik całkowitego względnego błędu prognozy<sup>12</sup>, czyli współczynnik Theila  $I^2$  (wzór 23) oraz średni błąd prognozy  $I$ , czyli pierwiastek kwadratowy z współczynnika Theila (wzór 24):

$$I^2 = \frac{\sum (y_t - \bar{y}_t)^2}{\sum y_t^2} \quad (23)$$

$$I = \sqrt{I^2} \quad (24)$$

<sup>12</sup> Błędem względnym prognozy nazywamy zazwyczaj stosunek (iloraz) sumy kwadratów odchyłeń wartości empirycznych od prognostycznych do wartości empirycznych. Natomiast błędem bezwzględnym nazywamy różnicę pomiędzy wartością empiryczną a wartością prognostyczną.

gdzie:

$I^2$  – współczynnik Theila (miernik całkowitego względnego błędu prognozy),  
 $(y_t - \bar{y}_t)^2$  – kwadrat odchylenia (różnicy), pomiędzy danymi empirycznymi  
 a średnią wartością teoretyczną tych danych,  
 $y_t^2$  – kwadrat wartości empirycznych zmiennej zależnej.

Wykorzystując powyższe wzory (wzór 23 i 24) oraz dokonując obliczeń pomocniczych (tabela 20), wyznaczono błąd względny predykcji i średni błąd prognozy:

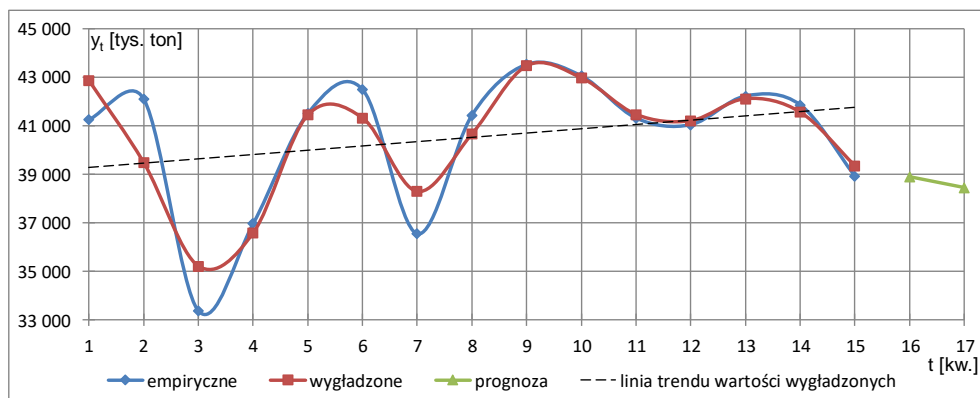
$$I^2 = \frac{\sum (y_t - \bar{y}_t)^2}{\sum y_t^2} = \frac{18369254,47}{24724382122,0} = 0,000743$$

$$I = \sqrt{I^2} = \sqrt{0,000743} = 0,0272573 \approx 2,73\%$$

Otrzymany wynik błędu prognozy potwierdza, że prognoza wyznaczona metodą wag harmoniczných dostarczyła w rezultacie dobre wyniki prognozowania, ponieważ stopień niezgodności pomiędzy empirycznymi a teoretycznymi wartościami zmiennej prognozowanej wynosi jedynie 2,73%. Błędy prognozy, które mieszczą się w granicach do 5%, zazwyczaj przyjmowane są przez badaczy, jako zadawające do celów praktycznego wykorzystania lub do dalszych badań. Należy stwierdzić, że im mniejsza wartość błędu procentowego, tym prognoza została lepiej obliczona (Duda, 2016, s. 131).

## **INTERPRETACJA GRAFICZNA PRZEPROWADZONYCH BADAŃ EMPIRYCZNYCH**

Interpretację graficzną uzyskanych wyników badań w postaci wykresu prezentuje rysunek 1. Zawiera wykresy wartości wyjściowych danych empirycznych i ich wygładzenia metodą trendu pełzającego przy ustalonej stałej wygładzania  $k = 3$  oraz aproksymacje wartości wygładzonych w postaci prostej, a także prognozę na 16. i 17. kwartał, czyli drugi i trzeci kwartał 2019 roku.



**Rys. 1.** Wielkości przewożonych ładunków transportem kolejowym w Polsce w latach 2015÷2019 oraz prognoza na kolejne 16. i 17. kwartał (II i III) 2019 roku

Interpretacja graficzna (rys. 1) analizowanych danych empirycznych (wykres niebieski) zawiera wielkości przewożonych ładunków transportem kolejowym w Polsce w latach 2015÷2019, poczynając od trzeciego kwartału 2015 roku (pierwsza obserwacja na osi czasu  $t$ ), a kończąc na pierwszym kwartale 2019 roku (piętnasta obserwacja na osi czasu  $t$ ). Wyrównanie szeregu czasowego danych empirycznych metodą trendu pełzającego obrazuje wykres bordowy (rys. 1).

Analizując przedstawione wykresy rozpatrywanych zależności funkcyjnych można stwierdzić, że niezgodność pomiędzy wartościami empirycznymi a teoretycznymi jest niewielka, co potwierdzają także dokonane obliczenia pierwiastka błędu średniokwadratowego (*Root Mean Squared Error*) oraz obliczonego poniżej (wzór 25) współczynnika zmienności losowej  $V^{13}$ :

$$V = \frac{s^*}{\bar{y}} \quad (25)$$

$$V = \frac{1106,6}{40507,1} = 0,02732 \approx 2,73\%$$

$$\text{bo} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{607606}{15} = 40507,1$$

Na podstawie obliczonego współczynnika zmienności losowej  $V^{14}$ , można stwierdzić, że wartość błędu średniokwadratowego (jego pierwiastka) stanowi zale-

<sup>13</sup> Współczynnik zmienności losowej  $V$ , w ogólnym ujęciu ekonometrycznym dla modeli z jedną zmienną  $t$ , jest to stosunek odchylenia standardowego składnika resztowego do wartości średniej arytmetycznej zmiennej niezależnej (Kukuła, 2004, s. 121).

<sup>14</sup> Współczynnik zmienności losowej jest względną miarą zmienności ułatwiającą porównanie dyspersji zjawisk o znacznie różniących się średnich. Wyrażamy go najczęściej w procentach (Łaniec, 1999, s. 119÷120).

dwie około 2,7% średniej wartości zmiennej zależnej  $y_t$  (danych empirycznych), co przy przyjmowanych przez badaczy rozpiętościach błędów tego współczynnika, najczęściej w granicach do 10%, jest wynikiem niezwykle zadawalającym.

Ponadto, na podstawie utworzonej aproksymacji wartości wygładzonych metodą trendu pełzającego (rys. 1), można stwierdzić, że kierunek tendencji rozwojowej (trendu<sup>15</sup>) na przestrzeni kolejnych kwartałów lat 2015÷2019 jest ogólnie rosnący. Natomiast obliczona prognoza na kolejny dwa kwartały (drugi i trzeci) roku 2019 – okresy  $T = 16$  i  $T = 17$  (rys. 1) wskazuje, że przyrosty wielkości przewozu ładunków transportem kolejowym w Polsce nie będą chwilowo rosły z kwartału na kwartał.

## ZAKOŃCZENIE

Biorąc pod uwagę tendencje rozwojowe europejskiego transportu kolejowego na najbliższe perspektywiczne lata 2030÷2050 zamieszczone w Białej Księdze Transportu oraz założenia proekologiczne Unii Europejskiej dotyczące znaczącego (60%) ograniczenia emisji dwutlenku węgla w transporcie, można stwierdzić, że przewóz ładunków transportem kolejowym, szczególnie na odległości większe niż 300 km, jest konkurencyjnym i zasobooszczędnym systemem transportu przy zachowaniu gęstej sieci szybkich kolei we wszystkich państwach członkowskich. Zastosowane w artykule ujęcie empiryczne, na bazie analizy teoretycznej przedmiotu badań (Mróz, 2018, s. 311÷329), pozwoliło dokonać pełnego w swym zakresie procesu prognozowania metodą wag harmonicznych w oparciu o dane empiryczne przewozu ładunków transportem kolejowym w Polsce w latach 2015÷2019, a w rezultacie obliczenie prognozy punktowej na II i III kwartał 2019 roku wraz z oszacowanymi błędami predykcji.

Postawiony w artykule cel badań dotyczący otrzymania prognozy (II kwartał – 38 901 i III kwartał 2019 roku – 38 451 tys. ton) i zademonstrowania metody wag harmonicznych został osiągnięty poprzez zastosowanie szczegółowej analizy empirycznej tej metody oraz teoretycznego koncyptowania na przykładzie przewozu ładunków transportem kolejowym w Polsce na przestrzeni lat 2015÷2019. Natomiast problem badawczy został rozwiązany poprzez znalezienie odpowiedzi na pytanie: *jak wykorzystać do prognozy przewozu ładunków krajowym transportem kolejowym metodę wag harmonicznych po wygładzeniu szeregu metodą trendu pełzającego, aby uzyskać jak najmniejszy błąd predykcji?* Rozwiązaniem tego problemu okazało się konsekwentne iteracyjne stosowanie procedur i obliczeń podanych w zaprezentowanym algorytmie prognozowania procesów logistycznych metodą wag harmonicznych (Mróz, 2018, s. 314), pozwalające w rezultacie uży-

---

<sup>15</sup> Trendem nazywamy powolne, regularne i systematyczne zmiany określonego zjawiska, obserwowane w dostatecznie długim przedziale czasu i będące rezultatem działania przyczyn głównych (Sobczyk, 1996, s. 293).



skać jak najmniejszy błąd prognozy. Także hipoteza badawcza została pozytywnie zweryfikowana poprzez właściwy dobór stałej wygładzania (w metodzie trendu pełzającego) na podstawie najmniejszego błędu średniokwadratowego, a co za tym idzie został obliczony błąd prognozy w metodzie wag harmonicznych, który okazał się zadawalająco niski, bo wyniósł zaledwie 2,73%. Prognoza obciążona takim błędem (poniżej 3%), może być z powodzeniem wykorzystana do celów praktycznych lub badawczych.

W niniejszym artykule temat został ujęty w formie empirycznej analizy procedury prognozowania procesów logistycznych metodą wag harmonicznych po uprzednim wygładzeniu poddanego analizie szeregu czasowego metodą trendu pełzającego, aby uzyskać jak najlepszy efekt wygładzania oraz prognozę o najmniejszym błędzie. Ujęcie empiryczne rozpatrywanego problemu badawczego, pozwoliło ponadto podjąć próbę praktycznego uporządkowania obszaru wiedzy związanej z prognozowaniem metodą wag harmonicznych, a w tym głównie z wygładzaniem szeregu czasowego metodą trendu pełzającego poprzez zastosowanie uporządkowanego i kompletnego algorytmu prognozowania metodą wag harmonicznych (bez stosowania skrótów myślowych i odsyłania do innej literatury, a w tym do potrzebnych wzorów i definicji statystycznych).

W metodzie trendu pełzającego, krok po kroku przedstawiono, stopniowe wygładzanie poszczególnych odcinków szeregu czasowego, z wykorzystaniem do wyboru, pięciu sposobów szacowania parametrów strukturalnych modelu z jedną zmienną  $t$ . Ponadto, na potrzeby usprawnienia obliczeń, utworzono przykładowe tabele pomocnicze do uzyskania teoretycznych modeli cząstkowych i ich wartości.

Do sprawdzenia jakości uzyskanych wyników prognoz, wykorzystano obliczenia ich błędów współczynnikiem Theila i współczynnikiem zmienności losowej.

Należy podkreślić, że zasadniczym elementem algorytmu prognozowania metodą wag harmonicznych jest wygładzanie szeregu czasowego metodą trendu pełzającego przy właściwym doborze stałej wygładzania na podstawie weryfikacji błędu średniokwadratowego, a dokładniej pierwiastka kwadratowego tego błędu. Im mniejszy błąd, tym lepsze dopasowanie szeregu empirycznego do szeregu teoretycznego (wygładzonego).

Według autora, powyższe teoretyczne i empiryczne rozważania, powinny stać się pewnym uzupełnieniem dotychczasowej wiedzy w tym obszarze, a także inspiracją do podjęcia dalszych badań prognozowania kolejnych procesów logistycznych metodą wag harmonicznych.

#### **Bibliografia:**

- Publikacje książkowe jednego autora:  
Podgórski J. (2005). Statystyka dla studiów licencjackich. Warszawa: PWE.  
Sobczyk M. (1996). Statystyka. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

- Łaniec J. D. (1999). Elementy statystyki dla pedagogów. Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko–Mazurskiego.
- Publikacje książkowe wielu autorów:  
Bendkowski J., Kramarz M., Kramarz W. (2010). Metody i techniki ilościowe w logistyce stosowanej. Wybrane zagadnienia. Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej.  
Maciąg A., Pierłoń R., Kukła S. (2013). Prognozowanie i symulacja w przedsiębiorstwie. Warszawa: PWE.  
Pelc M., Juszczak M. (2003). Matematyka. Warszawa: AON.
  - Publikacje książkowe redagowane:  
Kukuła K. (red.). (2004). Wprowadzenie do ekonometrii w przykładach i zadaniach. Warszawa: Wydawnictwo naukowe PWN.
  - Artykuły w czasopiśmie:  
Duda A. (2016). Modelowanie i prognozowanie ekonometryczne w logistyce przedsiębiorstwa. Systemy Logistyczne Wojsk, nr 44/2016, 18÷41.  
Mróz M. (2017). Dobór zmiennych niezależnych w modelowaniu procesów logistycznych metodą analizy grafów. Zeszyty Naukowe Akademii Sztuki Wojennej, Nr 3 (108), 129÷155.  
M. Mróz (2018). Prognozowanie procesów logistycznych metodą wag harmonicznnych. Gospodarka Materiałowa i Logistyka, nr 11/2018, 311÷329.
  - Źródła Internetowe:  
<http://www.transforum-project.eu/pl/transforum/biala-ksiega-transportu.html> (05.07.2019).  
<https://stat.gov.pl/wskazniki-makroekonomiczne/> (04.07.2019 r.).