MINUT 2021 (3), s. 128–141
ISSN 2719-3063

Witold TOMASZEWSKI

Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska,
ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Wycieczki z Lagrange'em, czyli matematyka wokół nas

Streszczenie. Twierdzenia z zakresu czystej matematyki nieczęsto kojarzą się nam z życiem codziennym. Jednak wiele z nich znajduje bezpośrednie zastosowanie w otaczającej nas rzeczywistości. Celem niniejszego artykułu jest wsparcie tej tezy poprzez zobrazowanie, w jaki sposób podczas pieszej wycieczki można odkryć... twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. W dalszej części artykułu pokazano, że geometryczna wersja rozważanego twierdzenia znana była już w czasach starożytnych — Archimedes stosował ją do wyznaczania pól figur, które nie są wielokątami.

Słowa kluczowe: Twierdzenie Lagrange'a, twierdzenie Rolle'a, pole figury, krzywe stożkowe.

1. Wstęp

Matematycy, jak wszyscy ludzie, wykonują codziennie wiele czynności. Myją się, ubierają, robią zakupy, chodzą na spacery, sprzątają (choć autor tego artykułu zna kilku matematyków, którzy tego ostatniego nie robią — a szkoda, bo mogłoby to zaowocować ciekawymi matematycznymi spostrzeżeniami). W tych codziennych zajęciach matematycy dostrzegają czasem pewne zasady, które potem wyrażają w języku matematyki, formułując w postaci twierdzeń matematycznych. Oczywiście te zasady dostrzegają też inni ludzie, ale zwykle są one dla nich tak naturalne i oczywiste, że nie zastanawiają się nad ich matematyczną naturą.

W wielu podręcznikach można znaleźć opis różnych zastosowań matematyki. Najczęściej omawiane są zastosowania w fizyce, naukach technicznych, czasem w ekonomii, a rzadziej w biologii lub innych naukach. Nie znajdziemy jednak informacji o faktach matematycznych pojawiających się w życiu codziennym, wokół nas. Ten artykuł nie wypełnia tej luki, pokazuje jedynie jeden przykład twierdzenia, które można zaobserwować w trakcie wykonywania codziennych czynności.

W rozdziale 2. opowiadamy o tym, jak w trakcie wycieczek można odkryć twierdzenie Lagrange'a[1] o wartości średniej, a w rozdziale 3. pokazujemy, że geometryczna wersja twierdzenia Lagrange'a była znana już w czasach starożytnych — Archimedes używał jej do wyznaczania pól figur, które nie są wielokątami.

Autor korespondencyjny: W. Tomaszewski (Witold.Tomaszewski@polsl.pl).
Data wpłyniecia: 30.08.2021.

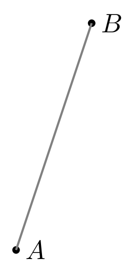
[1] Joseph Louis Lagrange (1736–1813) urodził się w Turynie jako Giuseppe Lodovico Lagrangia. Rodzice Lagrange'a byli Włochami, ojciec miał francuskie korzenie. Ogólnie przyjęta pisownia jego nazwiska wynika najpewniej z faktu, że sam się nią posługiwał w pracach naukowych — Lagrange dużą część swojego życia spędził we Francji.

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej jest jednym z najważniejszych twierdzeń rachunku różniczkowego. Niniejszy tekst nie wymaga jednak znajomości formalnych definicji podstawowych pojęć z zakresu analizy matematycznej. Ujęte w artykule określenie pochodnej wykorzystuje wyłącznie równość, którą zwykle podaje się jako geometryczną interpretację pochodnej.

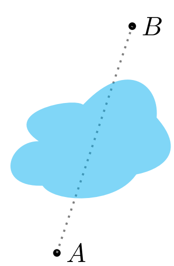
2. Twierdzenie Lagrange'a

Wyobraźmy sobie, że chcemy przejść najkrótszą drogą z punktu A do punktu B.

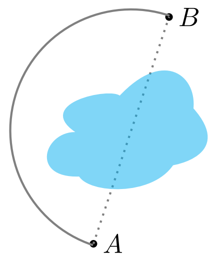
Jeśli przyjmiemy, że teren jest płaski (a zwykle tak właśnie robimy), to zgodnie z geometrią Euklidesa (którą uznajemy za „naszą" geometrię), najkrótszą drogą jest odcinek łączący A z B.



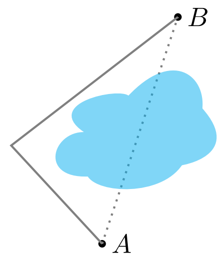
Sytuacja się komplikuje, gdy między punktami znajduje się jakaś przeszkoda, na przykład jeziorko.



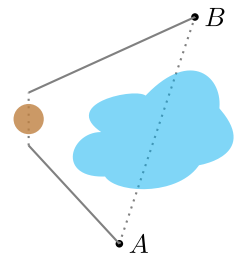
Jeśli nie dysponujemy łódką, a nie chcemy jeziorka przepływać wpław, to musimy wybrać inną drogę, zwykle prowadzącą wzdłuż wytyczonej ścieżki. Możemy wyszczególnić trzy istotnie różne warianty takiej drogi: w wariancie pierwszym ścieżka jest „gładka", w drugim zawiera „ostry zakręt", a w trzecim kolejną — tym razem niewielką — przeszkodę, którą wolelibyśmy przeskoczyć.



Droga 1



Droga 2



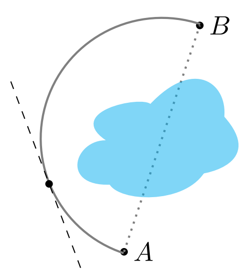
Droga 3

Na mapach ścieżki lub drogi rysowane są zwykle w postaci krzywych. Zauważmy, że trzecia z przedstawionych dróg istotnie różni się od poprzednich — jest „nieciągła". Punkt przeskoku, zaznaczony wykropkowaną linią (w matematyce nazywany jest punktem nieciągłości), wynika z pojawiających się przeszkód: pni ściętych drzew, gałęzi leżących na drodze czy strumyków. Nie będziemy tutaj wyjaśniać, ani tym bardziej podawać formalnej definicji krzywych ciągłych, gdyż wierzymy, że przedstawione rysunki w wystarczającym stopniu oddają istotę tego pojęcia.

Zauważmy, że we wszystkich powyższych wariantach naszej wycieczki zachowane są dwie zasady. Po pierwsze musimy przez pewien czas oddalać się od drogi bezpośrednio łączącej A z B, a po drugie musi istnieć (przynajmniej jeden) punkt zwrotny, w którym zaczniemy się do tej właściwej drogi przybliżać. W jaki sposób możemy opisać taki punkt zwrotny? Wszystko zależy od tego, jak wygląda nasza droga.

Trasę drugą różni od pierwszej punkt zagięcia, zwany zwykle ostrzem. Żartobliwie można określić drugą drogę jako „wojskową", ponieważ zagięcie pojawia się po komendzie „w prawo zwrot!". O takim punkcie w matematyce mówimy, że jest nieróżniczkowalny. O pierwszej krzywej będziemy mówić, że jest różniczkowalna w każdym punkcie[2].

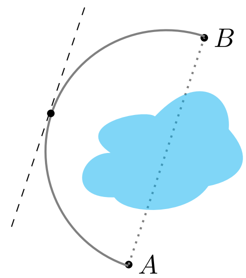
A co oznacza termin różniczkowalna? Możemy tę cechę scharakteryzować tak, że w każdym punkcie krzywej można jednoznacznie narysować prostą do niej styczną.



Unikamy tutaj podawania definicji stycznej, uzasadniając to podobnie jak brak formalnego wyjaśnienia pojęcia krzywych ciągłych. Jest jasne, że w ostrzu nie można umieścić jednoznacznie stycznej. Zatem krzywa opisana jako Droga 2 w tym punkcie nie jest różniczkowalna.

I tu dochodzimy do sedna. Lagrange zauważył, że jeśli krzywa rozpięta między dwoma punktami jest różniczkowalna, to punkt zwrotny charakteryzuje się tym, że styczna w nim poprowadzona jest równoległa do odcinka AB.

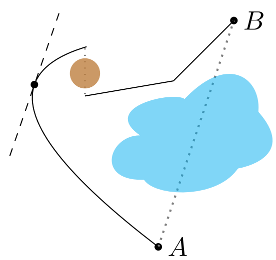
[2] Wiadomo, że jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest ciągła.



Swoje twierdzenie Lagrange sformułował następująco:

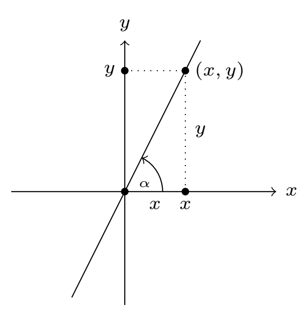
Jeśli krzywa rozpięta między punktami A i B jest różniczkowalna, to istnieje punkt na tej krzywej, że styczna do niej w tym punkcie jest równoległa do odcinka AB.

Przytoczenie powyższego twierdzenia stwarza dobrą okazję do wyjaśnienia bardzo ważnej kwestii: tak zwanej „istotności założeń". W twierdzeniu Lagrange'a założeniem jest różniczkowalność krzywej. Widać, że choć punkt zwrotny istnieje dla każdej z trzech przedstawionych wcześniej tras, to dla dwóch z nich nie można go określić przy pomocy stycznej. Zatem dla krzywych nieróżniczkowalnych twierdzenie Lagrange'a może być nieprawdziwe. Trzeba powiedzieć „może być nieprawdziwe", bo na krzywej, która ma punkty nieciągłości lub punkty nieróżniczkowalne, może istnieć punkt, w którym styczna jest równoległa do odcinka AB — przykład znajduje się na poniższym rysunku.



Zazwyczaj w podręcznikach twierdzenie Lagrange'a formułuje się, używając pochodnej funkcji w punkcie, którą z kolei definiuje się przy użyciu pojęcia granicy funkcji. Pochodną możemy również zdefiniować, odwołując się do pojęcia stycznej do krzywej będącej wykresem rozważanej funkcji.

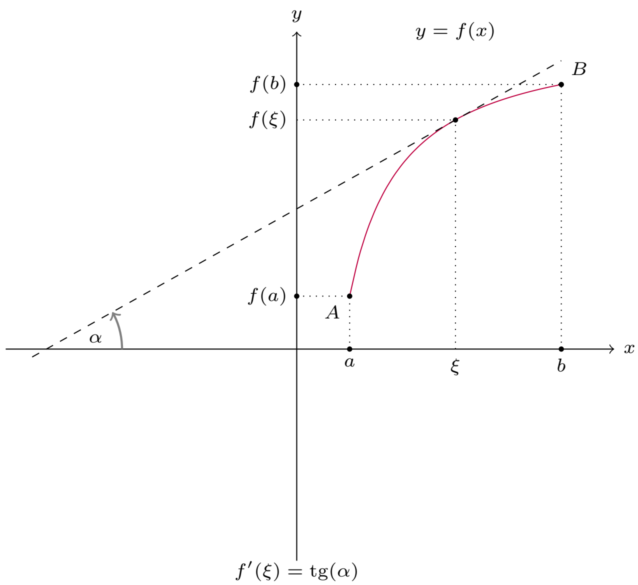
Na poniższym rysunku przypominamy geometryczną definicję tangensa, ponieważ definicja pochodnej korzysta z tej funkcji[3].



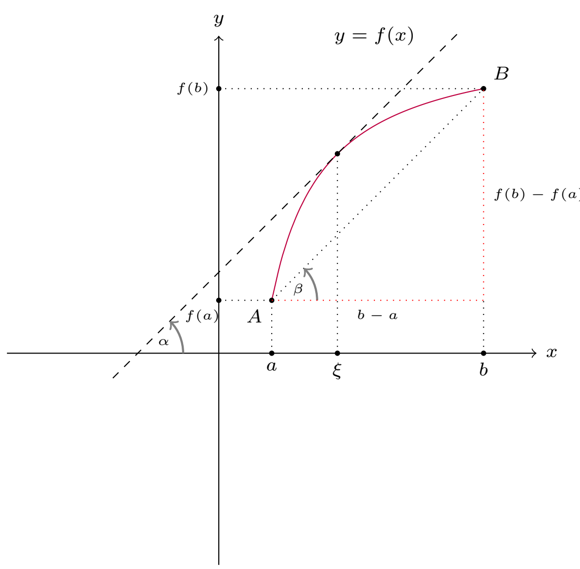
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

[3] Jak pamiętamy ze szkoły, tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym to stosunek długości przyprostokątnej, znajdującej się naprzeciw tego kąta, do drugiej przyprostokątnej.

Przypuśćmy, że f jest funkcją określoną w pewnym podzbiorze I zbioru liczb rzeczywistych. To znaczy, że dla każdego a w zbiorze I jest określona wartość $f(a)$, należąca do zbioru liczb rzeczywistych. Jeśli na dodatek chcemy mówić o ciągłości lub pochodnej funkcji f w punkcie ξ, to nie tylko ξ musi należeć do zbioru I, ale funkcja musi być określona w pewnym przedziale otwartym, którego środkiem jest punkt ξ. Wówczas pochodną funkcji f w punkcie ξ jest tangens kąta między osią Ox a styczną do wykresu funkcji w punkcie o współrzędnych $(\xi, f(\xi))$.



Jeżeli styczna w danym punkcie jest równoległa do odcinka AB, to kąt β na poniższym rysunku jest równy kątowi α.



Wynika stąd, że $f'(\xi) = \mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{tg}(\beta)$, a z definicji funkcji tangens mamy

$$f'(\xi) = \mathrm{tg}(\beta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

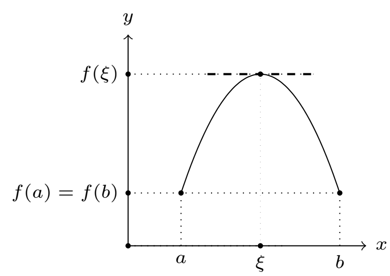
Teraz możemy już zacytować twierdzenie Lagrange'a w postaci, którą możemy znaleźć w większości podręczników.

Twierdzenie (Lagrange'a o wartości średniej). *Jeśli f jest funkcją ciągłą i różniczkowalną w przedziale domkniętym $[a, b]$, to istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Jak widać, matematyczny sposób wypowiedzenia tego twierdzenia odbiega od obserwacji poczynionej w trakcie pieszej wycieczki.

Lagrange sformułował powyższe twierdzenie w 1797 roku. Ponad 100 lat wcześniej, w roku 1691, Michel Rolle (1652-1719) odkrył szczególną postać tego twierdzenia dla funkcji wielomianowych. Rolle udowodnił, że jeśli $f(a) = f(b)$ dla funkcji wielomianowej f, to istnieje liczba ξ leżąca pomiędzy a i b taka, że styczna do wykresu funkcji wielomianowej w punkcie o współrzędnych $(\xi, f(\xi))$ jest pozioma, czyli punkt, w którym pochodna jest równa 0. Twierdzenie o wartości średniej w postaci, jaką znamy obecnie, sformułował i udowodnił Augustin Louis Cauchy (1789-1857) w roku 1823.



Twierdzenie Rolle'a – $f'(\xi) = 0$

Zaprezentujemy teraz kolejny przykład wycieczki, w trakcie której możemy zaobserwować twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a.

Zmęczeni długą, pieszą wędrówką postanowiliśmy wybrać się na weekend do pobliskiego kurortu, aby nieco odpocząć. Wyjechaliśmy w piątek po południu, a powrót zaplanowaliśmy na niedzielę po południu. Do kurortu odległego od naszego miasta o d kilometrów, można dojechać pociągiem. Podróż trwa m minut. W takim razie średnia prędkość pociągu na tej trasie wynosi $v_{\text{śr}} = \frac{d}{m}$ kilometrów na minutę. W trakcie podróży stwierdziliśmy, że pociąg nie porusza na całym odcinku z jednakową prędkością. Przyszło nam, więc do głowy naturalne pytanie, czy w pewnej chwili t_0, pociąg poruszał się z prędkością równą prędkości średniej?

Odpowiedź, że taki punkt istnieje, wydaje się oczywista, a formalnie można to uzasadnić wykorzystując twierdzenie Lagrange'a. Czas podróży liczymy od chwili początkowej $t = 0$ aż do końcowej $t = m$. Drogę, którą przejechał pociąg od początku podróży do pewnej chwili $t \in [0, m]$, oznaczamy przez $s(t)$, a prędkość pociągu w tej chwili przez $v(t)$. Jest jasne, że $s(0) = 0$ oraz $s(m) = d$. Wiadomo, że prędkość $v(t)$ w chwili t jest równa pochodnej funkcji $s(t)$, więc $v(t) = s'(t)$ [4]. Z twierdzenia Lagrange'a wynika, że istnieje punkt $t_0 \in (0, m)$ taki, że

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{s(m) - s(0)}{m - 0} = \frac{d}{m} = v_{\text{śr}},$$

[4] Uzasadnienie tej równości nie jest trudne, ale wymaga formalnej definicji pochodnej. Trzeba też podkreślić, że funkcja s jest zazwyczaj różniczkowalna.

a więc punkt w którym pociąg porusza się ze średnią prędkością. Jeżeli pociąg często zmienia prędkość, zwalnia i przyśpiesza, to takich punktów może być więcej.

Weekend minął i trzeba było wracać do domu. Okazało się, że pociąg powrotny odjeżdża o tej samej godzinie, a całą trasę przemierza w takim samym czasie m. Odległość w odwrotną stronę też wynosi d (co nie zawsze się zdarza w połączeniach kolejowych). Zastanowiło nas pytanie, czy istnieje chwila $t_0 \in [0, m]$, w której oba pociągi, w jedną i drugą stronę, poruszały się z tą samą prędkością?[5] Odpowiedź też jest pozytywna, choć tym razem już nie tak oczywista. Czas przejazdu w obu przypadkach liczymy od 0 do m. Oznaczmy przez $s_1(t)$ i $v_1(t)$ drogę i prędkość pociągu w dniu wyjazdu, a przez $s_2(t)$ i $v_2(t)$ drogę i prędkość pociągu powrotnego. Oczywiście

$$s_1(0) = s_2(0) = 0, \; s_1(m) = s_2(m) = d.$$

Zdefiniujmy funkcję $f(t) = s_2(t) - s_1(t)$. Wtedy $f(0) = f(c) = 0$. Korzystając ze wzoru na pochodną różnicy funkcji otrzymujemy

$$f'(t) = s_2'(t) - s_1'(t) = v_2(t) - v_1(t). \qquad \star$$

Ponieważ funkcja f spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, to znajdziemy punkt $t_0 \in (0, m)$ taki, że

$$f'(t_0) = 0.$$

Zatem z równości $\star$ wynika, że $v_1(t_0) = v_2(t_0)$, a to oznacza, że istnieje chwila, w której oba pociągi miały tę samą prędkość.

Ciekawostką jest też fakt, że istnieje chwila t_0, w której oba pociągi znajdą się w tym samym punkcie[6]. Taki punkt istnieje nawet, gdy średnie prędkości obu pociągów są różne. Rozwiązanie tej zagadki nie wymaga ani twierdzenia Rolle'a, ani Lagrange'a i pozostawiamy je Czytelnikom, a pod koniec tekstu je podajemy.

W następnym rozdziale pokazujemy, że z punktem o wartości średniej określonym przez twierdzenie Lagrange'a można się spotkać już w pracach starożytnych matematyków. Wyznaczenie położenia tego punktu na paraboli pozwoliło Archimedesowi wyprowadzić wzór na pole figury ograniczonej odcinkiem i łukiem paraboli.

3. Trójkąty wpisane w krzywe

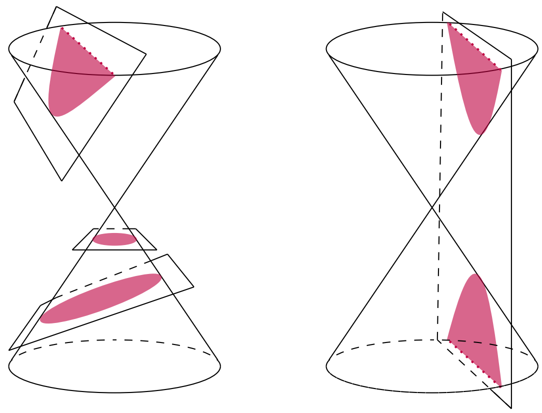
Menaichmos (Menaechmus), matematyk grecki żyjący w latach 380–320 p.n.e., jest uznawany za odkrywcę krzywych stożkowych, czyli takich krzywych, które powstają przez przecięcie nieskończonego stożka różnymi płaszczyznami[7]. Krzywymi stożkowymi są okręgi, elipsy, hiperbole, parabole, a także proste i punkty. Jednakże to nie Menaichmos, a Apoloniusz z Pergi (290–190 p.n.e.) nadał tym krzywym znane obecnie nazwy w swoim dziele *Stożkowe*[8]. W języku greckim dzieło to ma tytuł $K\omega\nu\iota\kappa\alpha$ (konika), co oznacza właśnie krzywą stożkową.

[5] Oczywiście chodzi tu o punkt, poza punktem początkowym i końcowym, w których prędkość jest zerowa.

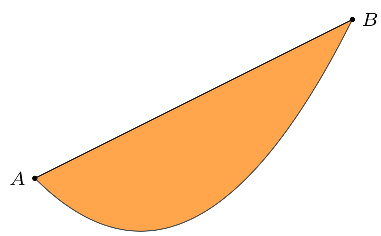
[6] Wyraźnie podkreślmy, że chodzi o miejsce na trasie, a nie o drogę jaką pokonały pociągi.

[7] Menaichmos odkrył te krzywe, próbując rozwiązać problem podwojenia sześcianu.
Rysunek przedstawiający krzywe stożkowe powstał na podstawie kodu dostępnego na stronie
`https://github.com/ridlo/tikz_by_example`.[Dostęp: 17.09.2021]

[8] Dzieło Apoloniusza składało się z ośmiu części. Części 1–4 przetrwały w oryginale do dzisiejszych czasów, części 5–7 znamy z przekładów arabskich. Część ósma zaginęła, ale została odtworzona, na podstawie różnych zapisków, przez astronoma Edmunda Halleya (1656–1742). Więcej o Apoloniuszu i stożkowych można przeczytać w pracy [1].



Archimedes (287–212 p.n.e.), jeden z największych uczonych wszech czasów, poświęcił parabolom pracę „Kwadratura paraboli”[9]. Najważniejszym wynikiem przedstawionym w tej pracy było wyznaczenie pola figury ograniczonej odcinkiem i łukiem paraboli.

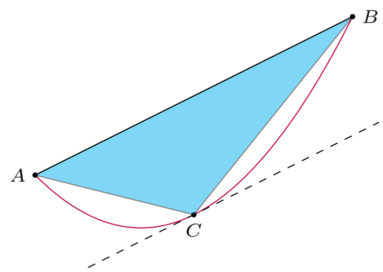


W czasach starożytnych wyprowadzano wzory na pola powierzchni wielu figur płaskich. Najpierw ustalono wzory na pola prostokątów i kwadratów, a następnie wyznaczono wzory na pole równoległoboku oraz innych wielokątów. Z równoległobokami poradzono sobie tak, że poprzez ich umiejętne rozcinanie, układano z otrzymanych kawałków prostokąt. Ponieważ trójkąt jest połową równoległoboku, potrafiono również podać wzór na jego pole. Pola innych wielokątów wyznaczano poprzez ich triangulację, to znaczy podzielenie tych figur na trójkąty. W ten sposób wyznaczono, między innymi, wzór na pole trapezu.

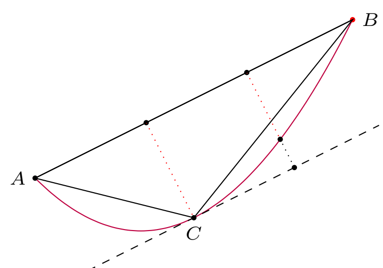
Jak nietrudno się domyślić, pola figur niebędących wielokątami okazały się problematyczne. I to właśnie Archimedes poradził sobie z wieloma takimi figurami. Jako pierwszy podał wzór na pole koła i, jak wspomnieliśmy wcześniej, wzór na pole figury ograniczonej odcinkiem i parabolą. Z tą ostatnia figurą postąpił podobnie jak z wielokątami. Pokrył ją, tym razem nieskończoną ilością trójkątów, i zauważył, że ich pola tworzą ciąg geometryczny. Potrafił obliczyć sumę nieskończonego szeregu geometrycznego i to pozwoliło mu otrzymać żądany wzór. W efekcie udowodnił, że pole tej figury jest równe $\frac{4}{3}$ pola największego trójkąta, o boku AB i wierzchołku położonym na łuku paraboli.

Przyjrzyjmy się dokładniej triangulacji Archimedesa. W tej metodzie kluczowe jest spostrzeżenie, że spośród wszystkich trójkątów o boku AB i wierzchołku położonym na paraboli, największe pole ma ten o wierzchołku położonym na stycznej równoległej do boku AB. Zatem wierzchołek największego trójkąta leży w punkcie, o którym mówi twierdzenie Lagrange'a.

[9] O burzliwej historii prac Archimedesa można przeczytać w artykule [3]. W tej pracy można znaleźć też opis wybranych osiągnięć tego uczonego.

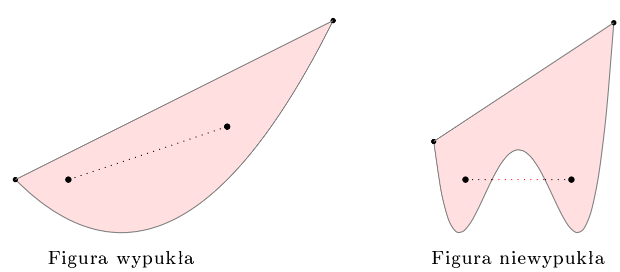


To jest dość oczywiste, bo wszystkie trójkąty, o których tu mowa, mają tę samą podstawę AB, więc największe pole ma trójkąt, który ma największą wysokość. Jeśli styczna w punkcie C jest równoległa do AB, to wysokość trójkąta ABC jest równa odległości stycznej od odcinka AB, a wysokość każdego innego trójkąta jest mniejsza, bo parabola przecina prostą prostopadłą do stycznej i do odcinka AB, a na takich prostych leżą wysokości wszystkich trójkątów, o których tu mowa.



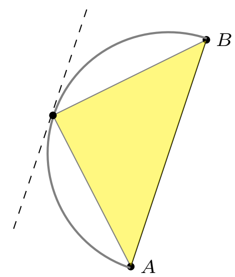
Co więcej, ten fakt jest prawdziwy dla każdej figury wypukłej ograniczonej odcinkiem i krzywą różniczkowalną.

Figurę nazywamy ***wypukłą****, jeśli dowolny odcinek łączący parę punktów leżących wewnątrz figury jest całkowicie zawarty w tej figurze.*



Otrzymujemy więc następujący wniosek z naszych rozważań.

Dana jest figura wypukła, ograniczona odcinkiem AB i pewną krzywą różniczkowalną. Wówczas spośród wszystkich trójkątów o boku AB i wierzchołku położonym na krzywej największą powierzchnię ma trójkąt o wierzchołku położonym na stycznej równoległej do boku AB.

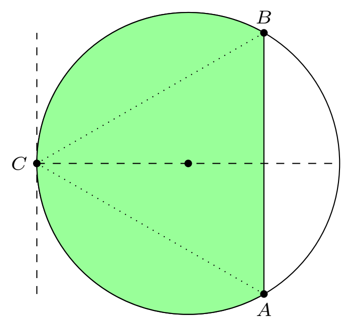


Czy to pozwala na obliczanie pól takich figur, podobnie jak to zrobił Archimedes dla paraboli? Niestety nie zawsze, bo ważne jest też miejsce położenia punktu C.

Jednym z wniosków płynących z powyższej własności jest następujący, zapewne wielu osobom znany, fakt:

Spośród trójkątów wpisanych w dany okrąg największą powierzchnię ma trójkąt równoboczny.

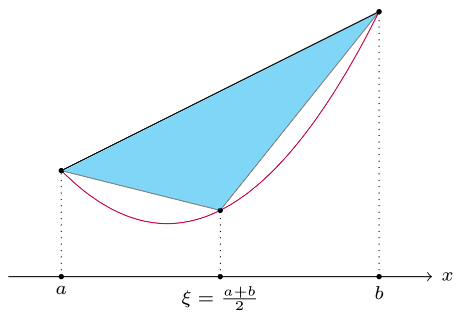
Jeżeli przetniemy okrąg dowolną cięciwą, to otrzymamy figurę wypukłą ograniczoną tą cięciwą i łukiem okręgu. Zgodnie w powyższą własnością, trójkąt (którego jednym bokiem jest ta cięciwa) o największym polu powierzchni ma wierzchołek położony na stycznej równoległej do cięciwy.



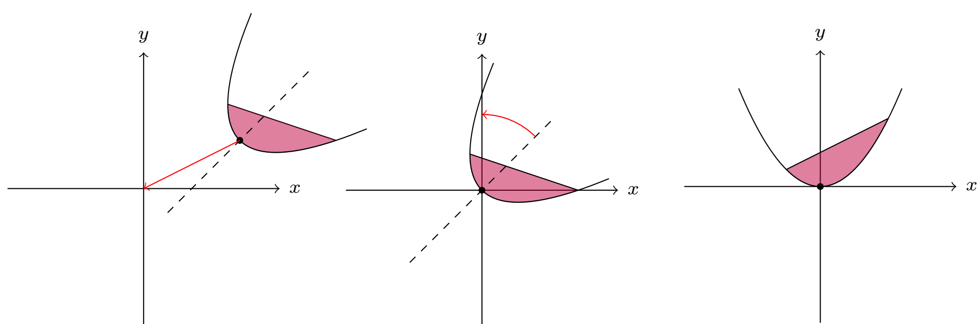
Ten trójkąt jest równoramienny, bo wierzchołek C leży na symetralnej odcinka AB, która zawiera średnicę okręgu. Zatem trójkąt o największej powierzchni musi być równoramienny. Gdyby taki trójkąt nie był równoboczny, to nie miałby największej powierzchni, gdyż większą miałby trójkąt równoramienny o podstawie AC. Pozostawiamy czytelnikom sprawdzenie, że wszystkie trójkąty równoboczne wpisane w okrąg są przystające, a więc mają takie samo pole.

Wracając do paraboli, zastanówmy się, gdzie jest położony punkt, w którym styczna do paraboli jest równoległa do odcinka AB. W dzisiejszej terminologii możemy opisać to następująco: jeżeli a, b, ξ są pierwszymi współrzędnymi końców odcinka[10] i punktu, w którym styczna jest do tego odcinka równoległa, to ξ jest środkiem przedziału $[a, b]$, więc $\xi = \frac{a+b}{2}$.

[10] W terminologii matematycznej, pierwszą współrzędną punktu (współrzędną x) na płaszczyźnie kartezjańskiej nazywamy *odciętą punktu*, a drugą (współrzędną y) *rzędną*. Nazwy te są polskimi tłumaczeniami łacińskich terminów *abscissa* i *ordinata*, które zostały wprowadzone przez Fibonacciego w 1220 roku, w jego dziele *De Practica Geometrie*.



W celu uzasadnienia powyższego faktu zauważmy najpierw, że można się ograniczyć do paraboli danej wzorem $y = px^2$. Na poniższym rysunku pokazano, że przesuwając i obracając dowolną parabolę, możemy otrzymać parabolę o równaniu $y = px^2$ (nie zmieniając przy tym pola kolorowej figury).

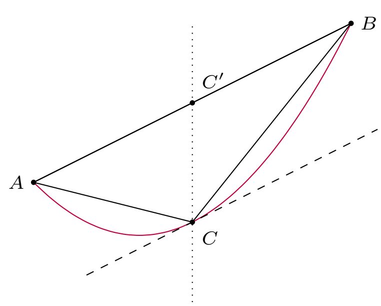


Teraz skorzystamy z faktu, że pochodna funkcji $y = px^2$ wynosi $y' = 2px$ i zastosujemy twierdzenie Lagrange'a:

$$2p\xi = f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = \frac{pb^2 - pa^2}{b - a} = p(a + b).$$

Stąd otrzymujemy $\xi = \frac{a+b}{2}$.

Jednakże starożytni, którzy nie znali pojęcia pochodnej, nie mogli przeprowadzić powyższego rozumowania. Wiedzieli natomiast, że parabola ma oś symetrii przechodzącą przez jej wierzchołek. Zauważyli, że jeśli poprowadzimy prostą równoległą do osi symetrii przechodzącą przez punkt C, to prosta ta przetnie odcinek AB w jego połowie, a to jest równoznaczne z tym, że ξ jest środkiem odcinka $[a, b]$.



$|AC'| = |C'B|$

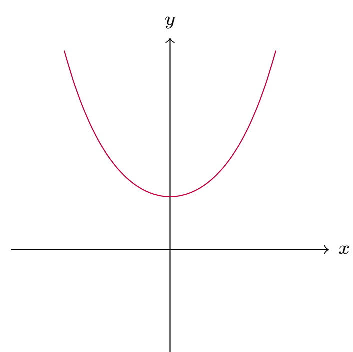
Archimedes w dowodzie zależności między polem trójkąta ABC oraz polem figury ograniczonej odcinkiem i parabolą wykorzystał ten fakt, ale nie podał jego uzasadnienia. Wprawdzie geometryczne uzasadnienie wykorzystuje podstawowe techniki geometryczne, takie jak równanie proporcji czy podobieństwo trójkątów, ale jest bardzo złożone. Wnikliwym czytelnikom proponujemy zajrzenie na stronę [2], na której można znaleźć pełny dowód. Ostrzegamy, że jego dokładna analiza wymaga od czytelnika sporej dozy cierpliwości[11].

Jak wiadomo, parabola jest istotną krzywą ze względu na jej liczne zastosowania praktyczne. Między innymi służy ona do opisu toru pocisku wystrzelonego pod danym kątem[12]. Istnieją krzywe, które do złudzenia przypominają parabole, ale nimi nie są — zobrazujemy ten fakt w następnym przykładzie, po czym przedstawimy formalną geometryczną definicję paraboli.

Wyobraźmy sobie, że końce łańcucha zawieszamy na równych wysokościach. Każdy, kto uważa że łańcuch układa się w parabolę, popełnia ten sam błąd, który popełnił Galileusz podczas analizy tego zagadnienia (oddając mu sprawiedliwość, należy podkreślić, że nie podał błędnego dowodu, a jedynie wysunął błędne przypuszczenie). Tak naprawdę jest to tak zwana krzywa łańcuchowa, którą można opisać wzorem

$$y = \frac{a^x + a^{-x}}{2},$$

gdzie a jest dodatnią liczbą rzeczywistą. O wyprowadzeniu wzoru na krzywą łańcuchową można przeczytać w pracy [4].



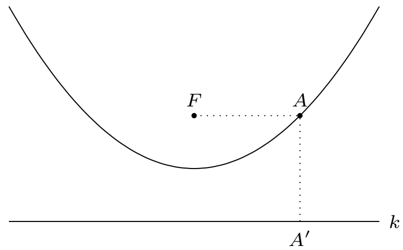
krzywa łańcuchowa $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Krzywe stożkowe, w tym parabole, mają definicje o naturze geometrycznej. Parabolę możemy zdefiniować w następujący sposób:

Parabola *jest zbiorem punktów równoodległych od danego punktu F (zwanego ogniskiem paraboli) i danej prostej k (zwanej kierownicą paraboli).*

[11] Czytelników, którzy chcieliby przeanalizować dowód twierdzenia Archimedesa o polu figury ograniczonej parabolą i odcinkiem, odsyłamy do prac [2], [3], [5].

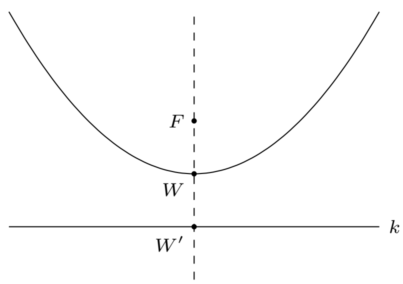
[12] O tej i innych własnościach paraboli oraz pozostałych krzywych stożkowych można przeczytać m.in. w [7].



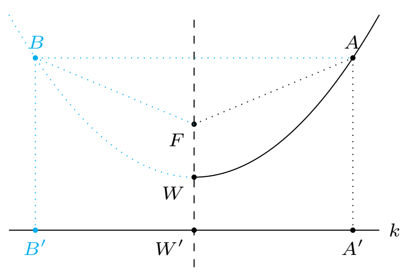
$|FA| = |AA'|$

Trudno jest odpowiedzieć na pytanie, czy w starożytności posługiwano się geometrycznymi definicjami krzywych, choć jest to bardzo prawdopodobne, gdyż używają one podstawowych jakości geometrycznych: punkt, prosta, odległość.

Prosta, która jest prostopadła do kierownicy i przechodzi przez ognisko przecina parabolę w punkcie W, który nazywamy wierzchołkiem paraboli.



Ponieważ wierzchołek W jest położony na paraboli, to $|FW| = |WW'|$. Ponadto prosta FW jest osią symetrii paraboli, co uzasadnia poniższy rysunek.



Czytelnikom zainteresowanym biografiami wszystkich bohaterów tego tekstu (a także wielu innych matematyków) polecamy stronę [6].

Podziękowania. Pragnę podziękować Recenzentowi za wnikliwe przeczytanie artykułu oraz za wartościowe uwagi, które pozwoliły ten tekst udoskonalić. Dziękuję również dr Ewie Łobos za bezcenne sugestie oraz podsunięcie pomysłu przykładu ze strony 133.

Rozwiązanie zagadki ze strony 134. Wyobraźmy sobie, że pociąg, którym jechaliśmy w piątek, wyjeżdża w dniu powrotu. Wtedy oba pociągi spotkają się w pewnej chwili t_0.

Literatura

1. S. Addington, D.Denis, *Apollonius and Conic Sections*, http://quadrivium.info/MathInt/Notes/Apollonius.pdf.[Dostęp: 17.09.2021]
2. Archimedes, *Quadrature of the Parabola: Introduction and Prop. 1-7*, tłum. na j. angielski H. Mendell, https://web.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/Archimedes/QuadraturaParabolae/QP.contents.html#Intro.[Dostęp: 17.09.2021]
3. Cz. Bagiński, *O Archimedesie i jego niektórych odkryciach*, MINUT 2021 (3), 74-86.
4. D. Pęcak, *Wyprowadzenie wzoru na krzywą łańcuchową*, https://www.almukantarat.pl/wiedza/09krzywa.pdf.[Dostęp: 17.09.2021]
5. *Archimedes' quadrature of the parabola and the method of exhaustion*, https://www.math.mcgill.ca/rags/JAC/NYB/exhaustion2.pdf.[Dostęp: 17.09.2021]
6. *MacTutor History of Mathematics*, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/.[Dostęp: 17.09.2021]
7. *The Beauty of Ellipses, Parabolas and Hyperbolas*, http://www.science4all.org/article/ellipses-parabolas-hyperbolas/.[Dostęp: 17.09.2021]