

Konrad PAPIERZ

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE, KATEDRA METROLOGII I ELEKTRONIKI
Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków

Zastosowanie zredukowanej metody Prony'ego do pomiaru mocy czynnej odbiorników nieliniowych

Mgr inż. Konrad PAPIERZ

Ukończył Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki na Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. Aktualnie jest doktorantem Katedry Metrologii i Elektroniki AGH. Zainteresowania naukowe dotyczą metrologii, cyfrowego przetwarzania sygnałów oraz konstruowania przyrządów pomiarowych opartych na mikrokontrolerach. Pracuje jako inżynier oprogramowania w Motorola Solutions.



e-mail: papierz@agh.edu.pl

Streszczenie

W artykule dokonano omówienia teoretycznych podstaw zredukowanej metody Prony'ego oraz analizy jej zastosowania do pomiarów mocy czynnej odbiorników nieliniowych – przykład stanowił model świetlówki kompaktowej. Przeprowadzono badania porównawcze przekształcenia Fouriera oraz zredukowanej metody Prony'ego. Na podstawie przeprowadzonych badań symulacyjnych przedstawione zostały zalety omawianej metody - w szczególności brak wpływu zjawiska przecieku widma na otrzymywane wyniki.

Słowa kluczowe: zredukowana metoda Prony'ego, moc czynna, wyższe harmoniczne, przeciek widma.

Application of the reduced Prony's method to active power measurements of nonlinear loads

Abstract

The paper contains discussion on the reduced Prony's method. This method was invented by a French mathematic, Gaspard Riche de Prony. Now it is widely used i.e. in digital signal processing. The Prony's method is based on the representation of a signal as a linear combination of exponential functions. In a reduced variant of the method, the frequency component vector is assumed to be known, which allows calculating the amplitude and phase of each harmonic [5]. A few simulations in Matlab-Simulink showing comparison between the Prony's method and the Fourier transformation were performed. At first the known test signal consisting of odd harmonics from the first to the seventh (Section 3) was used. Next, the simulation model of a compact fluorescent lamp was used as an example of a nonlinear load (Section 4). In this case, the active power of harmonics was measured. The simulations clearly show that in the case of spectral leakage the reduced Prony's method is much more better than the Fourier transformation – the errors of active power measurements are very small (Table 4).

Keywords: reduced Prony's method, active power, harmonics, spectrum leakage.

1. Wstęp

Autorem omawianej w artykule metody analizy sygnału jest francuski matematyk Gaspard Riche de Prony (1755-1839). Jednym z jego najważniejszych osiągnięć była metoda przekształcania sinusoidalnych sygnałów w liniowe układy równań. Na praktyczne zastosowanie technika ta musiała czekać dość długo – aż do wynalezienia komputerów. Obecnie jest ona szeroko stosowana m.in. w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów. Posiada szereg zalet, spośród których można wymienić przede wszystkim: precyzyjną estymację częstotliwości, krótsze okno czasowe w porównaniu do przekształcenia Fouriera oraz przede wszystkim brak wpływu efektu przecieku widma na otrzymywane wyniki. Metoda ma też pewne wady związane ze stabilnością rozwiązania numerycznego, czy złożonością obliczeniową, których wpływ można jednakże ograniczyć [7].

Metodę Prony'ego można stosować w kilku wersjach. W poniższym artykule autor chciałby omówić tzw. zredukowaną metodę Prony'ego i przedstawić jej przydatność do pomiarów mocy czynnej wyższych harmonicznych odbiorników nieliniowych - w szczególności gdy moc ta posiada niewielką wartość, rzędu kilku mW. Analiza przepływu mocy wyższych harmonicznych stanowi obecnie niezwykle istotne zagadnienie z uwagi na stale zwiększający się udział odbiorników nieliniowych (elektronika, oświetlenie) w systemie elektroenergetycznym.

2. Podstawy teoretyczne

W metodzie Prony'ego sygnał $x(t)$ reprezentowany jest jako suma eksponent [8]:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^p A_k e^{\beta_k t} \quad (1)$$

Natomiast w przypadku sygnału dyskretnego równanie (1) przyjmuje postać:

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^p a_k e^{((\alpha_k + j2\pi f_k)(n-1)T + j\theta_k)} \quad (2)$$

Wyznaczenie parametrów powyższej reprezentacji sygnału odbywa się poprzez minimalizację błędu średniokwadratowego. Jest to jednakże zadanie złożone, niedostępne na drodze analitycznej. W celu uproszczenia metody, tak by mogła ona zostać z powodzeniem zastosowana w praktyce, opracowane zostały modyfikacje oryginalnej metody Prony'ego – metoda Prony'ego najmniejszych kwadratów oraz zbliżona do niej, zredukowana metoda Prony'ego, będąca tematem niniejszego artykułu [5].

Równanie (2) można przedstawić również w postaci:

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} \quad (3)$$

gdzie:

$$h_k = A_k e^{j\theta_k} \quad (4)$$

$$z_k = e^{(\alpha_k + j2\pi f_k)T} \quad (5)$$

Współczynniki tłumienia α_k możemy zatem wyznaczyć jako:

$$\alpha_k = \frac{\ln|z_k|}{T} \quad (6)$$

W zredukowanej metodzie Prony'ego zakłada się, że wartości współczynników tłumienia są równe 0 dla wszystkich częstotliwości [5], tak więc:

$$|z_k| = 1 \quad (7)$$

$$(\operatorname{Re}\{z_k\})^2 + (\operatorname{Im}\{z_k\})^2 = 1 \quad (8)$$

W metodzie Prony'ego składniki częstotliwościowe f_k dane są zależnością [5]:

$$f_k = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}\{z_k\}}{\operatorname{Re}\{z_k\}}\right)}{2\pi T} \quad (9)$$

które to równanie można przekształcić do postaci:

$$\text{Im}\{z_k\} = \text{Re}\{z_k\} \tan(2\pi T f_k) \quad (10)$$

Podstawiając (10) do (8) otrzymamy zależności na część rzeczywistą oraz urojoną wektora zespolonego z_k :

$$\text{Re}\{z_k\} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan(2\pi T f_k))^2}} \quad (11)$$

$$\text{Im}\{z_k\} = \frac{\tan(2\pi T f_k)}{\sqrt{1 + (\tan(2\pi T f_k))^2}} \quad (12)$$

$$z = \begin{bmatrix} \text{Re}\{z_1\} + \text{Im}\{z_1\} \cdot i \\ \text{Re}\{z_2\} + \text{Im}\{z_2\} \cdot i \\ \vdots \\ \text{Re}\{z_K\} + \text{Im}\{z_K\} \cdot i \end{bmatrix} \quad (13)$$

Drugim założeniem, które przyjmuje się w zredukowanej metodzie Prony'ego jest znajomość składników częstotliwościowych f_k obecnych w analizowanym sygnale [5]. Pozwala to w znaczącym stopniu uprościć obliczenia. Podstawiając znane wartości f_k do równań (11)-(13), otrzymujemy bezpośrednio wektor z . Wektor komponentów częstotliwościowych musi zawierać częstotliwości ujemne, będące lustrzanym – względem zera – odbiciem analizowanych częstotliwości. Inną metodą jest uzupełnienie otrzymanego wektora z o wektor sprzężony [5]:

$$z := \begin{bmatrix} z \\ \text{conj}(z) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Dalsze obliczenia są podobne, jak w przypadku metody Prony'ego najmniejszych kwadratów. Najpierw na podstawie wektora z wyznaczana jest macierz Vandermonde'a:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Następnie, minimalizując błąd kwadratowy:

$$C = (V^T \cdot V)^{-1} \cdot V^T \quad (16)$$

otrzymuje się wektor h :

$$h = C \cdot x \quad (17)$$

z którego wyznacza się amplitudę i fazę składników częstotliwościowych analizowanego sygnału [5]:

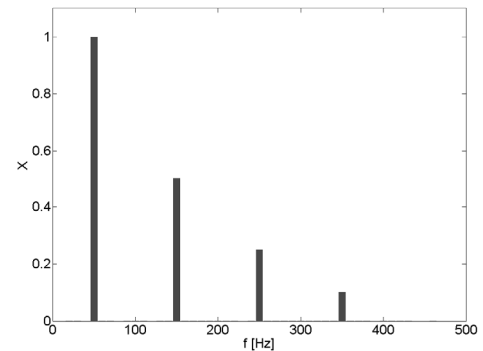
$$a_k = |h_k| \quad (18)$$

$$\theta_k = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}\{h_k\}}{\text{Re}\{h_k\}} \right) \quad (19)$$

3. Porównanie metody Prony'ego i FFT

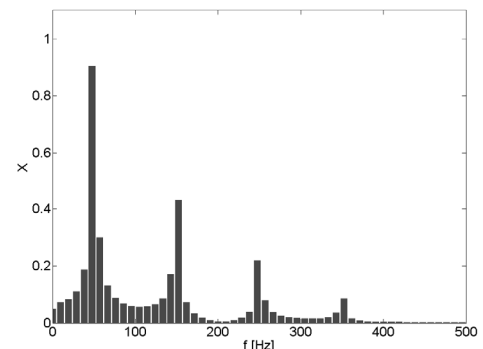
Do porównania zredukowanej metody Prony'ego oraz transformacji Fouriera posłuży symulacja przeprowadzona w programie Matlab. Polega ona na wyznaczeniu przy pomocy obu metod wartości skutecznych oraz faz sygnału testowego. Sygnał $x(t)$ będzie składał się z czterech harmonicznymi o następujących wartościach skutecznych oraz fazach: $h_1 = 1$, $\theta_1 = 0^\circ$, $h_3 = 0.5$, $\theta_3 = 25^\circ$, $h_5 = 0.25$, $\theta_5 = 50^\circ$, $h_7 = 0.1$, $\theta_7 = 75^\circ$. Sygnał próbkowany jest z częstotliwością 10 kHz.

W pierwszej z przeprowadzonych symulacji okno czasowe posiada długość 0.1 s. Jest to więc całkowita wielokrotność okresów wszystkich harmonicznymi wchodzących w skład sygnału $x(t)$ - zatem zjawisko przecieku widma nie wystąpi. Wyznaczone wartości skuteczne oraz fazy są praktycznie identyczne jak wartości zadane. Błędy estymacji są rzędu 10^{-11} .



Rys. 1. Widmo sygnału $x(t)$, długość okna 0,1 s
Fig. 1. Spectrum of signal $x(t)$, the window length 0,1 s

Inaczej będzie się przedstawiała sytuacja, gdy długość okna czasowego wynosi 0.105 s. W tym przypadku nastąpi przeciek widma (rysunek 2). Tabela 1 zawiera wyznaczone wartości skuteczne i fazy harmonicznymi, wraz z podanymi w procentach wartościami błędów. Jak widać w przypadku przecieku widma wyniki uzyskane przy pomocy transformacji Fouriera są obarczone bardzo dużym błędem. Inaczej jest dla zredukowanej metody Prony'ego – błąd jest pomijalny, rzędu 10^{-11} .



Rys. 2. Widmo sygnału $x(t)$, długość okna 0,105 s
Fig. 2. Spectrum of signal $x(t)$, the window length 0,105 s

Tab. 1. Wyznaczone wartości skuteczne i fazy harmonicznymi – przeciek widma
Tab. 1. The obtained RMS values and phases of harmonics – the spectrum leakage

		Przekształcenie Fouriera		Metoda Prony'ego	
		Amplituda	Faza	Amplituda	Faza
Harmoniczna 1	Wynik estymacji	0,903	47,02	1,000	0,00
	Błąd [%]	-9,62	4,7e3	0,38e-11	-0,19e-10
Harmoniczna 3	Wynik estymacji	0,431	-20,93	0,500	25,00
	Błąd [%]	-13,68	-183,7	0,22e-11	-0,28e-12
Harmoniczna 5	Wynik estymacji	0,219	95,47	0,250	50,00
	Błąd [%]	-12,21	90,9	-0,23e-11	-0,14e-11
Harmoniczna 7	Wynik estymacji	0,086	26,29	0,100	75,00
	Błąd [%]	-14,15	-65,0	-0,19e-11	-0,24e-11

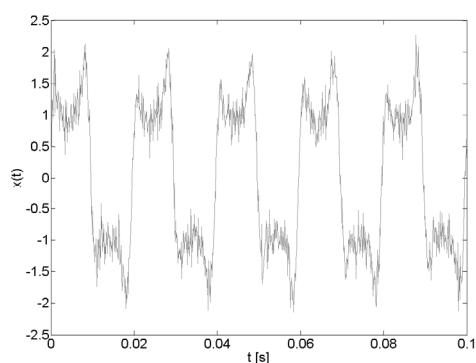
Dla kolejnej symulacji długość okna czasowego ponownie wynosi 0.1 s. Zmianie ulega natomiast częstotliwość trzeciej harmo-

nicznej – ze 150 Hz na 152 Hz. Mamy wtedy do czynienia z interharmoniczną. Zmiana ta uwidacznia się oczywiście w widmie wyznaczonym widmie sygnału. Tabela 2 zawiera estymowane wartości skuteczne oraz fazy. Wprowadzenie interharmonicznej wpłynęło na zwiększenie błędów. Największy błąd jest dla trzeciej harmonicznej (interharmonicznej), jednak błędy estymacji pozostałych harmonicznych są również znacznie większe, w porównaniu do pierwszej symulacji. Warto zauważyć, że wyniki obu metod są praktycznie takie same. Jednak, jeżeli stosując zredukowaną metodę Prony’ego w wektorze składowych częstotliwościowych f_k uwzględnimy zmianę częstotliwości, to błędy dla tej metody ponownie stają się pomijalne i to dla wszystkich harmonicznych.

Tab. 2. Wyznaczone wartości skuteczne i fazy harmonicznych – zmiana częstotliwości 3 harm - wprowadzona interharmoniczna

Tab. 2. The obtained RMS values and phases of harmonics - changed of the 3rd harmonic frequency - interharmonic added

		Przekształcenie Fouriera		Metoda Prony’ego	
		Amplituda	Faza	Amplituda	Faza
Harmoniczna 1	Wynik estymacji	1,0023	0,67	1,0023	0,67
	Błąd [%]	0,22	67,33	0,22	67,33
Harmoniczna 3 (interharmoniczna)	Wynik estymacji	0,4691	61,30	0,4691	61,30
	Błąd [%]	-6,17	145,21	-6,17	145,21
Harmoniczna 5	Wynik estymacji	0,2412	50,03	0,2412	50,03
	Błąd [%]	-3,50	0,07	-3,50	0,07
Harmoniczna 7	Wynik estymacji	0,0965	76,39	0,0965	76,39
	Błąd [%]	-3,49	1,86	-3,49	1,86



Rys. 3. Sygnał $x(t)$ z dodanym szumem

Fig. 3. Signal $x(t)$ with the noise added

Tab. 3. Wyznaczone wartości skuteczne i fazy harmonicznych – dodany szum

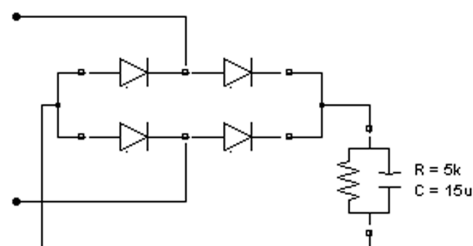
Tab. 3. The obtained RMS values and phases of harmonics – the noise added

		Przekształcenie Fouriera		Metoda Prony’ego	
		Amplituda	Faza	Amplituda	Faza
Harmoniczna 1	Wynik estymacji	0,9965	0,73	0,9965	0,73
	Błąd [%]	-0,35	73,65	-0,35	73,65
Harmoniczna 3	Wynik estymacji	0,5102	24,89	0,5102	24,89
	Błąd [%]	2,04	-0,44	2,04	-0,44
Harmoniczna 5	Wynik estymacji	0,2538	50,84	0,2538	50,84
	Błąd [%]	1,53	1,67	1,53	1,67
Harmoniczna 7	Wynik estymacji	0,0986	76,79	0,0986	76,79
	Błąd [%]	-1,35	2,38	-1,35	2,38

Ostatnia symulacja ma za zadanie sprawdzić jak na uzyskiwane wyniki wpłynie dodanie do sygnału testowego $x(t)$ szumu o rozkładzie normalnym. Jak widać (tabela 3) uzyskane rezultaty, mimo dość znacznego udziału szumu w sygnale, nie są obciążone dużym błędem. Wyniki są jednakowe dla obu metod.

4. Pomiar mocy czynnej – badania symulacyjne

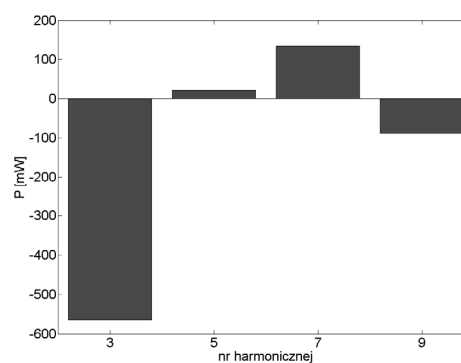
Celem kolejnych badań symulacyjnych była analiza przydatności metody Prony’ego do pomiaru mocy czynnej, w szczególności, gdy moc ta przyjmuje niewielkie wartości. Obiekt badań stanowił model świetłówki kompaktowej opracowany w środowisku Matlab – Simulink z wykorzystaniem toolbox’u SimPowerSystems.



Rys. 4. Schemat modelu świetłówki kompaktowej

Fig. 4. Scheme of the compact fluorescent lamp model

Model ten bardzo dobrze oddaje właściwości rzeczywistej świetłówki. Przy zasilaniu czysto sinusoidalnym 230 V pobiera moc czynną pierwszej harmonicznej 19,08 W, natomiast oddaje z powrotem do sieci zasilającej (ujemny znak mocy) moce czynne wyższych harmonicznych. Moc czynna wyższych harmonicznych jest rzędu kilku mW (np. dla trzeciej harmonicznej 6,7 mW) i maleje wraz ze wzrostem numeru harmonicznej. Jeżeli w zasilaniu obecne są wyższe harmoniczne napięcia następują wzajemne interakcje harmonicznych zasilania oraz generowanych przez świetłówkę. W konsekwencji świetłówka kompaktowa, w zależności od warunków zasilania, może być zarówno odbiornikiem, jak i źródłem mocy czynnej wyższych harmonicznych [3] (rysunek 5).



Rys. 5. Moc czynna wyższych harmonicznych

Fig. 5. Active power of higher harmonics

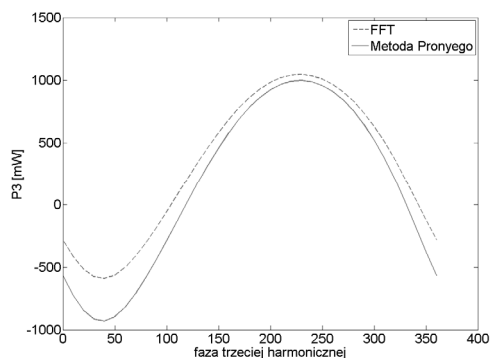
W pierwszej z przeprowadzonych symulacji model świetłówki kompaktowej został zasilony napięciem złożonym z pierwszej harmonicznej o wartości skutecznej 230 V oraz trzeciej i piątej harmonicznej, których wartości skuteczne wynosiły odpowiednio 5% i 3% pierwszej harmonicznej. Fazy wszystkich harmonicznych były równe 0. Częstotliwość próbkowania została ustalona na 50 kHz, a długość okna czasowego na 0.2 s. Moc czynną pierwszej oraz wyższych harmonicznych wyznaczono przy wykorzystaniu przekształcenia Fouriera oraz metody Prony’ego. W pierwszej symulacji wyniki otrzymane obiema tymi metodami są praktycznie identyczne – różnica jest rzędu 10^{-13} W.

Podczas kolejnej symulacji długość okna czasowego została zmieniona na 0.205 s. Tym razem na skutek przecieku widma otrzymane wartości mocy czynnej nie są już identyczne. Jeżeli moce czynne otrzymane w poprzedniej symulacji przyjąć jako odniesienie, to błędy pomiaru przy zmienionej długości okna czasowego będą przedstawiały się następująco:

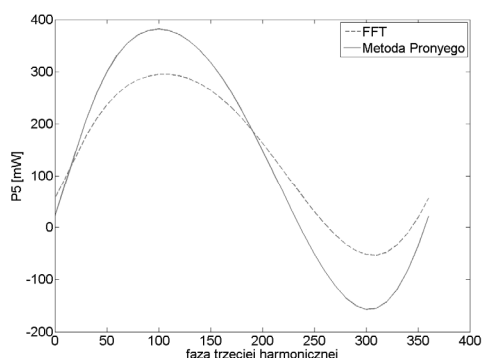
Tab. 4. Błędy pomiaru mocy czynnej - przeciek widma
Tab. 4. Errors of active power measurement – the spectrum leakage

	Przekształcenie Fouriera	Metoda Prony'ego
	Błąd [%]	Błąd [%]
Harmoniczna 1	-17,35	-0,06
Harmoniczna 3	-50,09	0,35
Harmoniczna 5	162,24	-0,89
Harmoniczna 7	-2,06	0,82
Harmoniczna 9	-48,08	-1,77

Jak widać, w tym przypadku wyniki otrzymane metodą Prony'ego są obciążone zdecydowanie mniejszym błędem. Podobne rezultaty otrzymamy jeżeli moc czynna będzie mierzona przy zmieniających się warunkach zasilania. W przeprowadzonej symulacji zmianie podlegała faza trzeciej harmonicznej napięcia zasilania. Otrzymane wyniki są przedstawione na rysunkach 6 i 7. Wartości mocy otrzymane przy oknie czasowym o długości 0.2 pokryły by się na wykresach z wynikami otrzymanymi metodą Prony'ego.



Rys. 6. Moc czynna trzeciej harmonicznej w obecności przecieku widma
Fig. 6. Active power of the third harmonic in case of the spectrum leakage



Rys. 7. Moc czynna piątej harmonicznej w obecności przecieku widma
Fig. 7. Active power of the fifth harmonic in case of the spectrum leakage

W ostatniej z przeprowadzonych symulacji okno czasowe ponownie miało długość 0.2 s, natomiast do sygnałów napięcia i prądu został dodany szum normalny. Błędy otrzymanych wartości mocy, odniesione do rezultatów z pierwszej symulacji przed-

stawione są w tabeli 5. Jak widać w tym przypadku błąd jest taki sam dla obu metod, a jego wartość jest niewielka.

Tab. 5. Błędy pomiaru mocy czynnej - przeciek widma
Tab. 5. Errors of active power measurement – the noise added

	Przekształcenie Fouriera	Metoda Prony'ego
	Błąd [%]	Błąd [%]
Harmoniczna 1	-0.43	-0.43
Harmoniczna 3	1.16	1.16
Harmoniczna 5	-3.99	-3.99
Harmoniczna 7	3.51	3.51
Harmoniczna 9	-6.36	-6.36

5. Podsumowanie

W artykule dokonano omówienia teoretycznych podstaw zredukowanej metody Prony'ego oraz analizy jej zastosowania do pomiarów mocy czynnej odbiorników nieliniowych – przykład stanowił model świetlówki kompaktowej. Na podstawie przeprowadzonych badań symulacyjnych można stwierdzić, że zredukowana metoda Prony'ego jest praktycznie niewrażliwa na obecność przecieku widma, w przeciwieństwie do przekształcenia Fouriera. Obecność w sygnale szumu o rozkładzie normalnym, również nie wpływa w znaczący sposób na pogorszenie jej własności. Metoda Prony'ego pozwala również na estymację faz poszczególnych harmonicznych, dzięki czemu można ją z powodzeniem zastosować do pomiaru mocy czynnej, co zostało przedstawione w artykule. Dalsze badania będą zmierzały do poszukiwania sposobów udoskonalenia metody Prony'ego, dzięki czemu będzie możliwe poszerzenie spektrum jej zastosowań.

6. Literatura

- [1] Liu Y., Ma C., Yang H., Liu H, A New Harmonic and Inter-harmonic Parameter Estimation Method, IEEE Power Engineering and Automation Conference (PEAM), 2011.
- [2] Łobos T., Leonowicz Z., Rezmer J., Schegner P., High-Resolution Spectrum-Estimation Methods for Signal Analysis in Power Systems, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 55, No. 1, February 2006.
- [3] Papierz K., Pomiar mocy czynnej generowanej przez nieliniowy odbiornik, na przykładzie żarówki energooszczędnej, Przegląd Elektrotechniczny, R. 86 nr 9, 2010.
- [4] Reza S., Ciobotaru M., Agelidis V. G., Power Quality Analysis Using Piecewise Adaptive Prony's Method, IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT), 2012.
- [5] Zygarlicki J., Zygarlicka M., Mroczka J., Latawiec K. J., A reduced Prony's method in power-quality analysis - parameters selection, IEEE Transactions on power delivery, vol. 25, no. April 2010.
- [6] Zygarlicki J., Reduced Prony method – advanced properties, Przegląd Elektrotechniczny, r. 88, nr 10a/2012.
- [7] Zygarlicki J. Analiza i kompresja danych pomiarowych sygnału z sieci elektroenergetycznej dla potrzeb badania jakości energii, rozprawa doktorska Politechnika Opolska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Opole, 2007.
- [8] Zygarlicki J., Mroczka J., Prony's method used for testing harmonics and interharmonics in electrical power systems, Metrology and measurements systems, Vol. XIX, No. 4, 2012.

otrzymano / received: 29.01.2013

przyjęto do druku / accepted: 03.06.2013

artykuł recenzowany / revised paper