

Algorytmy i pomiary odchyłek równoległości i prostopadłości płaszczyzn i prostych w przestrzeni R3 na współrzędnościowej maszynie pomiarowej

RYSZARD FILIPOWSKI, ZBIGNIEW LECHNIAK, JÓZEF ZAWORA*

Przedstawiono algorytmy obliczania odchyłek w mm/m równoległości i prostopadłości płaszczyzn i prostych na współrzędnościowej maszynie pomiarowej (WMP). Obliczane odchyłki muszą mieścić się w polu tolerancji równoległości lub prostopadłości zadawanych przez konstruktora na powierzchniach części maszyn. Tolerancje równoległości i prostopadłości oznaczone są na rysunkach w ramce prostokątnej i zawierają symbol równoległości lub prostopadłości oraz graniczną wartość odchyłki w mm względem jednej bazy lub dwóch baz. W artykule zamieszczono wartości odchyłek równoległości i prostopadłości płaszczyzn i prostych w mm/m mierzonych na maszynie współrzędnościowej WMP sztywną głowicą pomiarową.

Wstęp

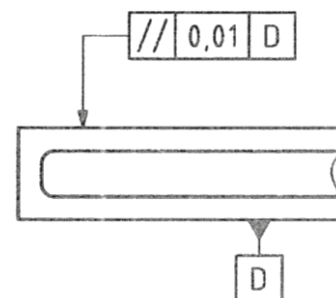
Pomiary geometrycznych cech konstrukcyjnych obrobionych elementów wszelkiego rodzaju maszyn stanowią integralną część procesu wytwórczego. W ich wyniku można stwierdzić czy dany element został wykonany poprawnie. Z tego powodu na etapie konstruowania należy określić dopuszczalne odchyłki poszczególnych wymiarów, a w procesie wytwórczym sprawdzić czy odchyłki rzeczywiste (zmierzone) zgodne są z dopuszczalnymi – założonymi przez konstruktora. W celu uzyskania wiarygodnych i dokładnych pomiarów wykorzystuje się do tego celu maszyny pomiarowe, bardzo często wspomaganie komputerowo.

W artykule przedstawiono algorytmy i pomiary odchyłek równoległości, prostopadłości płaszczyzn i prostych (odchyłki kierunku) realizowane na współrzędnościowej maszynie pomiarowej. Ze względu na to, że odchyłki te są obliczane przez programy pomiarowe w mm/m, dlatego uzyskane z maszyny współrzędnościowej wartości odchyłek należy skorygować proporcjonalnie do długości płaszczyzn lub prostych

mierzonych elementów maszyn. Obliczone odchyłki należy odnieść do podanych w ramach (rys. 1÷6) wartości tolerancji i ocenić poprawność wykonania części.

Oznaczenie odchyłek kształtu i położenia

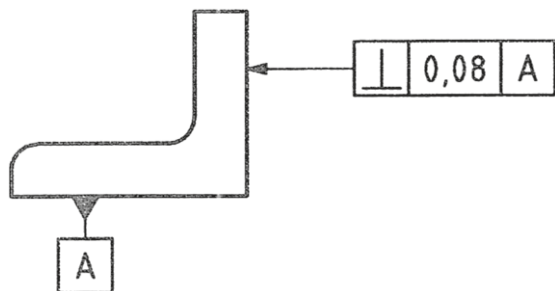
Oznaczenie odchyłek na rysunkach konstrukcyjnych ze względów oczywistych jest znormalizowane [5]. Na rys. 1 przedstawiono przykład oznaczenia tolerancji równoległości dwóch płaszczyzn. Płaszczyzna mierzona powinna zawierać się między dwiema płaszczyznami, odległymi od siebie o 0,01 mm, które są równoległe do płaszczyzny bazowej D.



Rys. 1. Oznaczenie tolerancji równoległości płaszczyzny do płaszczyzny bazowej D

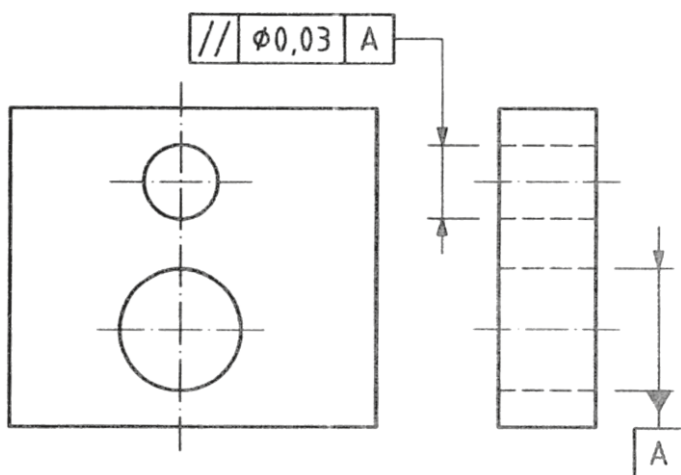
* Dr inż. R. Filipowski, mgr inż. Z. Lechniak, dr inż. hab. J. Zawora, Instytut Techniki Wytwarzania, Wydział Inżynierii Produkcji, Politechnika Warszawska.

Na rys. 2 przedstawiono przykład oznaczenia tolerancji prostokątności dwóch płaszczyzn. Odchyłka prostokątności pionowej względem płaszczyzny bazowej A powinna być nie większa od 0,08 mm.



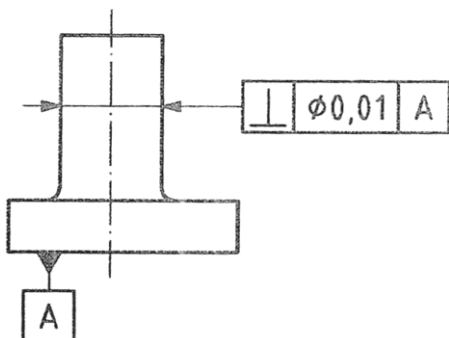
Rys. 2. Oznaczenie tolerancji prostokątności płaszczyzny względem płaszczyzny bazowej A

Na rys. 3 przedstawiono przykład oznaczenia tolerancji równoległości pomiędzy osią otworu i osią bazowego walca A. Odchyłka powinna zawierać się wewnątrz pola walcowego o średnicy 0,03 mm, równoległego do osi otworu A.



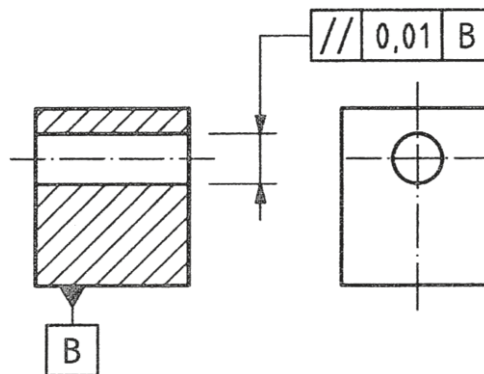
Rys. 3. Oznaczenie tolerancji równoległości osi otworu walcowego względem osi otworu bazowego A

Na rys. 4 przedstawiono przykład oznaczenia tolerancji prostokątności osi walca względem płaszczyzny bazowej A. Linia środkowa walca powinna zawierać się wewnątrz pola walcowego o średnicy 0,01 mm, prostokątne do płaszczyzny bazowej A.



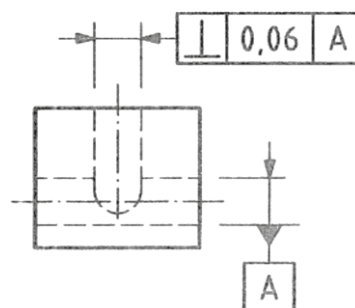
Rys. 4. Oznaczenie tolerancji prostokątności osi walca do płaszczyzny bazowej A

Na rys. 5 przedstawiono przykład oznaczenia tolerancji równoległości pomiędzy osią otworu i płaszczyzną bazową B. Oś otworu powinna zawierać się między dwiema płaszczyznami równoległymi, odległymi od siebie o 0,01 mm, które są równoległe do płaszczyzny bazowej B.



Rys. 5. Oznaczenie tolerancji równoległości osi walca względem płaszczyzny bazowej B

Na rys. 6 przedstawiono przykład oznaczenia tolerancji prostokątności osi otworu do osi bazowej. Oś otworu powinna zawierać się między dwiema płaszczyznami równoległymi, odległymi od siebie o 0,06 mm, które są prostokątne do osi bazowej A.



Rys. 6. Przykład oznaczenia tolerancji prostokątności osi otworu do osi otworu bazowego A

Algorytmy obliczania odchyłek [4]

Do obliczenia odchyłek równoległości i prostokątności płaszczyzn i prostych względem elementów bazowych wykorzystuje się w oprogramowaniu pomiarowym WMP podprogramy definiowania w przestrzeni R3: płaszczyzny, prostej, kąta między wektorami normalnymi płaszczyzn, kąta między wektorami kierunkowymi prostych oraz okręgu w przestrzeni R2. Elementy geometryczne części są definiowane w oprogramowaniu przez punkty pomiarowe, których ilość minimalną, techniczną oraz podczas skanowania głowicą pomiarową podano w Tabelicy 1 [6]. Przy definiowaniu elementów geometrycznych części maszyn przez minimalną liczbę punktów odległość między punktami powinna być możliwie duża.

Tablica 1. Liczby punktów na geometrycznych elementach bazowych

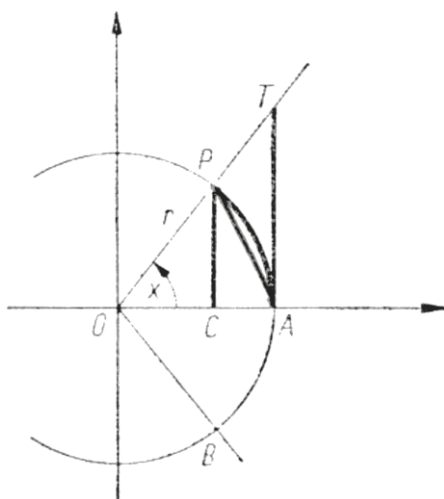
Geometryczny element bazowy	Matematyczna liczba punktów	Techniczno-pomiarowa liczba punktów	Skanowanie głowicą Liczba punktów maksimum
Prosta	2	2	675
Płaszczyzna	3	4	675
Okrąg	3	4	675
Sfera	4	4	675
Walec	(3+2) (2 plasz)	(3+3) (2 plasz)	(675+675) (2 plasz)
Stożek	(3+3) (2 plasz)	(6+6) (2 plasz)	(675+675) (2 plasz)

Obliczanie odchyłek równoległości i prostopadłości w programie pomiarowym WMP

W algorytmie do obliczania odchyłek równoległości oraz prostopadłości płaszczyzn i prostych wykorzystuje się rachunek wektorowy oraz związek zachodzący między kątem w radianach i funkcjami trygonometrycznymi:

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x \tag{1}$$

Nierówność (1) wynika z relacji między polami trójkątów ΔOAP , ΔOAT oraz wycinka kołowego OAP dla małych kątów x (rys. 7) [3].



Rys. 7. Związki pomiędzy polami $\Delta OAP < \text{wyc } OAP < \Delta OAT$

Z zależności (1) wynika, że wystarczającą dokładność obliczenia odchyłki kierunku [2] uzyskamy, zastępując ją obliczeniem funkcji trygonometrycznej $\operatorname{tg} x$. W tym celu, należy wyznaczyć wektory normalne do płaszczyzn, wektory kierunkowe prostych i wykorzystać wzory rachunku wektorowego na iloczyny skalarne do obliczania $\cos x$ między wektorami.

Z tożsamości trygonometrycznej program pomiarowy oblicza wartość $\sin x$ a następnie z ilorazu funkcji trygonometrycznych wartość $\operatorname{tg} x$, którą traktuje się jako odchyłkę x .

W przypadku elementów prostopadłych, kąt x obliczony z iloczynu skalarnego wektorów należy zmodyfikować, tzn. obliczyć moduł różnicy kątów $|x - \pi/2|$, a następnie $\cos|x - \pi/2|$. Z tożsamości trygonometrycznej oblicza się wartość $\sin|x - \pi/2|$, a z ich ilorazu wartość liczbową $\operatorname{tg}|x - \pi/2|$, która jest szukaną odchyłką prostopadłości x między wektorami normalnymi.

Wartość odchyłki mnożona jest w programie pomiarowym [4] przez 1000, co oznacza, że wartość odchyłki wyprowadzona z maszyny wyraża się w milimetrach na metr bieżący (mm/m). Uzyskaną wartość odchyłki ($x \cdot 1000$ lub $|x - \pi/2| \cdot 1000$) należy skorygować tzn. odchyłkę należy pomnożyć przez współczynnik będący ilorazem długości pomiarowej w mm odniesionej do długości 1 m, a następnie ustalić poprawność wykonania według warunków technicznych podanych na rysunku wykonawczym części [5], np. rys. 1.

Algorytmy płaszczyzny w przestrzeni R3 w programie pomiarowym WMP

Płaszczyznę w przestrzeni R3 opisuje równanie:

$$B_1 \cdot x + B_2 \cdot y + B_3 \cdot z + B_4 = 0 \tag{2}$$

Stałe w równaniu płaszczyzny (B_1, B_2, B_3, B_4) ustala się przez pomiar minimum trzech niewspółliniowych punktów $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ z wyznacznika [1]:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

W pomiarze przy większej liczbie punktów do definiowania płaszczyzny stosuje się regresję ortogonalną [6]. Płaszczyzna w regresji ortogonalnej w przestrzeni R3 jest definiowana przez odchyłki punktów pomiarowych $P_i(x_i, y_i, z_i), i=1,2,\dots,n$, od płaszczyzny przechodzącej przez środek ciężkości punktów pomiarowych $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ w kierunku do niej prostopadłym.

Równanie to ma formę:

$$B_1 \cdot x + B_2 \cdot y + B_3 \cdot z = 0, \tag{4}$$



Stałe (B_1, B_2, B_3) w równaniu płaszczyzny (4) oblicza się z funkcji Lagrange'a z warunkiem ubocznym:

$$F(B_1, B_2, B_3, \lambda) = \sum_{i=1}^n (B_1 \cdot x_i + B_2 \cdot y_i + B_3 \cdot z_i) - \lambda(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 - 1) \Rightarrow \min \quad (5)$$

Z warunku koniecznego na istnienie ekstremum funkcji Lagrange'a z warunkiem ubocznym, tj. zerowania się jej pochodnych cząstkowych względem zmiennych B_1, B_2, B_3, λ , uzyskuje się układ równań jednorodnych:

$$\left. \begin{aligned} B_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \lambda \right) + B_2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + B_3 \sum_{i=1}^n x_i z_i &= 0 \\ B_1 \sum_{i=1}^n x_i y_i + B_2 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \lambda \right) + B_3 \sum_{i=1}^n y_i z_i &= 0 \\ B_1 \sum_{i=1}^n x_i z_i + B_2 \sum_{i=1}^n y_i z_i + B_3 \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 - \lambda \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Do zapisu macierzowego układu równań jednorodnych (6) wprowadzono oznaczenia macierzowe: $X_{3 \times 3}, E_{3 \times 3}, B_{3 \times 1}$

$$X_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \lambda \right) & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i z_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \lambda \right) & \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ \sum_{i=1}^n x_i z_i & \sum_{i=1}^n y_i z_i & \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 - \lambda \right) \end{bmatrix}$$

$$E_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Układ równań jednorodnych (6) ma zapis macierzowy:

$$(X_{3 \times 3} - \lambda \cdot E_{3 \times 3}) \cdot B_{3 \times 1} = 0 \quad (7)$$

Powyższy układ równań (6) ma niezerowe rozwiązanie gdy wyznacznik spełnia warunek:

$$\det(X_{3 \times 3} - \lambda \cdot E_{3 \times 3}) = 0 \quad (8)$$

Przez rozwinięcie wyznacznika (8) uzyskuje się wielomian charakterystyczny trzeciego stopnia $W_3(\lambda) = 0$ względem zmiennej λ . Po jego rozwiązaniu uzyskuje się trzy wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, którym odpowiadają trzy wektory własne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Najmniejszej wartości $\lambda_i, i=1,2,3$ odpowiada wektor \vec{v}_i prostopadły do ortogonalnej płaszczyzny. Wektor ten spełnia dodatkowy warunek: jego moduł ma wartość równą 1. W ten sposób składowe wektora \vec{v}_i są cosinusami kierunkowymi wektora normalnego do płaszczyzny ortogonalnej.

Algorytmy prostej w przestrzeni R3 w programie pomiarowym WMP

Prosta L_1 przechodząca przez dwa punkty w przestrzeni R_3 w zapisie parametrycznym ma formę:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1) \cdot t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1) \cdot t \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1) \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

gdzie $[(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)]$ są składowymi wektora równoległego do prostej L_1 .

Prosta ortogonalna L_1 w przestrzeni R_3 przechodzi przez środek ciężkości $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ zbioru punktów pomiarowych $P_i(x_i, y_i, z_i), i=1,2,\dots,n$. Prosta oblicza się z funkcji Lagrange'a z warunkiem ubocznym:

$$F(b_1, b_2, b_3, \lambda) = \sum_{i=1}^n |b \times SP_i|^2 - \lambda \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 1) = \min \quad (10)$$

gdzie $[b \times SP_i]$ oznacza wysokość równoległoboku rozpiętego na wektorach b oraz SP_i . Z warunku koniecznego na minimum funkcji Lagrange'a (10), tj. zerowania się jej pochodnych cząstkowych względem zmiennych b_1, b_2, b_3, λ , otrzymuje się układ czterech równań jednorodnych.

$$\left. \begin{aligned} b_1 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) - \lambda \right] + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n -x_i \cdot y_i + b_3 \cdot \sum_{i=1}^n -x_i \cdot z_i &= 0 \\ b_1 \cdot \sum_{i=1}^n -x_i \cdot y_i + b_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) - \lambda \right] + b_3 \cdot \sum_{i=1}^n -y_i \cdot z_i &= 0 \\ b_1 \cdot \sum_{i=1}^n -x_i \cdot z_i + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot z_i + b_3 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) - \lambda \right] &= 0 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Do macierzowego zapisu układu równań jednorodnych (11) wprowadzono oznaczenia macierzowe: $A_{3 \times 3}, E_{3 \times 3}, b_{3 \times 1}$

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i & -\sum_{i=1}^n x_i \cdot z_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i & \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^n y_i \cdot z_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i \cdot z_i & -\sum_{i=1}^n y_i \cdot z_i & \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

$$E_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Układ równań jednorodnych (11) ma zapis macierzowy:

$$(A_{3 \times 3} - \lambda \cdot E_{3 \times 3}) \cdot b_{3 \times 1} = 0 \quad (12)$$

Ma on niezerowe rozwiązanie, jeśli wyznacznik układu spełnia warunek:

$$\det(A_{3 \times 3} - \lambda \cdot E_{3 \times 3}) = 0 \quad (13)$$

Podobnie jak wyżej, przez rozwinięcie wyznacznika (13) uzyskuje się wielomian charakterystyczny trzeciego stopnia $W_3(\lambda) = 0$ względem zmiennej λ . Po jego rozwiązaniu uzyskuje się trzy wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, którym odpowiadają trzy wektory własne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Najmniejszej wartości $\lambda_i, i=1,2,3$ odpowiada wektor \vec{v}_i prostopadły do ortogonalnej płaszczyzny. Wektor ten spełnia dodatkowy warunek: jego moduł ma wartość równą 1. W ten sposób składowe wektora \vec{v}_i są cosinusami kierunkowymi wektora normalnego do płaszczyzny ortogonalnej.

Algorytm osi walca w przestrzeni R3 w programie pomiarowym WMP

Prostą będącą osią walca definiuje się w programie pomiarowym przez kilka punktów będących środkami okręgów mierzonych wzdłuż osi walca. Według obliczonych punktów prostą osi walca oblicza program jako prostą ortogonalną (równania (10)÷(13)). Program pomiarowy WMP oblicza prostą będącą osią walca wykorzystując środki dwóch okręgów mierzonych na dwóch wysokościach Z_i $i=1,2$. Oś walca określa się przez dwa punkty: (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) będące środkami okręgów. Jest to najprostszy sposób definiowania prostej stanowiącej oś walca stosowany w programie pomiarowym WMP.

Algorytm odchyłki równoległości dwóch płaszczyzn w programie pomiarowym WMP

Płaszczyzny π_1 i π_2 : definiowane są przez pomiar 4 punktów lub skanowanie.

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Stałe w równaniach $\pi_1: [A_1, B_1, C_1]$ i $\pi_2: [A_2, B_2, C_2]$, obliczane przez podprogram *Płaszczyzna*, są wektorami $\vec{N}_1[A_1, B_1, C_1]$ i $\vec{N}_2[A_2, B_2, C_2]$ prostopadłymi do obydwu płaszczyzn. Do obliczenia odchyłki równoległości między dwiema równoległymi płaszczyznami wykorzystuje się iloczyn skalarny wektorów $\vec{N}_1 \circ \vec{N}_2$ prostopadłych do tych płaszczyzn:

$$\cos x = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (14)$$

Dalsza procedura obliczania odchyłki jest następująca:

Z tożsamości trygonometrycznej oblicza się wartość sinusa kąta:

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \quad (15)$$

Z ilorazu funkcji trygonometrycznych oblicza się wartość tangensa kąta:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (16)$$

Wartość odchyłki równoległości x między dwiema płaszczyznami wynosi:

$$x = \operatorname{tg} x \cdot 1000 \text{ mm/m} \quad (17)$$

Oznaczenie odchyłki równoległości dwóch płaszczyzn przedstawiono na rys. 1.

Algorytm odchyłki prostopadłości dwóch płaszczyzn w programie pomiarowym WMP

Obliczenie odchyłki prostopadłości między płaszczyznami w programie pomiarowym WMP sprowadza się do obliczenia tangensa kąta nachylenia prostej do płaszczyzny bazowej. Prostą pionową mierzy się w programie pomiarowym w płaszczyźnie

prostopadłej do płaszczyzny bazowej przez pomiary dwóch punktów przesuniętych wzdłuż osi Z, (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) , tj. przy zablokowanym przemieszczeniu głowicy pomiarowej w osi X. Program pomiarowy oblicza bezpośrednio wartość odchyłki x z nachylenia prostej pionowej, do płaszczyzny bazowej z zależności:

$$x = \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} \cdot 1000 \text{ mm/m} \quad (18)$$

Oznaczenie odchyłki x prostopadłości dwóch płaszczyzn przedstawiono na rys. 2.

Algorytm odchyłki równoległości dwóch prostych w programie pomiarowym

Kąt ϕ między prostymi równoległymi (rys. 3) zadanymi równaniami kierunkowymi:

$$l_1: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (19)$$

$$l_2: \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = \frac{y - y_3}{y_4 - y_3} = \frac{z - z_3}{z_4 - z_3} \quad (20)$$

oblicza program pomiarowy z iloczynu skalarnego wektorów kierunkowych prostych $\vec{l}_1[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$ oraz $\vec{l}_2[x_4 - x_3, y_4 - y_3, z_4 - z_3]$, wg (14). Dalszą procedurę obliczania odchyłki opisano wyżej (równania (14)÷(17)). Odchyłkę x równoległości między dwiema prostymi przedstawiono na rys. 3.

Algorytm odchyłki prostopadłości prostej do płaszczyzny w programie pomiarowym WMP

Płaszczyzna bazowa $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ definiowana przez pomiar 4 punktów lub skanowanie, określona przez wektor normalny płaszczyzny $\vec{N}_1[A_1, B_1, C_1]$, pozwala ustalić współrzędną Z_i w każdym pomiarze.

Prostą stanowiącą oś walca l_1 wyznaczają dwa punkty będące środkami dwóch okręgów mierzonych wzdłuż osi walca (rys. 4)

$$l_1: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (21)$$

Wektor osi walca ma składowe $\vec{l}_1[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$. Cosinus kąta x między wektorem \vec{l}_1 a wektorem \vec{N}_1 oblicza program z iloczynu skalarnego wektora kierunkowego prostej \vec{l}_1 i wektora normalnego płaszczyzny \vec{N}_1 wg wzoru (14). W przypadku gdy obydwa wektory są prostopadłe (rys. 5), obliczony kąt x między wektorami należy zmodyfikować, tzn. oblicza się moduł różnicy kątów $|x - \pi/2|$, a następnie $\cos|x - \pi/2|$. Dalszą procedurę obliczania odchyłki prostopadłości opisano wyżej, w rozdziale *Algorytm obliczania odchyłek równoległości i prostopadłości...*

W programie pomiarowym WMP [4] wartość odchyłki x (rys. 4) obliczana jest bezpośrednio z nachylenia prostej l_1 : do płaszczyzny bazowej.

$$x = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \cdot 1000 \text{ mm/m} \quad (22)$$

Algorytm odchyłki prostopadłości dwóch osi otworów w programie pomiarowym WMP

Płaszczyzna bazowa $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ definiowana przez pomiar 4 punktów lub skanowanie, określona przez wektor normalny do płaszczyzny $\vec{N}_1[A_1, B_1, C_1]$ pozwala ustalić współrzędną Z_1 w każdym pomiarze.

Prostą osi walca l_1 : wyznaczają dwa punkty, będące środkami $S_1(x_1, y_1), S_2(x_2, y_2)$ dwóch okręgów, mierzonych wzdłuż osi pierwszego otworu o równaniu kierunkowym:

$$l_1: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (23)$$

Podobnie prostą osi walca l_2 : wyznaczają dwa punkty będące środkami dwóch okręgów mierzonych wzdłuż osi drugiego otworu $S_3(x_3, y_3), S_4(x_4, y_4)$ o równaniu kierunkowym:

$$l_2: \frac{x-x_3}{x_4-x_3} = \frac{y-y_3}{y_4-y_3} = \frac{z-z_3}{z_4-z_3} \quad (24)$$

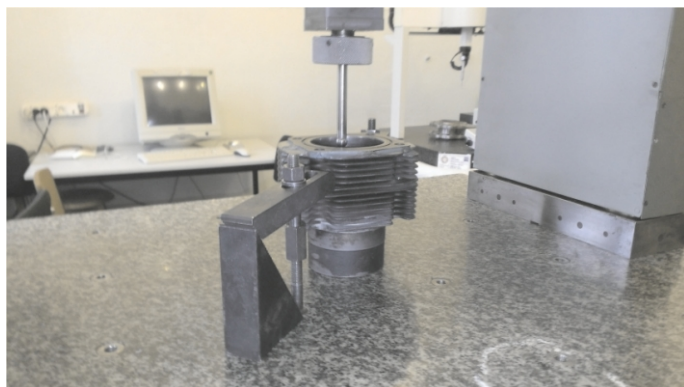
Wektor osi otworu $\vec{l}_1[x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1]$ jest prostopadły do wektora osi otworu bazowego $\vec{l}_2[x_4-x_3, y_4-y_3, z_4-z_3]$. Cosinus kąta α między wektorami \vec{l}_1 i \vec{l}_2 oblicza się z ich iloczynu skalarnego wg wzoru (14). Obliczony kąt α między wektorami należy zmodyfikować, tzn. oblicza się moduł różnicy kątów $|\alpha - \pi/2|$, a następnie oblicza $\cos|\alpha - \pi/2|$. Dalszą procedurę obliczania odchyłki prostopadłości opisano wyżej, w rozdziale *Algorytm obliczania odchyłek równoległości i prostopadłości...*

Oznaczenie odchyłki α prostopadłości między dwiema osiami otworów przedstawiono na rys. 6. Program pomiarowy WMP [4] takiej opcji pomiaru nie posiada, obliczenia prostopadłości między osią otworu a osią otworu bazowego można wykonać poza środowiskiem maszyny na podstawie zbioru punktów z obydwóch otworów uzyskanych z WMP.

Przykłady pomiarów odchyłek prostopadłości i równoległości i według przedstawionych procedur

Prostopadłość między prostą a płaszczyzną

Przykładem pomiaru prostopadłości między prostą a płaszczyzną jest pomiar prostopadłości osi cylindra silnika tłokowego do jego płaszczyzny bazowej. Sposób pomiaru wykonanego na WMP przedstawiono na rys. 8. Wymaga on wykonania dwóch niżej opisanych kroków.



Rys. 8. Pomiar odchyłki prostopadłości osi cylindra silnika tłokowego do płaszczyzny bazowej na stole granitowym WMP

1. Pomiar płaszczyzny bazowej cylindra

Płaszczyzna bazowa cylindra, równoważna płaszczyźnie stołu pomiarowego (rys. 8), definiowana jest przez pomiar 4 punktów. Wektor normalny płaszczyzny $\vec{N}_1[A_1, B_1, C_1]$ pozwala wyznaczyć współrzędną Z_1 w każdym pomiarze.

2. Pomiar prostej będącej osią cylindra

Prosta osi cylindra określana jest przez pomiary:

- a) pomiar okręgu (x_1, y_1, R_1) w cylindrze na wysokości Z_1 ,
- b) pomiar okręgu (x_2, y_2, R_2) w cylindrze na wysokości Z_2 ,
- c) prosta osi cylindra przechodzi przez środki okręgów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) .

Procedurę pomiaru płaszczyzny i osi cylindra zapisano w języku WMP [1], jako program OFF LINE [7].

Wartość odchyłki prostopadłości prostej będącej osią cylindra do płaszczyzny bazowej określona na WMP wynosi $\alpha = 0,6310$ mm/m. Uzyskana wartość odchyłki α odpowiada przemieszczeniu głowicy pomiarowej wzdłuż osi cylindra $(z_2 - z_1) = 61,3606$ mm. Zatem odchyłka prostopadłości osi cylindra względem płaszczyzny bazowej wynosi $\alpha = 0,6310 \cdot 61,3606/1000 = 0,0387$ mm.

Oznaczenie odchyłki prostopadłości α prostej i płaszczyzny przedstawiono na rys. 4.

Równoległość osi walca względem osi otworu bazowego

Przykładem pomiaru równoległości osi walca względem osi bazowej jest pomiar równoległości osi stopy względem osi głowy korbowodu, mierzonych na stole granitowym maszyny współrzędnościowej – rys. 9. Pomiar ten realizuje się w trzech, niżej przedstawionych etapach.

1. Pomiar płaszczyzny bazowej

Płaszczyzna bazowa równoważna płaszczyźnie stołu pomiarowego (rys. 9), definiowana jest przez pomiar 4 punktów. Wektor normalny płaszczyzny $\vec{N}_1[A_1, B_1, C_1]$ pozwala wyznaczyć współrzędną Z_1 w każdym pomiarze.

2. Pomiar osi otworu bazowego stopy korbowodu

Prosta bazowa będąca osią stopy korbowodu określana jest przez pomiary:

- a) pomiar okręgu w stopie na wysokości Z_1 , tj. określenie parametrów okręgu $S_1(x_1, y_1, R_1)$,



Rys. 9. Pomiar równoległości między osią stopy i głową korbowodu na maszynie współrzędnościowej WMP

b) pomiar okręgu w stopie na wysokości Z_2 , tj. określenie parametrów okręgu $S_2(x_2, y_2, R_2)$,

c) prosta osi stopy korbowodu przechodzi przez środki okręgów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) .

3. Pomiar osi głowy korbowodu

Prosta osi głowy korbowodu określana jest przez pomiary:

a) pomiar okręgu $S_3(x_3, y_3, R_3)$ w głowie na wysokości Z_3 ,

b) pomiar okręgu $S_4(x_4, y_4, R_4)$ w głowie na wysokości Z_4 ,

c) prosta osi głowy korbowodu przechodzi przez środki okręgów (x_3, y_3) i (x_4, y_4) .

Procedura pomiarowa została zapisana w języku zrozumiałym dla WMP [4], jako procedura OFF LINE [7].

Wartość odchyłki równoległości, określona za pomocą WMP, między osią bazową stopy i osią głowy korbowodu, wynosi $x = 0,9169$ mm/m. Uzyskana wartość odchyłki równoległości x odpowiada długości przemieszczenia głowicy wzdłuż osi głowy $(z_4 - z_3) = 32,49$ mm. Zatem odchyłka równoległości osi głowy korbowodu względem osi bazowej stopy korbowodu wynosi $x = 0,9169 \cdot 33,4900/1000 = 0,0307$ mm.

Oznaczenie odchyłki x równoległości między osią stopy i głowy korbowodu przedstawiono na rys. 3.

Podsumowanie i wnioski

Pomiary odchyłek równoległości oraz prostopadłości płaszczyzn i prostych względem elementu bazowego na współrzędnościowych maszynach pomiarowych są zagadnieniem złożonym, gdyż wymagają pomiaru zarówno elementu bazowego jak również mierzonego. Elementy mierzy się metodą

próbkiowania lub skanowania. Na WMP istnieje możliwość pomiaru tylko niektórych odchyłek równoległości i prostopadłości prostych i płaszczyzn. Ponieważ istnieje możliwość określenia współrzędnych punktów pomiarowych na WMP, obliczenia brakujących odchyłek kierunku można wykonać poza maszyną współrzędnościową.

Niedogodnością przy pomiarach odchyłek kierunku na WMP jest brak zapisu długości przemieszczeń głowicy pomiarowej. Ich rejestrację wykonuje obecnie operator maszyny współrzędnościowej.

Literatura

1. Grzegorzczak J.: Matematyka, Część I. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1999.
2. Humienny Z., Białas S., Osanna P.H., Tamre M., Weckenmann A., Blunt L., Jakubiec W.: Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS), cz. 10. Tolerancje kierunku. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2001.
3. Leitner R.: Zarys matematyki wyższej dla inżynierów. Część I, WNT, Warszawa 1976.
4. Łazuchiewicz A., Kotnowski M.: Koordynatometr XYZ, IO NE Nr 5/88, Ośrodek Badawczo-Rozwojowy-Narzędzi VIS, Warszawa 1988.
5. Norma PN-EN ISO 1101 – Specyfikacja geometrii wyrobów (GPS). Tolerancje geometryczne: Tolerancje kształtu, kierunku, położenia i bicia.
6. Pfeifer T.: Koordinatenmesstechnik für die Qualitätssicherung. VDI-Verl., Düsseldorf 1992.
7. Ratajczyk E.: Współrzędnościowa technika pomiarowa, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005. ■