

Krzysztof WIERZCHOLSKI*

THE PHENOMENON OF HIP JOINT ELLIPTICAL SURFACES

ZJAWISKO ELIPTYCZNYCH POWIERZCHNI STAWU BIODROWEGO

Key words:

elliptical femoral prosthesis surface, lubrication regions, elliptical and spherical triangle calculation formulae, load carrying capacity

Słowa kluczowe:

eliptyczna proteza kości udowej, obliczanie powierzchni smarowania, sferyczne i eliptyczne trójkąty, siła nośna

Summary

Numerous contemporary studies and experimental measurements regarding the human hip joints indicate, that femoral head is, in fact naturally elliptical. Therefore the femoral elliptical complete prosthesis as well half prosthesis must be better adapted to the natural hip joint with elliptical bonehead and neck of the femur. Half prostheses of hip joint are applied when joint acetabulum cartilage is well maintained. In the half prosthesis the head is

* Technical University of Koszalin, Institute of Technology and Education, Śniadeckich Street 2, 75-453 Koszalin, Poland, tel. (+48 94) 3478344, fax: (+48 94) 3426753, e-mail: krzysztof.wierzcholski@wp.pl

welded to the spindle or seated to the pin. When acetabulum cartilage is worn (used) a complete prosthesis is implanted. The elliptical femoral prosthesis was designed for solving the problem of the relationship between the femoral prosthesis head and the anatomical acetabulum and to minimize the various incidence namely wear protrusion and pain effects. Performed clinical tests indicate that elliptical prosthesis head have the most advanced technological shapes because are based on the anatomy and biomechanics features of the natural human hip joint. The biomechanics of an elliptical head femoral prosthesis, can be taken as the appropriate shape in the respect to the treatment of medical fractures of the neck of the femur. Taking into account the hydrodynamic theory of lubrication of cooperating surfaces we must finally find pressure distributions, friction forces, friction coefficients and wear. To prepare this calculations we ought at first determine and calculate the fields of the regions of lubrication on the internal surface lying on the elliptical femoral prosthesis (i.e. acetabulum) and on the external elliptical surface of the artificial bone or femoral head. Surface lubrication regions consists of the sums of elliptical triangle which are lying on the abovementioned surface. The coordinates of each tree points lying on the elliptical surfaces are measured by means of Atomic Force Microscope (AFM). In this paper are determined the formulas for the field calculations of elliptical triangle with the three vertexes (points) for coordinates which are foreseen measured.

INTRODUCTION

The bone head of hip joint is not spherical but elliptical. This fact is confirmed by the numerous anatomical and biomechanical studies on human hip joint, by many scientific literature reports as well long term results obtained by other Authors [L. 1–8]. We can observe the asymmetrical distribution of the layer of cartilage lying on the bone head surface. The cartilage layer is thickest at the upper pole and thinnest at the equator. From this fact follows, that the head to be elliptical with a wider diameter a along the axis of the femoral neck [L. 6–7]. Such different distribution of cartilage is presented in **Fig. 1a, b**.

Symbol a denotes smaller diameter and b - wider diameter. The square of eccentricity for human hip joint is defined by the following formula [L. 9–10]:

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}, \quad b > a, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

For $b = 26,5$ mm and $a = 25,0$ mm, eccentricity obtained from formula (1) has the value: $\varepsilon = 0.3316678$. If $b = 26,5$ mm and $a = 26,0$ mm then $\varepsilon = 0.1933386$. In **Fig. 2a–g** are presented various elliptical acetabulum prosthesis [L. 1].

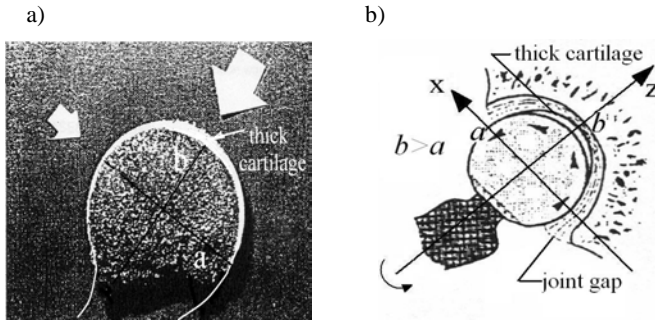


Fig. 1. Ellipsoidal shapes of natural hip joint surfaces: a) different distribution of cartilage on the elliptical femoral head, b) geometrical cut across the elliptical bonehead

Rys. 1. Eliptyczne kształty powierzchni głów naturalnych stawów biodrowych: a) różnice grubości warstwy chrząstki na eliptycznej głowie biodra, b) geometryczne cięcie poprzez kość głowy biodra

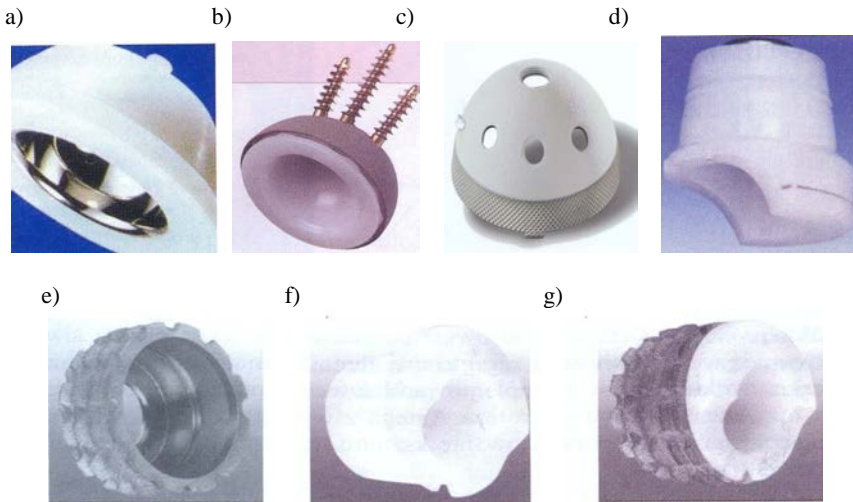


Fig. 2. Ellipsoidal acetabulum shapes: a) external polyethylene and internal metal material b) fixing bolts, c) acetabulum with holes, d) one element polyethylene, ellipsoidal acetabulum, e, f, g) bipolar acetabulums with the ellipsoidal pad

Rys. 2. Eliptyczne kształty panewek: a) zewnętrzna warstwa polietylenowa a od wewnątrz metal, b) wkręty mocujące, c) panewka z otworami, d) polietylenowa część eliptycznej panewki, e, f, g) bipolarne panewki z eliptyczną tuleją

The approximately value of the half surface of the rotational ellipsoid with diameters a , b , $a < b$ can be calculated with the error about 1.061% for $p = 1.6075$ from the following formula:

$$\Omega \cong 2\pi \left[\frac{a^{2p} + 2(ab)^p}{3} \right]^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

Following convergent series presenting the real value of ellipsoid half surface:

$$\Omega_E = 2\pi b^2 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n-1)(2n+1)} \right] = 2\pi b^2 \left(1 - \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \frac{1}{15}\varepsilon^4 - \dots \right) \tag{3}$$

THE RELATIONS BETWEEN ELLIPTICAL AND CARTHESIAN COORDINATES

At first we define the coordinates of the point P(B,L) lying on the elliptical surface. Wide coordinate B of point P lying on the rotational elliptical surface denotes the angle between perpendicular line to the elliptical surface in point P and plain B = 0 i.e. xOy (see Fig. 3a, b). Length coordinate L of point P lying on the rotational elliptical surface denotes the angle between the projection r₁ of the basis vector r on the plain xOy and the plain L = 0 (see Fig. 3a, b).

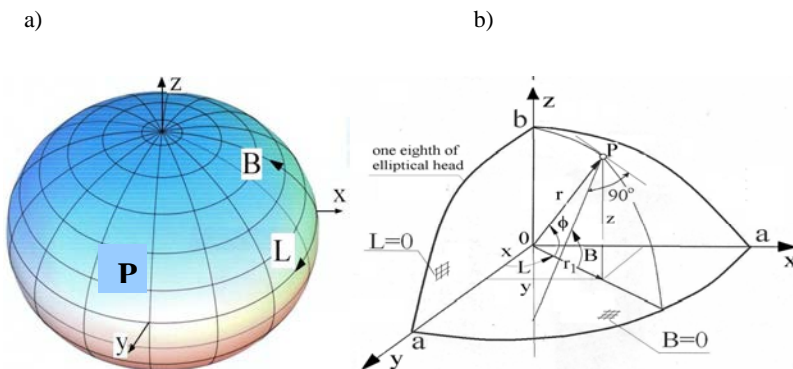


Fig. 3. Coordinates for the arbitrary point laying on the elliptical head surface: a) wide coordinate B and length coordinate L, b) connection between Cartesian coordinates x, y, z of arbitrary point P laying on the elliptical surface and its wide B and length L coordinates

Rys. 3. Współrzędne dowolnego punktu leżącego na eliptycznej powierzchni głowy: a) współrzędna szerokości B oraz współrzędna długości L, b) związki pomiędzy prostokątnymi (kartezjańskimi) współrzędnymi x, y, z dowolnego punktu P leżącego na eliptycznej powierzchni głowy oraz ich współzrędnymi szerokości B oraz długości L

The relationship between Cartesian coordinates (x,y,z) and elliptical coordinates (ξ, φ, z) presented in **Fig. 4** are as follows:

$$x_1 = c \cdot \text{ch}(\xi) \cos(\varphi), \quad x_2 = c \cdot \text{sh}(\xi) \sin(\varphi), \quad z = z \tag{4}$$

where symbol c denotes the scale coefficient and has the length dimension.

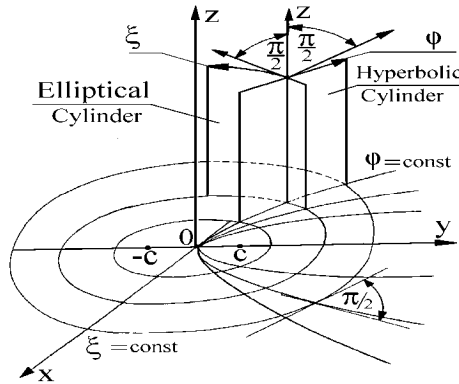


Fig. 4. Elliptical coordinates
 Rys. 4. Współrzędne eliptyczne

The relationship between Cartesian coordinates (x,y,z) and coordinates (B,L) for arbitrary point laying on the elliptical surface are as follows (compare **Fig. 3b**):

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \cos B \cos L}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 B}}, & y &= \frac{a \cos B \sin L}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 B}}, \\ z &= \frac{b \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 B}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 B}}, & r_l &= \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 B}} \end{aligned} \tag{4a}$$

where $-\pi/2 \leq B \leq +\pi/2, -\pi \leq L \leq +\pi$.

THE FIELD SURFACE OF THE ELLIPTICAL TRIANGLE

Figure 4a shows the one PQS of numerous elliptical triangles lying on the elliptical surface. **Figure 5b** illustrates the real view of the triangle on the elliptical surface and its developed view. The field of the elliptical triangle has the following form:

$$\Omega_{pqs} = \left(\frac{2a + b}{3} \right)^2 (angP + angQ + angS - \pi) \tag{5}$$

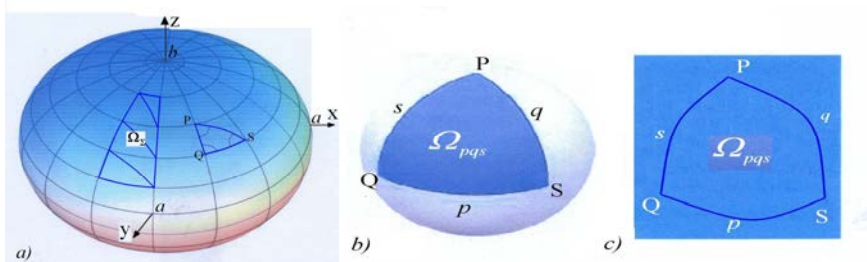


Fig. 5. Elliptical triangles: a) Lubrication region Ω_Σ lying on the elliptical surface as a sum of elliptical triangles with the vertexes P, Q, S; b) Enlargements of elliptical triangle PQS on the elliptical surface; c) elliptical triangle on the plane

Rys. 5. Trójkąty eliptyczne: a) Obszar smarowania Ω_Σ spoczywający na eliptycznej powierzchni głowy jako suma trójkątów eliptycznych o wierzchołkach P, Q, S; b) powiększenie eliptycznego trójkąta PQS na eliptycznej powierzchni; c) trójkąty eliptyczne sprowadzone do płaszczyzny

where symbols ang P , ang Q , ang S denote angles in vertexes P,Q,S respectively. Unknown ang P is the dihedral angle between plane $\text{pl}(PQO)$ and $\text{pl}(PSO)$. Unknown ang Q is the dihedral angle between plane $\text{pl}(QPO)$ and $\text{pl}(QSO)$. Unknown ang S is the dihedral angle between plane $\text{pl}(SQO)$ and $\text{pl}(SPO)$. Point O denotes the ellipsoid centre.

The three vertexes of the triangle have the following coordinates: $P(B_p, L_p) = P(x_p, y_p, z_p)$, $Q(B_q, L_q) = Q(x_q, y_q, z_q)$, $S(B_s, L_s) = S(x_s, y_s, z_s)$. By virtue of the formulae (4), the relationships between coordinates x, y, z and B, L for points P,Q,S are as follows:

$$x_j = \frac{a \cos B_j \cos L_j}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 B_j}}, \quad y_j = \frac{a \cos B_j \sin L_j}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 B_j}}, \quad z_j = \frac{b \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin B_j}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 B_j}} \quad (6)$$

for $j = p, q, s$. If eccentricity ε tends to zero, then above formulae valid for spherical triangles. The angles at the vertexes P,Q,S of the elliptical triangle are as follows $\text{ang P} = \text{ang}(pq, ps)$, $\text{ang Q} = \text{ang}(qs, qp)$, $\text{ang S} = \text{ang}(sq, sp)$, where:

$$\text{ang}(j_i, j_k) = \arccos \left(\frac{|A_{j_i} A_{j_k} + B_{j_i} B_{j_k} + C_{j_i} C_{j_k}|}{\sqrt{A_{j_i}^2 + B_{j_i}^2 + C_{j_i}^2} \sqrt{A_{j_k}^2 + B_{j_k}^2 + C_{j_k}^2}} \right) \quad (7)$$

for:

$$A_{j_i} \equiv \begin{vmatrix} y_j & z_j \\ y_i & z_i \end{vmatrix}, \quad B_{j_i} \equiv \begin{vmatrix} z_j & x_j \\ z_i & x_i \end{vmatrix}, \quad C_{j_i} \equiv \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_i & y_i \end{vmatrix} \quad (8)$$

whereas: $i, j, k = p, q, s$ and $i \neq j, k \neq j, i \neq k$.

PRESSURE AND LOAD CARRYING CAPACITY MEASUREMENTS AND CALCULATION

The measured pressure values p_1, p_2, p_3, \dots in vertexes of particular triangles including in lubrication region Ω_Σ are presented in **Fig. 6a, b, c**.

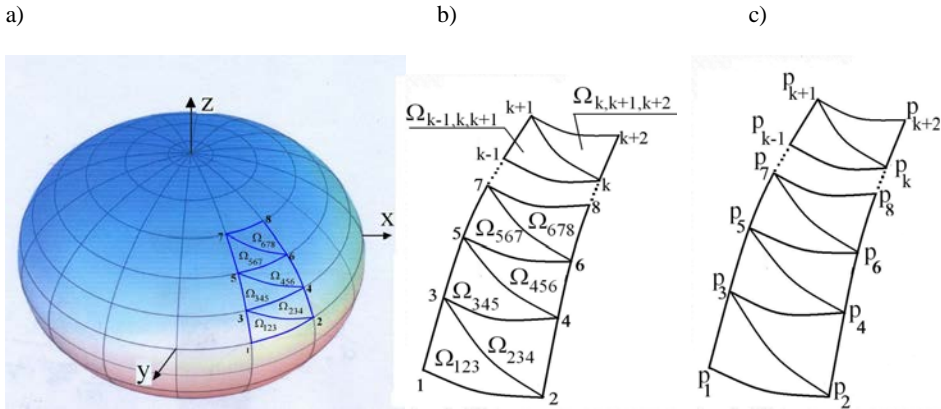


Fig. 6. Lubrication region Ω_Σ : a) localization on the elliptical surface, b) Region Ω_Σ as a sum of elliptical triangles, c) measured pressure values in the vertexes of particular elliptical triangles

Rys. 6. Obszar smarowania Ω_Σ : a) umiejscowienie na powierzchni eliptycznej głowy, b) obszar Ω_Σ jako suma eliptycznych trójkątów, c) pomierzone wartości ciśnienia hydrodynamicznego w punktach wierzchołkowych poszczególnych trójkątów eliptycznych

The load carrying capacity value has the following form:

$$C = (p_\Sigma) \cdot \Omega_\Sigma \tag{9}$$

where the average value of the pressure in lubrication region is formulated as the arithmetic mean of pressure values in particular vertexes of elliptical triangles and has following form:

$$p_\Sigma = \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} p_k, \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots \tag{10}$$

The mean pressure value on the elliptical surface is illustrated in **Fig. 7**.

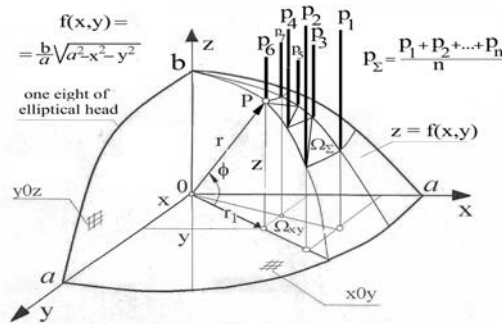


Fig. 7. The calculation of the mean pressure value on the elliptical lubrication surface
 Rys. 7. Obliczenie uśrednionej wartości ciśnienia hydrodynamicznego na eliptycznej powierzchni smarowanej głowy

The lubrication region is defined as the sum of particular elliptical triangles:

$$\Omega_{\Sigma} \equiv \sum_{k=1}^n \Omega_{k,k+1,k+2} = \Omega_{123} + \Omega_{234} + \Omega_{345} + \Omega_{456} + \Omega_{567} + \Omega_{567} + \dots + \quad (11)$$

$$+ \Omega_{k-1,k,k+1} + \Omega_{k,k+1,k+2} + \dots \quad \text{for } n = 2,4,6,8,\dots$$

CONCLUSIONS

In this paper is presented the method of lubrication region calculation on the elliptical surfaces lying on the elliptical femoral prosthesis of human joints. The lubrication region consists of elliptical triangles. The values of surfaces of elliptical triangles are derived.

Taking into account the total lubrication surface and mean arithmetic measured hydrodynamic pressure, the formula for capacity calculation is presented.

In the case if acetabulum is good maintained and bonehead is worn, then in this case half prosthesis with the elliptical shape gives optimum relationship between the prosthesis and the acetabulum. An improved relationship between bone and prosthesis is dependent on normal femoral head elliptical shape.

REFERENCES

1. Cwanek J.: The usability of the surface geometry parameters for the evaluation of the artificial hip joint wear. Rzeszów Univ. Press, Rzeszów 2009.
2. Gadomski A., Bełdowski P., Rubi Miguel P., Urbaniak W., Auge Wayne K., Santamaria-Holek I., Pawlak Z.: Some conceptual thoughts toward nano-scale oriented friction in a model of articular cartilage, Mathematical Biosciences 244(2013) 188–200.

3. Kennedy W.R.: Treating femoral neck fractures with the Cathcard prosthesis-a preliminary report, *Contemporary Orthopaedics* 1982, 4, 1–6.
4. Markolf K.L., Amsfuth H.C.: Compressive deformations of the acetabulum during the in vitro loading., *Clin. Orthoped.* 1983, 172–284.
5. Molfetta L., Pipino F.: Anatomia e biomeccanica dell' acetabolo, *Arch. Ortop. Reumat.* 1989, 102–167.
6. Pipino F., Molfetta L.: The elliptical femoral prosthesis, *Hip International*, vol. 1, No.1, 1991, 39–44.
7. Simone C., Patella V., Moretti B., Molfetta L., Pesce V., Vavalle G.: Short term clinical results with an elliptical femoral prosthesis, *Hip*.
8. Vanderdriessche F., Verdonk R., Van Dooren J., Claessens H.: The Augustin Moore Prosthesis-a long term follow up. *Acta Orthop. Belgica*, 1983, 49, 483.
9. Wierzcholski K.: Stochastic impulsive pressure calculations for time dependent human hip joint lubrication, *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, Vol. 14, No. 4, 2012, 81–100.
10. Wierzcholski K.: Comparison between impulsive and periodic non Newtonian lubrication of human hip joint. *Engineering Transactions*, 2005, 53, 1, 69–114.

Streszczenie

Liczne badania współczesne poparte badaniami doświadczalnymi dotyczącymi stawów biodrowych człowieka wykazują, że głowa kości udowej ma w rzeczywistości kształt eliptyczny. Dlatego też zarówno całkowita, jak i połowicza proteza stawu biodrowego o kształcie eliptycznym jest lepiej adaptowana przez rzeczywistą głowę kostną, czyli nasadę bliższą kości udowej w porównaniu z protezami o powierzchniach sferycznych. Protezy połowicze stosujemy w przypadkach, gdy chrząstka panewki jest jeszcze dobrze zachowana i nie uległa procesom zwyrodnieniowym. Jeśli chrząstka panewki jest zużyta, to wtedy implantujemy całkowitą protezę. Eliptyczna endoproteza rozwiązuje cały szereg problemów natury mechanicznej, geometrycznej oraz medyczo-anatomicznej związanych ze współpracą głowy kostnej z powierzchnią panewki, między innymi zmniejsza zużycie powierzchni oraz efekty bólu w trakcie rehabilitacji. Przeprowadzone badania kliniczne wykazują, że protezy eliptyczne mają kształty bardziej przydatne w porównaniu z kształtami sferycznymi, ponieważ dostosowują się bardziej do anatomicznych oraz biomechanicznych właściwości naturalnych stawów biodrowych człowieka. Biomechanika dotycząca protez eliptycznych stawu biodrowego człowieka jest stosownym narzędziem identyfikacji zabiegów medycznych w przypadku złamań nasady bliższej stawu biodrowego. Biorąc pod uwagę hydrodynamiczną teorię smarowania współpracujących powierzchni stawu biodrowego człowieka wyznaczamy ciśnienie hydrodynamiczne, siłę nośną, siły tarcia oraz zużycie. Celem wykonania tych obliczeń wyznaczamy pole obszaru smarowania na

wewnętrznej powierzchni eliptycznej protezy panewki udowej oraz na zewnętrznej eliptycznej powierzchni głowy.

Obszar powierzchni smarowania składa się z sumy eliptycznych trójkątów leżących na omawianych powierzchniach.

Współrzędne trzech punktów stanowiących wierzchołki eliptycznych trójkątów zostały pomierzone mikroskopem sił atomowych (AFM). W niniejszej pracy przedstawiono wzory do wyznaczania powierzchni trójkątów eliptycznych po wykorzystaniu współrzędnych punktów trzech pomierzonych uprzednio wierzchołków.