

Włodzimierz RIZNYK, Oresta BANDYRSKA

UNIwersytet Technologiczno-Przyrodniczy im. Jana i Jędrzeja Śnialeckich w Bydgoszczy
UKRAIŃSKIE NAUCZYCIELSKIE BADAWCZE CENTRUM STANDARYZACJI, METROLOGII I JAKOŚCI PRODUKCJI

Perspektywy rozwoju metrologii na zasadach teorii "złotych pierścieni liczbowych"

Prof. dr hab. inż. Włodzimierz RIZNYK

Ur. 21 maja 1940 roku w Poliście (Ukraina). 1962r. - Politechnika Lwowska, Wydz. Energetyki; 1967r. - Wydz. Radiotechniki; 1980r.- stopień dr n.t. (Fizyko-Mechaniczny Instytut Akademii Nauk Ukrainy, cybernetyka i teoria informacji); 1994r.- stopień dr hab. (Techniczny Uniwersytet, Winnycja, technika obliczeniowa, matematyczne modelowanie i matematyczne metody w badaniach naukowych); 1996r.- prof. UTP.
Publikacje: ok. 200; książki: 4; patenty: 40; wypromował 4 doktorów.



e-mail: wriz@utp.edu.pl

Dr inż. Oresta BANDYRSKA

Dyrektor Lwowskiej filii Ukraińskiego Nauczycielskiego Badawczego Centrum Standaryzacji, Metrologii i Jakości Produkcji. Adiunkt w Katedrze Metrologii Uniwersytetu Narodowego "Politechnika Lwowska". W swoich pracach zajmuje się problemami nadmiarowości informacyjnej, standaryzacji w metrologii i jakości produkcji. Jest autorem około 70 prac naukowych, w tym 5 patentów.



e-mail: oresta.filii@ndi-systema.lviv.ua

Streszczenie

W pracy określone są perspektywy rozwoju nauki metrologicznej na zasadach teorii "złotych pierścieni liczbowych" (ZPL), które prowadzą do koncepcji "metrologii kombinatorycznej", tzn. bazującej na wykorzystaniu nieznanymi wcześniej wspaniałych właściwości tych modeli. Jednym z przykładów może być optymalizacja rozmieszczenia czujników pomiarowych w przestrzeni, celem osiągnięcia jak najlepszej zdolności rozdzielczej całego systemu.

Słowa kluczowe: metrologia kombinatoryczna, wzorec wielwartościowy, optymalizacja, zdolność rozdzielcza, nadmiarowość

Perspectives for development of metrology based on the "gold numerical rings" theory

Abstract

The paper considers perspectives for development of metrology, based on the gold numerical rings theory (GNR)s, which lead to the „combinatorial metrology” conception, namely unknown earlier remarkable properties of the models. As an example can be an optimization for arrangement of sensors spreading in a space for achievement of the best resolving ability.

Keywords: combinatorial metrology, adjustable gage, optimization, resolving ability, redundancy

1. Wstęp

Nowoczesna nauka metrologiczna obejmuje szerokie aspekty rozwoju techniki pomiarowej. Jednym z najbardziej aktualnych problemów jest doskonalenie normatywnej bazy oraz mechanizmów jej stosowania do rozwoju nowych metod pomiarów zgodnie z nowoczesnymi wymaganiami metrologii. Wprowadzenie naukowych zasad nanometrologii jest spowodowane ewolucją w technologiach wytwarzania od mikroskali do nanoskali, a nawet skali subnanometrowej. Oznacza to rozwój metrologii bazującej na nowych zasadach fizycznych, a za tym – uzyskanie nowych zasadniczych podejść dla wykonania odpowiednich pomiarów. Takim podejściem jest rozwój metrologii, polegający na zmniejszeniu nadmiarowości systemów pomiarowych, w tym – tworzenie nowego systemu miar i skal o zakresach przewyższających obecne, oraz udoskonalenie metod odtwarzania wielkości, bazujących na wykorzystaniu niektórych własności "złotych pierścieni liczbowych".

2. Od łańcucha liczb do „złotego pierścienia”

Rozpatrzmy zbiór wybranych całkowitych liczb dodatnich $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_n$, który wpisujemy do tabeli o rozmiarach $n \times n$ w taki sposób, żeby dla każdej j -tej uporządkowanej pary liczb (p_j, q_j) , $p_j, q_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ była przyporządkowana odpowiednia suma $S_j = S(p_j, q_j)$ na tym szeregu (Tab.1).

Tab. 1. Sumy szeregowe
Tab. 1. Ordered-chain sums

p_j	q_j							
	1	2	...	$l-1$	1	...	$n-1$	n
1	k_1	$\sum_{i=1}^2 k_i$...	$\sum_{i=1}^{l-1} k_i$	$\sum_{i=1}^l k_i$...	$\sum_{i=1}^{n-1} k_i$	$\sum_{i=1}^n k_i$
2		k_2	...	$\sum_{i=2}^{l-1} k_i$	$\sum_{i=2}^l k_i$...	$\sum_{i=2}^{n-1} k_i$	$\sum_{i=2}^n k_i$
...				
$l-1$...	k_{l-1}	$\sum_{i=l-1}^l k_i$...	$\sum_{i=l-1}^{n-1} k_i$	$\sum_{i=l-1}^n k_i$
l			...		k_l	...	$\sum_{i=l}^{n-1} k_i$	$\sum_{i=l}^n k_i$
...				
$n-1$			k_{n-1}	$\sum_{i=n-1}^n k_i$
n				k_n

Suma określa się następującym wzorem:

$$S(p_j, q_j) = \sum_{i=p_j}^{q_j} k_i, \quad p_j \leq q_j \quad (1)$$

Wiersze tabeli 1 odpowiadają pierwszej, a kolumny – drugiej liczbie kodu sumy. Tablica sum szeregowych na tym szeregu liczb ma następujące własności:

- 1) na pozycjach (p_j, q_j) , dla $p_j=q_j = l$, rozmieszczone są liczby k_l , $l= 1, 2, \dots, n$;
- 2) na ostatniej pozycji w pierwszym wierszu (tzn. dla $p_j=1, q_j=n$)

znajduje się liczba ;

- 3) liczba $S(l, i)$, ($p_j=l, q_j=i$), umieszczona w l -tym wierszu i i -tej kolumnie, $i = 2, 3, \dots, n$; $i > l$, jest większa od liczby $S(l, i-1)$, będącej na pozycji z lewej strony w tym samym wierszu o wartość k_i , która zapisana jest na pozycji będącej na przecięciu przekątnej oraz i -tej kolumny.

Elementów rozmieszczonych pod przekątną tablicy nie rozpatruje się, dlatego że w tym przypadku elementy $p_j > q_j$ nie są zdefiniowane.

Na podstawie tabeli 1 łatwo jest zdefiniować maksymalną liczbę S różnowartościowych sum szeregowych:

$$S = n(n+1)/2 \quad (2)$$

Natychmiast nasuwa się pytanie, czy możliwe są takie sposoby ustalenia ilości elementów k_1, k_2, \dots, k_n , w których używając S sum szeregowych udało by się wyczerpać ciąg liczb naturalnych. Innymi słowy, czy możliwe są warianty wypełnienia tabeli 1 liczbami naturalnymi od 1 do S z wykorzystaniem wzoru (1).

Tab. 2. Sumy pierścieniowe
Tab. 2. Sircular sums

p_j	q_j				
	1	2	...	$n-1$	n
1	k_1		...		
2	$\sum_{i=1}^n k_i$	k_2	...		
...		
$n-1$	$+ k_1$	$\sum_{i=n-1}^n k_i$ + $\sum_{i=1}^2 k_i$		k_{n-1}	$\sum_{i=n-1}^n k_i$
n	$k_n + k_1$	$k_n +$ $\sum_{i=1}^2 k_i$		$\sum_{i=1}^n k_i$	k_n

Następnym krokiem jest zamknięcie rozpatrywanego szeregu liczb w postaci koła, tzn. liczbę k_1 umieścimy przy liczbie k_n .

Tym razem każdej j -tej uporządkowanej parze liczb (p_j, q_j) , $p_j, q_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ przyporządkowujemy odpowiednią sumę $S_j = S(p_j, q_j)$ na rozpatrywanym pierścieniu liczb (Tab. 2), określoną wzorami (3) i (4).

Dla przypadków gdy $p_j \leq q_j$ - sumę pierścieniową S_j oblicza się zgodnie ze wzorem (3), a gdy $p_j > q_j$ - stosujemy równanie (4):

$$S(p_j, q_j) = \sum_{i=p_j}^{q_j} k_i, \quad p_j \leq q_j \quad (3)$$

$$S(p_j, q_j) = \sum_{i=1}^{q_j} k_i + \sum_{i=p_j}^n k_i, \quad p_j > q_j \quad (4)$$

Na podstawie Tab. 2 łatwo jest zdefiniować maksymalną liczbę S_p różnowartościowych sum pierścieniowych, opisanych wzorem (5).

$$S_p = n(n-1) + 1 \quad (5)$$

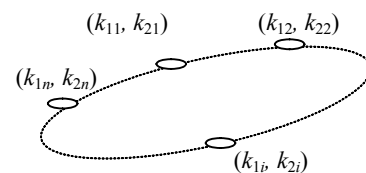
Ze wzorów (2) i (5) wynika, że maksymalna suma pierścieniowa S_p jest prawie dwukrotnie większa od maksymalnej sumy szeregowej S dla konstrukcji kombinatorycznej o wybranej ilości n liczb.

Natychmiast nasuwa się pytanie, czy możliwe są takie sposoby ustalenia ilości elementów k_1, k_2, \dots, k_n , dla których używając S_p sum pierścieniowych, udało by się wyczerpać ciąg liczb naturalnych od 1 do S_p z wykorzystaniem wzorów (3) i (4). Takie postawienie zagadnienia prowadzi do definicji pojęcia "złotego pierścienia liczbowego".

Z badań własności sekwencji liczbowych [1] wynika, że możliwe są takie sposoby ustalenia ilości elementów k_1, k_2, \dots, k_n , przy których używając S_p sum pierścieniowych udaje się utworzyć zbiór kolejnych liczb naturalnych. Innymi słowy, możliwe są warianty wypełnienia tabeli 2 liczbami naturalnymi od 1 do S_p z wykorzystaniem wzoru (5). Właśnie takimi liczbami są elementy „złotego pierścienia liczbowego”.

3. Dwuwymiarowy ZPL

Rozpatrzmy szereg kołowy o wybranych n par całkowitych liczb dodatnich $\{(k_{11}, k_{21}), (k_{12}, k_{22}), \dots, (k_{1n}, k_{2n}), \dots, (k_{1n}, k_{2n})\}$, jak model graficzny dwuwymiarowego złotego pierścienia liczbowego (Rys.1).



Rys.1. Model graficzny dwuwymiarowego złotego pierścienia liczbowego
Fig.1. A graphic model of two-dimensional gold numerical ring

Zakładamy, że $(k_{11}, k_{21}) = (1,1)$; $(k_{12}, k_{22}) = (1,2)$; $(k_{13}, k_{23}) = (1,4)$; $(k_{14}, k_{24}) = (1,3)$ i obliczamy wszystkie możliwe sumy pierścieniowe tej konstrukcji na dwuwymiarowej macierzy o rozmiarach 3×4 z użyciem aparatu matematycznego teorii liczb:

$$\begin{aligned} (k_{11}, k_{21}) + (k_{12}, k_{22}) &\equiv ((k_{11} + k_{12}), (k_{21} + k_{22})) \equiv (2,3); \\ (k_{12}, k_{22}) + (k_{13}, k_{23}) &\equiv ((k_{12} + k_{13}), (k_{22} + k_{23})) \equiv (2,1); \\ (k_{13}, k_{23}) + (k_{14}, k_{24}) &\equiv ((k_{13} + k_{14}), (k_{23} + k_{24})) \equiv (2,2); \\ (k_{14}, k_{24}) + (k_{11}, k_{21}) &\equiv ((k_{14} + k_{11}), (k_{24} + k_{21})) \equiv (2,4); \\ (k_{11}, k_{21}) + (k_{12}, k_{22}) + (k_{13}, k_{23}) &\equiv ((k_{11} + k_{12} + k_{13}), (k_{21} + k_{22} + k_{23})) \equiv (3,2); \\ (k_{12}, k_{22}) + (k_{13}, k_{23}) + (k_{14}, k_{24}) &= ((k_{12} + k_{13} + k_{14}), (k_{22} + k_{23} + k_{24})) \equiv (3,4); \end{aligned}$$

$$k_{13}, k_{23}) + (k_{14}, k_{24}) + (k_{11}, k_{21}) \equiv ((k_{13} + k_{14} + k_{11}), (k_{23} + k_{24} + k_{21})) \equiv (3,3);$$

$$(k_{14}, k_{24}) + (k_{11}, k_{21}) + (k_{12}, k_{22}) \equiv ((k_{14} + k_{11} + k_{12}), (k_{24} + k_{21} + k_{22})) \equiv (3,1);$$

Rezultatem obliczeń są pary liczb, zajmujące pozycje komórek tablicy o rozmiarach 3×4 . Wynika z tego, że szereg kołowy $\{(1,1),(1,2),(1,4),(1,3)\}$ jest przykładem skonstruowania dwuwymiarowego złotego pierścienia liczbowego z czwórką ($n=4$) par całkowitych liczb. Teoretycznie istnieje nieskończona ilość takich konstrukcji kombinatorycznych.

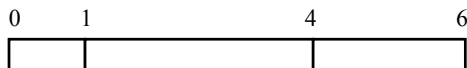
4. Pomiar wielkości fizycznych na podstawie ZPL

Zdolność rozdzielcza systemu pomiarowego zależy w znacznej mierze od sposobu rozmieszczenia czujników tworzących ten system. Wiadomo, że większość używanych dzisiaj systemów pomiarowych, bazujących na wielowartościowych miarach uporządkowanych, to systemy nadmiarowe (np. zwykła linijka o równomiernym rozmieszczeniu znaczników na jej skali). Nadmiar informacji równoznaczny jest z jej utraceniem. Z punktu widzenia polepszenia zdolności rozdzielczej ważne teoretyczne i praktyczne znaczenie ma problem stworzenia linijek o znacznikach rozmieszczonych w taki sposób, żeby można było osiągnąć jak największą ilość dokładnych rezultatów pomiaru różnych odległości bez zwiększenia ilości tych znaczników. Na rys. 2 przedstawiono linijki o czterech znacznikach rozmieszczonych na dwa sposoby. Linijka o równomiernie (a) ustawionych znacznikach pozwala odtwarzać dokładnie rozmiary w zakresie od 0 do L z interwałem przyrostu $L/3$ (gdzie L – długość linijki), gdy tymczasem linijka o nierównomiernie (b) ustawionych znacznikach mogłaby odtwarzać odległości z mniejszym interwałem w tym samym zakresie pomiarowym.



Rys.2. Linijki o równomiernie (a) i nierównomiernie (b) rozmieszczonych znacznikach
Fig.2. Rulers with uniform (a) and non-uniform (b) ordered marks

Natychmiast nasuwa się teoretyczne pytanie, dotyczące możliwości istnienia rozwiązania tego problemu w ogóle. S. Golomb zaproponował skonstruowanie linijki o nierównomiernie ustawionych znacznikach tak, żeby każda para tych znaczników była rozmieszczona w różnych odległościach i żeby cały zbiór w/w odległości odpowiadał ciągowi liczb naturalnych [2]. Przykład „Idealnej linijki Golomba” o długości sześciu ($L=6$) jednostek zilustrowano na rys. 3.



Rys.3. Idealna linijka Golomba o długości sześciu ($L=6$) jednostek
Fig.3. Ideal Golomb ruler with six ($L=6$) units

W odróżnieniu od zwykłej linijki, linijka z rysunku 2 ma nierównomiernie rozmieszczone znaczniki (0,1,4,6) tak, że każda kolejna para tych znaczników znajduje się w odległości w zakresie od 0 do $L=6$, otrzymanej jako różnica wartości odpowiednich znaczników, w sposób zilustrowany poniżej:

$$\begin{matrix} 1=1-0 & 2=6-4 & 3=4-1 \\ 4=4-0 & 5=6-1 & 6=6-0 \end{matrix}$$

Zauważmy, że utworzony zbiór wartości odległości odpowiada ciągowi liczb naturalnych 1,2,...6. Łatwo obliczyć, że

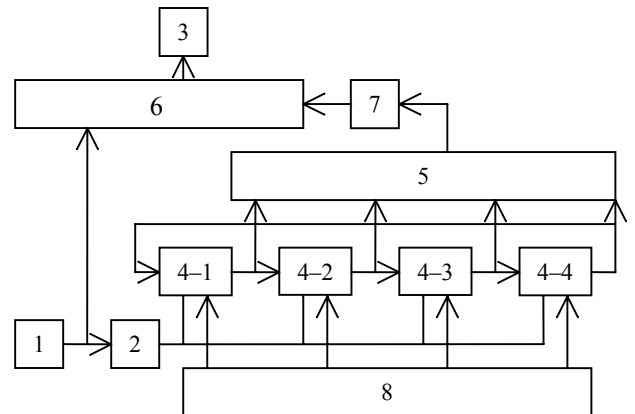
w porównaniu ze zwykłą linijką o takiej samej ilości znaczników ($n=4$) idealna linijka Golomba pozwala zwiększyć ilość dokładnie odtwarzanych wartości odległości z 3 do 6 w tym samym zakresie pomiarowym i odpowiednio polepszyć zdolność rozdzielczą całego systemu pomiarowego, na przykład systemu radarowego [4].

Łatwo ustalić, że dla wielowartościowych wzorców o n znacznikach, skonstruowanych na zasadach linijek Golomba, maksymalna ilość G_{max} miar wielkości o wartości rzędu 1,2,... równa się:

$$G_{max} = n(n-1)/2 \tag{6}$$

Natomiast dla wielowartościowych wzorców o tej samej ilości n znaczników, skonstruowanych na zasadach złotych pierścieni, maksymalna ilość miar wielkości o wartości rzędu 1,2,... równa się $S_p = n(n-1)+1$. Wynika z tego, że użycie wielowartościowych wzorców, skonstruowanych na zasadach złotych pierścieni, pozwala dokładnie odtwarzać wartości pomiarów wielkości fizycznych o dwukrotnie dłuższym rzędzie liczb naturalnych, niż na zasadach wskazanych linijek. Również faktyczny brak szeregowych modeli systemów pomiarowych stosowanych do „idealnego” wypełnienia tablicy 1 liczbami naturalnymi (tzn. od 1 do S), wskazuje na wymierne korzyści zastosowania złotych pierścieni liczbowych w porównywaniu z linijkami Golomba [3].

Często stosowana metoda pomiaru interwałów czasowych polega na porównaniu wzorcowych i mierzonych szeregów interwałów czasowych. Zdolność rozdzielcza tak pomyślanego systemu pomiarów w znacznej mierze zależy od możliwości odróżniania jak najkrótszych odcinków czasowych. Celem zaprojektowanego systemu pomiarowego jest polepszenie jego zdolności rozdzielczej dzięki wykorzystaniu wzorcowych interwałów czasowych, bazujących na własnościach złotego pierścienia liczbowego (Rys.4).



Rys.4. System pomiaru interwałów czasowych budowany na zasadach złotych pierścieni liczbowych
Fig.4. Time intervals measuring system constructed on the gold numerical rings principle

System pomiaru interwałów czasowych obejmuje: 1 - źródło mierzonych interwałów czasowych, 2 - generator impulsów, 3 - wskaźnik oscylograficzny, 4 - rejestr kołowy, 5 i 6 - komórki zbierające, 7 - układ formujący interwały wzorcowe, 8 - układ wprowadzenia sygnału „1”.

Dla realizacji tego celu wykorzystano rejestr kołowy, zawierający np. cztery ($n=4$) komórki obejmujące jeden ($k_1=1$) element rejestru przesuwającego w pierwszej, dwa ($k_2=2$) w drugiej, sześć ($k_3=6$) w trzeciej oraz cztery ($k_4=4$) w czwartej komórce, co odpowiada złotemu pierścieniowi liczbowemu (1, 2, 6, 4). W momencie podania sygnału ze źródła mierzonych interwałów 1 na wejście klucza generatora 2 impulsów jednocześnie startuje generator odchylenia wskaźnika oscylograficznego 3, przy czym, podane sygnały „1” cyrkulują w kołowym rejestrze 4, przesuwającym się z częstotliwością

określona przez generator 2 impulsów i pojawiają się na wyjściach komórek 4-1,...,4-4 oraz na wejściu komórki zbierającej 5, a także na wyjściu układu 7 formowania interwałów wzorcowych z interwałami czasowymi o proporcji 1:2:6:4. Istota pomiaru polega na wykorzystaniu konsekwencji wskazanych interwałów w roli wzorcowych miar. Rezultat pomiaru otrzymuje się określając najlepszą zbieżność interwałów wzorcowego i mierzonego.

Skutecznym zastosowaniem modeli kombinatorycznych, opartych na złotych pierścieniach liczbowych, prócz projektowania systemów pomiaru wielkości interwałów czasowych i rozmiarów geometrycznych, jest także konstruowanie systemów radarowych o dobrych właściwościach rozdzielczych.

Analiza porównawcza parametrów metrologicznych systemów pomiarowych, bazujących na wykorzystaniu teorii złotych pierścieni liczbowych z systemami stosującymi odpowiednie modele kombinatoryczne, wskazuje na to, że zwiększenie ilości elementów pomiarowych, np. czujników, powoduje prawie wielokrotny wzrost skali oraz dokładności pomiarów.

5. Kody „złoty pierścieni”

Kodem „złoty pierścieni” liczbowych nazywa się taki kod sumy wag bitów, w którym są kombinacje jednostajnie skoncentrowanych symboli „1” oraz „0” we wszystkich kombinacjach dozwolonych tego kodu. Kod monolityczny binarny ma pewne zalety w porównaniu z innymi kodami. Na przykład kod ten pozwala bardzo prosto wykrywać błędy, gdyż jeżeli przynajmniej jeden symbol „1” pojawi się wśród symboli „0”, lub symbol „0” wśród symboli „1”, to jest dostatecznym dowodem na zaistnienie błędu. Jeżeli w takim kodzie powstają błędy, to całkowicie lub częściowo mogą zostać natychmiast skorygowane na podstawie omówionej powyżej jednostajności symboli. Właśnie taki sposób zapewnia wysoki poziom ochrony zakodowanej informacji przed zakłóceniami. Kodowanie polega na prostym określeniu miejsca (pozycji) początku i końca jednostajnego szeregu symboli „1” lub „0”, tzn. dla wygenerowania każdej kombinacji wystarczy podać odpowiednią długość szeregu oraz umiejscowić jego początek. Wynika z tego kolejna zaleta, która polega na możliwości szybkiego kodowania informacji w kodzie monolitycznym. Poważnym wymogiem stawianym kodom monolitycznym jest zabezpieczenie dostatecznej różnorodności jego stanów kombinacyjnych, odpowiadających skali kodowania zadanych liczb. Im więcej liczb o różnej wartości można zakodować w kodzie monolitycznym pozycyjnym, tym jest on lepszy. Właśnie dlatego mamy okazję wykorzystać właściwości złotych pierścieni liczbowych.

Rozpatrzmy przykład wykorzystania złotego pierścienia $\{1,4,6,2\}$ dla konstruowania kodu monolitycznego (Tab.3).

Tab. 3. Kod złotego pierścienia liczbowego $\{1,4,6,2\}$
Tab. 3. Code of the Gold Ring Bundle $\{1,4,6,2\}$

Liczba	Kod	Liczba	Kod
0	0000	7	1101
1	1000	8	0011
2	0001	9	1011
3	1001	10	0110
4	0100	11	1110
5	1100	12	0111
6	0010	13	1111

W tab. 3. są wpisane wszystkie możliwe kombinacje liczb w kodzie monolitycznym o złotym pierścieniu $\{1,4,6,2\}$ od 0 do $S = n^2 - n + 1 = 13$, gdzie n – ilość pozycji wybranego kodu monolitycznego, przy czym $n=4$, $S=13$ są parametrami odpowiedniego złotego pierścienia. Można zauważyć, że dla rozszerzenia skali kodowania liczb w kodzie monolitycznym „pierścieniowym” wystarczy wykorzystać złoty pierścień liczbowy o wybranych parametrach n i S .

Następnie rozpatrzmy przykład wykorzystania opisanego dwuwymiarowego złotego pierścienia $\{(1,1),(1,2),(1,4),(1,3)\}$ dla konstruowania kodu monolitycznego. Skupiamy uwagę na możliwości kodowania dwuwymiarowych wektorów kombinacjami jednostajnie skoncentrowanych symboli „1” oraz „0” we wszystkich kombinacjach dozwolonych tego kodu. Można zauważyć, że tym razem należy niezbędnie używać aparatu matematycznego teorii kongruencji. W tab.4. są wpisane wszystkie możliwe kombinacje dwuwymiarowych wektorów w kodzie monolitycznym o złotym pierścieniu $\{(1,1), (1,2), (1,4), (1,3)\}$ na kracie prostokątnej o rozmiarach 3×4 od jednostkowego wektora $(1,1)$ do $(3,4)$. Rozmiary prostokąta są ustalone z równania $X \cdot Y = S - 1$, gdzie $X=3$, $Y=4$, $S=n^2 - n + 1 = 13$; $n=4$ – ilość pozycji wybranego kodu monolitycznego, przy czym n i S są parametrami odpowiedniego złotego pierścienia.

Tab. 4. Kod złotego pierścienia liczbowego $\{(1,1),(1,2),(1,4),(1,3)\}$
Tab. 4. Code of the Gold Ring Bundle $\{(1,1),(1,2),(1,4),(1,3)\}$

Wektor	Kod	Wektor	Kod
(1,1)	1000	(2,3)	1100
(1,2)	0100	(2,4)	1001
(1,3)	0001	(3,1)	1101
(1,4)	0010	(3,2)	1110
(2,1)	0110	(3,3)	1110
(2,2)	0011	(3,4)	0111

Zauważmy, że dla rozszerzenia skali kodowania wektorów w kodzie monolitycznym „pierścieniowym” wystarczy wykorzystać złoty pierścień liczbowy o wybranych parametrach n i S oraz wyznaczonych rozmiarów $X \times Y$ prostokąta.

6. Podsumowanie

Wykorzystanie złotych pierścieni w metrologii, jako modeli kombinatorycznych, bazujących na zasadach teorii „złoty pierścieni liczbowych”, prowadzi do rozwoju badań fundamentalnych oraz stosowanych w metrologii, bazujących na lepszym poznawaniu podstawowych praw przyrody, w tym doskonałości geometrycznej obiektów naturalnych i sztucznych, wpływających z własności jedno-, dwu- i wielo-pomiarowych złotych pierścieni liczbowych. Wykorzystanie nieznanymi wcześniej, wspaniałymi własności tych modeli pozwala rozszerzyć wyobrażenie o podstawowej roli fundamentalnych pojęć, takich jak: nadmiarowość informacyjna i strukturalna systemu miar, symetria wraz z asymetrią, dokładność i prawidłowość pomiarów. Celem badań jest osiągnięcie jak najlepszej zdolności rozdzielczej układu lub systemu pomiarowego od makro skali aż do skali sub- i nano- metrowej. Oprócz konstruowania nie nadmiarowych wielowartościowych i wielowymiarowych wzorców, badania mają ważne znaczenie w metodach kodowania oraz przetwarzania informacji, w tym dla projektowania systemów pomiarowych i komputerowych z osiągnięciem takich najważniejszych charakterystyk, jak szybkość działania, niezawodność, zdolność do samokontroli.

6. Literatura

- [1] Titsworth R.C.: Optimal and minimax sequences, International Telemetry Conference, 1963.
- [2] Martin Gardner: Golomb's Graceful Curve, Life and Other Mathematical Amusements. W.H.Freeman and Company, 1983.
- [3] Gary S. Bloom and Solomon W. Golomb: Application of Numbered Undirected Graphs, Proceedings of the IEEE, Vol.65, No.4, 1977, pp.562-570.