Grzegorz Mieczkowski

Faculty of Mechanical Engineering
Bialystok University of Technology
ul. Wiejska 45C, Poland
E-mail: g.mieczkowski@pb.edu.pl

Kryterium pękania struktury bi-materiałowej z ostrym karbem usytuowanym na interfejsie

Słowa kluczowe: *inicjacja procesu pękania, bi-materiały, osobliwe pola naprężeń, współczynniki intensywności naprężeń*

Streszczenie: W pracy przedstawiono wyniki badań dotyczących pękania struktury bi-materiałowej z karbem usytuowanym na interfejsie. Do prognozowania inicjacji procesu pękania zastosowano kryterium oparte na punktowej teorii krytycznych dystansów. Analizowano elementy wykonane ze stopu aluminium i polimerów (PC, PMMA), które poddane były trójpunktowemu zginaniu. Wartości obciążeń krytycznych wynikających z wykorzystanej hipotezy porównano z wartościami uzyskanymi z eksperymentu. Walidacja wybranego kryterium wymagała określania jakościowego i ilościowego opisu osobliwych pól naprężeń, występujących w okolicy wierzchołkowej karbu strukturalnego. W związku z tym, uzyskano takie rozwiązania i omówiono metodykę ich otrzymywania.

1. Wstęp

Prognozowanie trwałości konstrukcji mechanicznych jest złożonym procesem wymagającym uwzględnienia wielu czynników. Jednym z nich jest złożoność strukturalna konstrukcji. Konstrukcja jest obiektem fizycznym zbudowanym z wielu elementów, często wykonanych z materiałów o różnych właściwościach mechano–fizycznych. Dodatkowo, konstrukcje poddane są zwykle działaniu złożonych obciążeń zewnętrznych, często o charakterze zmiennym, przy różnych czynnikach środowiskowych. Powoduje to różne mechanizmy zniszczenia - zużycie (korozyjne, kawitacyjne, tarciowe), utratę nośności, pękanie – wykluczające często dalszą pracę urządzenia.

Miejscem inicjacji pęknięć są najczęściej pustki i inne wady materiałowe oraz karby konstrukcyjne, których obecność w konstrukcji wynika najczęściej z konieczności połączenia ze sobą poszczególnych komponentów, zapewnienia konstrukcji wymaganych cech funkcjonalnych, czy żądanej struktury materiałowej.

Karby można podzielić na wiele różnych kategorii w zależności od ich kształtu, usytuowania w konstrukcji, niejednorodności materiałowej czy technologii wytwarzania konstrukcji. Wszystkie one mają wspólną cechę – powodują lokalny wzrost naprężenia w obciążonej konstrukcji, przez co wpływają na jej trwałość i wytrzymałość.

Na podstawie obserwacji i badań eksperymentalnych, naukowcy od dawna próbowali określić pewne krytyczne warunki, przy których następuje zniszczenie materiału. Można tu wymienić np. idee Galileusza, Tresci, Beltramiego, Coulomba, Mohra, Misesa czy Hubera. Przyjęli oni pewne hipotezy, określające wytrzymałość materiałów, stanowiące do dziś podstawy obliczeń inżynierskich. Zakładając jednorodność i ciągłość ośrodka, z którego został wykonany element konstrukcyjny, sformułowali graniczne wartości funkcji, po której przekroczeniu następowało zniszczenie materiału. Hipotezy te nie uwzględniały znaczącego wpływu silnych gradientów pól naprężeń i odkształceń na wytrzymałość. Rozwój teoretyczny mechaniki ciała stałego, szczególnie teorii sprężystości, pozwolił na uzyskanie wielu rozwiązań analitycznych opisujących lokalne pola naprężeń w otoczeniu zarówno łagodnego koncentratora (np. rozwiązania Kirscha [8]), jak i koncentratorów ostrych, generujących osobliwe pola naprężeń (rozwiązania Sneddona [31], Williamsa [38]). Znajomość nowych rozwiązań matematycznych umożliwiła sformułowanie kolejnych kryteriów wytrzymałościowych uwzględniających wpływ obecności koncentratorów naprężeń w jednorodnych materiałach konstrukcyjnych (np. Griffith [6], Sih [295], McClintock [16] i inni).

W ostatnich latach zauważalny jest silny rozwój materiałów kompozytowych o z góry zaprojektowanych właściwościach mechanicznych. Są to z reguły materiały anizotropowe lub kompozyty o złożonej strukturze periodycznej, często zawierające pęknięcia, wtrącenia lub inne wady wewnętrzne wywołujące efekty miejscowego spiętrzenia naprężeń.

Typowym koncentratorem naprężeń występującym w kompozytach warstwowych jest pęknięcie [30] lub ostry karb usytuowany w płaszczyźnie łączenia poszczególnych warstw kompozytu [3, 5, 26]. Tego typu koncentratory występują także często w elementach konstrukcyjnych powstałych przez połączenie dwóch różnych materiałów za pomocą klejenia (taki element można traktować jako swoisty materiał kompozytowy). Pojawia się zatem potrzeba określenia wytrzymałości i odporności na pękanie kompozytów (z uwzględnieniem właściwości mechanicznych warstwy łączącej), w których karby strukturalne generują duże gradienty naprężeń. Rozwiązaniem tego problemu jest odpowiednio sformułowane kryterium wytrzymałościowe. Kryterium powinno zawierać precyzyjnie określone równanie wraz ze zdefiniowanymi stałymi materiałowymi, na podstawie, którego można przewidzieć moment zainicjowania procesu pękania. Prognozowaniem trwałości elementów z karbami strukturalnymi zajmowało się stosunkowo niewielu naukowców.

W pracy [12] analizowano wytrzymałość elementów dwufazowych z karbem strukturalnym. Komponenty materiałowe połączone były adhezyjnie. Autorzy wykonali badania trójpunktowego zginania i wyznaczyli wartości sił inicjujących pękanie. Możliwość zastosowania kryterium Leguillona dla tego typu elementów (elementy z karbem łączone adhezyjnie) została pozytywnie zweryfikowana w pracy [36]. Kryterium, które jest często stosowane dla materiałów jednorodnych i nie wymaga wyznaczania tak dużej ilości stałych materiałowych, jest kryterium MClintocka. Zatem głównym celem prezentowanej pracy jest eksperymentalna weryfikacja możliwości stosowania tego kryterium (z zastosowaniem właściwej modyfikacji) dla struktur bi-materiałowych, w których ostre karby strukturalne generują osobliwe pola naprężeń. Ideę kryterium opisano poniżej.

Nomenklatura

a - Wysokość karbu
b - Gradient ‘naprężeń kombinowanych’
E - Moduł Younga
f_{ik}^{I}, f_{ik}^{II} -Współczynniki wpływu dla naprężeń
F - Obciążenie, przy którym obliczano uogólnione współczynniki intensywności naprężeń
F_k - Prognozowane obciążenie niszczące
g - Grubość próbki
h - Wysokość próbki
H_o, H_1, H_2 - Współczynniki wpływu dla równania charakterystycznego
i - Indeks materiału (=1,2)
K_E - Ekwiwalentny współczynnik intensywności naprężeń
K_{Ec} - Wartość krytyczna ekwiwalentnego współczynnika intensywności naprężeń
K_I, K_{II} -Uogólnione współczynniki intensywności naprężeń

K_{Ic} - Odporność na pękanie
L - Odległość między podporami w próbie trójpunktowego zginania
Lc -Długość próbki
n - Indeks węzłów
r, φ -Współrzędne w biegunowym układzie odniesienia
u_r, u_φ - Przemieszczenia w biegunowym układzie odniesienia
α - Kąt pomiędzy interfejsem, a krawędzią karbu w materiału 1
β - Kąt wierzchołkowy karbu
γ - Kąt pomiędzy interfejsem, a krawędzią karbu w materiału 2
Γ - Proporcja modułów odkształcenia postaciowego
δ - Część urojona wartości własnej macierzy warunków brzegowych λ
λ - Wartość własna macierzy warunków brzegowych
λ_r - Część rzeczywista wartości własnej macierzy warunków brzegowych λ
μ - Moduł odkształcenia postaciowego
ν - Współczynnik Poissona
$\sigma_\varphi, \sigma_r, \tau_{r\varphi}$ -Naprężenia w biegunowym układzie odniesienia
φ_0 - Kąt propagacji pęknięcia
ψ -Proporcja naprężeń stycznych i normalnych

2. Kryterium pękania

W kryterium zaproponowanym w pracy [16] przyjmuje się, że pękanie nastąpi w przypadku, gdy odkształcenie normalne ε_φ w pewnej małej odległości od wierzchołka szczeliny ρ_c osiągnie wartość krytyczną, co można zapisać w następujący sposób:

$$\varepsilon_\varphi(\rho_c) = \varepsilon_c \tag{1}$$

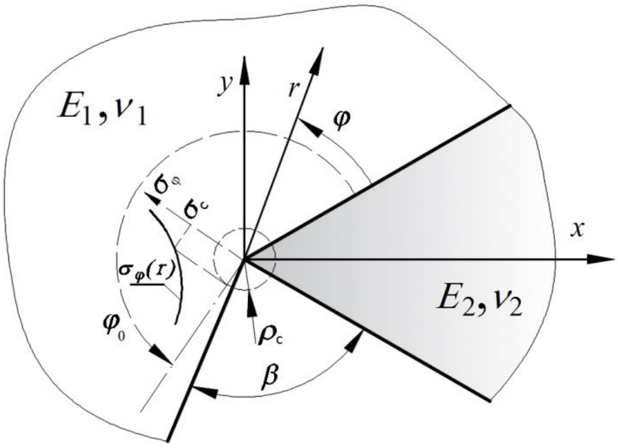
Szersze zastosowanie znalazła jednak postać naprężeniowa tego kryterium, w której odkształcenie zostało zastąpione przez odpowiednią składową naprężeń normalnych.

W podejściu zaproponowanym w pracy [23] przyjęto, że propagacja pęknięcia nastąpi wtedy, gdy naprężenia obwodowe σ_φ w pewnej skończonej odległości $r=\rho_c$ osiągną wartość krytyczną σ_c (2). Stosowanie tak sformułowanego warunku, dla elementów z karbami występującymi w materiałach jednorodnych, zostało pozytywnie zweryfikowane w wielu pracach np. [27].

$$\max_\varphi \sigma_\varphi(\rho_c) = \sigma_c \tag{2}$$

Kąt propagacji pęknięcia φ_0 wyznacza się maksymalizując σ_φ względem kąta φ. W przypadku zagadnienia bi-materiału ze strukturalnym karbem, początkowo pęknięcie propaguje wzdłuż interfejsu. Zatem można z góry założyć, że $\varphi_0 = 0$ (rys.1) i warunek (2) można zapisać w następujący sposób:

$$\sigma_\varphi(\rho_c, 0) = \sigma_c \tag{3}$$



Rys. 1 Graficzna interpretacja kryterium McClintocka.

Parametr ρ_c, traktowany jest jako stała materiałowa i może być wyznaczony doświadczalnie. Na przykład, wykorzystując w warunku (3) zależność na naprężenia obwodowe przy wierzchołku szczeliny oraz kryterium Griffitha – Irwina otrzymuje się:

$$\frac{K_c}{\sqrt{2\pi\rho_c}} = \sigma_c \tag{4}$$

skąd można obliczyć krytyczny dystans:

$$\rho_c = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_c}{\sigma_c}\right)^2, \tag{5}$$

gdzie K_c - odporność na pękanie, σ_c -: wytrzymałość na rozciąganie.

Zaletą proponowanej metody, opartej na tak zwanej teorii krytycznych dystansów (TDC), jest to, że w większości przypadków do prognozowania procesu pękania nie jest wymagana znajomość analitycznego opisu pól naprężeń- prognozowanie opiera się na rozwiązaniach numerycznych.

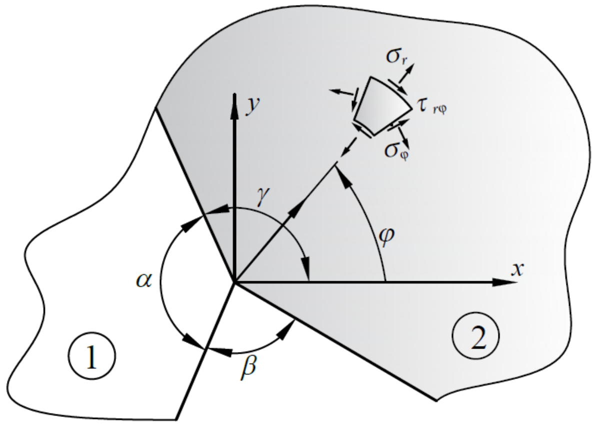
W przypadku, gdy proces pękania odbywa się w płaszczyźnie, w której występuje złożony stan naprężeń, zastosowanie rozwiązań numerycznych może spowodować błędną prognozę [13]. Najczęściej w takiej sytuacji, na podstawie analitycznego opisu lokalnych pól naprężeń, formułowane jest globalne kryterium pękania (przy użyciu lokalnego parametru) oparte na współczynniku intensywności naprężeń [27, 13, 1] lub współczynniku uwalniania energii [9].

W prezentowanej pracy, na podstawie kryterium McClintocka, zaproponowano dwie koncepcje przewidywania inicjacji procesu pękania. Pierwsza z nich oparta jest na ekwiwalentnym współczynniku intensywności naprężeń, a druga na uzależnieniu (w warunku (2)) naprężeń krytycznych od proporcji naprężeń stycznych i normalnych występujących w płaszczyźnie pękania. Szczegółowy opis koncepcji przedstawiono w rozdziale 6.

Jak łatwo zauważyć, zastosowanie kryterium McClintocka wymaga znajomości dystrybucji pól naprężeń występujących w bliskim sąsiedztwie punktu osobliwego. W związku z tym w kolejnym rozdziale pracy podane zostaną postacie funkcji opisujących takie pola naprężeń oraz metodologia ich wyznaczania.

3. Analityczne zależności opisujące pola naprężeń w okolicy wierzchołka karbu strukturalnego.

Rozwiązanie zagadnienia bi-materiału z karbem strukturalnym usytuowanym na interfejsie (rys.2) otrzymano wykorzystując podejście zastosowane przez autorów pracy [21] dla przypadku ostrego naroża w materiale jednorodnym.



Rys. 2 Bi-materiał z karbem strukturalnym usytuowanym na interfejsie

W wykorzystanej metodzie, której dokładny opis można znaleźć w pracy [19], stosując funkcję naprężeń Airy'ego otrzymuję się ogólne rozwiązania asymptotyczne opisujące poszczególne komponenty pól naprężeń i przemieszczeń. Dla zagadnienia karbu usytuowanego na interfejsie bi-materiału rozwiązanie ogólne przyjmuje następująca postać [18]:

$$
\begin{aligned}
u_{ri} &= r^{\lambda}\left(A_i \cos((1+\lambda)\varphi) + B_i \sin((1+\lambda)\varphi) + C_i \cos((1-\lambda)\varphi) + D_i \sin((1-\lambda)\varphi)\right)\\
u_{\varphi i} &= r^{\lambda}\left(-A_i \sin((1+\lambda)\varphi) + B_i \cos((1+\lambda)\varphi) - C_i \frac{\kappa+\lambda}{\kappa-\lambda}\sin((1-\lambda)\varphi) + D_i \frac{\kappa+\lambda}{\kappa-\lambda}\cos((1-\lambda)\varphi)\right)\\
\sigma_{ri} &= r^{\lambda-1}\mu\left(A_i 2\lambda\cos((1+\lambda)\varphi) + B_i 2\lambda\sin((1+\lambda)\varphi) + C_i(3-\lambda)\frac{2\lambda}{\kappa-\lambda}\cos((1-\lambda)\varphi) + D_i(3-\lambda)\frac{2\lambda}{\kappa-\lambda}\sin((1-\lambda)\varphi)\right)\\
\sigma_{\varphi i} &= r^{\lambda-1}\mu\left(-A_i 2\lambda\cos((1+\lambda)\varphi) - B_i 2\lambda\sin((1+\lambda)\varphi) + C_i(1+\lambda)\frac{2\lambda}{\kappa-\lambda}\cos((1-\lambda)\varphi) + D_i(1+\lambda)\frac{2\lambda}{\kappa-\lambda}\sin((1-\lambda)\varphi)\right)\\
\tau_{r\varphi i} &= r^{\lambda-1}\mu\left(-A_i 2\lambda\sin((1+\lambda)\varphi) + B_i 2\lambda\cos((1+\lambda)\varphi) + C_i(1-\lambda)\frac{2\lambda}{\kappa-\lambda}\sin((1-\lambda)\varphi) - D_i(1-\lambda)\frac{2\lambda}{\kappa-\lambda}\cos((1-\lambda)\varphi)\right).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

gdzie: $\mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$ -moduł odkształcenia postaciowego, $\kappa_i = (3-\nu_i)/(1+\nu_i)$ - płaski stan naprężenia, $\kappa_i = (3-4\nu_i)$ - płaski stan odkształcenia, ν_i -współczynnik Poissona, i=1,2.

Rozwiązanie szczególne otrzymuje się poprzez wyznaczenie wykładnika potęgowego λ oraz stałych A_i, B_i, C_i, D_i. Stałe wyznaczono na podstawie następujących warunków brzegowych [18]:

1. dla lewej powierzchni bocznej karbu, $\varphi = \alpha$;

$$\sigma_{\varphi 1} = \tau_{r\varphi 1} = 0$$

2. dla prawej powierzchni bocznej karbu $\varphi = -\gamma$;

$$\sigma_{\varphi 2} = \tau_{r\varphi 2} = 0$$

3. wzdłuż interfejsu, $\varphi = 0$;

$$u_{r1} = u_{r2};\, u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2};\; \sigma_{\varphi 1} = \sigma_{\varphi 2};\, \tau_{r\varphi 1} = \tau_{r\varphi 2}\,.$$

Ponadto z warunku zerowania się wyznacznika macierzy warunków brzegowych wyznaczono równanie charakterystyczne (7), którego kolejne pierwiastki wyznaczają wartość wykładnika potęgowego λ (wartości własne macierzy warunków brzegowych) w uzyskanych rozwiązaniach asymptotycznych (6)[18].

$$H_0 + \Gamma H_1 + \Gamma^2 H_2 = 0 \tag{7}$$

gdzie:

$$H_o = \left(1-2\lambda^2+2\lambda^2 cos[2\alpha]\right)\left(1-\lambda^2+\lambda^2 cos[2\gamma]-cos[2\gamma\lambda]\right)$$

$$-\kappa_1\begin{pmatrix} cos\left[2(-\alpha+\gamma)\lambda\right]+cos\left[2(\alpha+\gamma)\lambda\right]+cos[2\alpha\lambda]\left(-2+4\lambda^2 sin[\gamma]^2\right) \\ +2\left(\lambda^2 sin[\gamma]^2-sin[\gamma\lambda]^2\right)\kappa_1 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = 5\lambda^2+cos[2\alpha\lambda]+cos[2\gamma\lambda]-2cos\left[(-\alpha+\gamma)\lambda\right]^2-$$

$$\lambda^2\left(3cos[2\alpha]-cos\left[2(\alpha-\gamma)\right]+3cos[2\gamma]+4cos[2\gamma\lambda]sin[\alpha]^2+4\left(cos[2\alpha\lambda]+4\lambda^2 sin[\alpha]^2\right)sin[\gamma]^2\right)+$$

$$\kappa_2\left(cos\left[2(\alpha+\gamma)\lambda\right]-cos[2\alpha\lambda]+2sin[\gamma\lambda]^2-\lambda^2\left(1+\left(cos[2\alpha]+4cos[2\gamma\lambda]sin[\alpha]^2-2sin[\alpha]sin[\alpha-2\gamma]\right)\right)\right)+$$

$$\kappa_1\begin{pmatrix} cos\left[2(\alpha+\gamma)\lambda\right]+4\lambda^2 cos[\alpha]sin[\alpha-\gamma]sin[\gamma]+cos[2\alpha\lambda]\left(-1+4\lambda^2 sin[\gamma]^2\right)+2sin[\gamma\lambda]^2 \\ +\left(cos[2\alpha\lambda]+cos[2\gamma\lambda]-2cos\left[(-\alpha+\gamma)\lambda\right]^2+4\lambda^2 cos[\alpha-\gamma]sin[\alpha]sin[\gamma]\right)\kappa_2 \end{pmatrix},$$

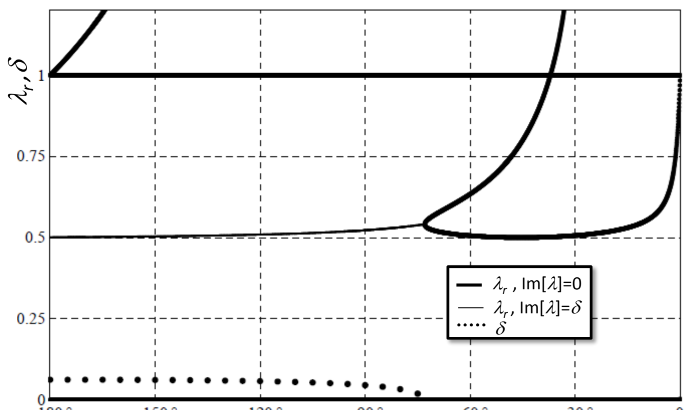
$$H_2 = \left(1-2\lambda^2+2\lambda^2 cos[2\gamma]\right)\left(1-\lambda^2+\lambda^2 cos[2\alpha]-cos[2\alpha\lambda]\right)-$$

$$\kappa_2\begin{pmatrix} cos\left[2(-\alpha+\gamma)\lambda\right]+cos\left[2(\alpha+\gamma)\lambda\right]+cos[2\gamma\lambda]\left(-2+4\lambda^2 sin[\alpha]^2\right) \\ +2\left(\lambda^2 sin[\alpha]^2-sin[\alpha\lambda]^2\right)\kappa_2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Z uzyskanego równania charakterystycznego (7) można wywnioskować, że wykładnik potęgowy zależy od stałych materiałowych i kąta wierzchołkowego karbu. Pierwiastki równania (7) nie mogą być wyznaczone analitycznie. Wyznaczono je numerycznie. W tym celu wykorzystano program obliczeniowy napisany w środowisku Mathematica 9.0.

Na rysunku 3 przedstawiono graficznie wartości własne równania (7), gdzie linią grubą zaznaczono rzeczywiste wykładniki λ (λ= λ_r, Im[λ]=0), linią cienką rzeczywiste wartości zespolonych wykładników λ (λ_r=Re[λ], Im[λ]=δ), natomiast linią punktową części urojone zespolonych wykładników λ (δ = Im[λ]).



Rys. 3. Rozwiązanie równania charakterystycznego (7) dla Γ = 0.033, α=180˚, ν_1=0.37, ν_2=0.35, (płaski stan odkształcenia)

Z otrzymanego rozwiązania wynika, że w zależności od stałych materiałowych i geometrii karbu, istnieje jeden lub więcej członów osobliwy rozwiązania asymptotycznego o wykładniku rzeczywistym lub zespolonym. Co więcej, warto zauważyć, że dla problemu karbu znajdującego się na interfejsie, równania charakterystyczne nie mogą być uzyskane niezależnie dla I i II sposobu obciążania [3, 5]

Otrzymano również wzory analityczne opisujące składniki pola naprężeń w okolicy wierzchołkowej. Ponieważ naprężenia mogą być opisane zespolonym wykładnikiem λ, uogólnione współczynniki intensywności naprężeń zdefiniowano podobnie jak autorzy pracy [32] (dla zagadnienia szczeliny międzyfazowej):

$$\left(\sigma_{\varphi}+\mathrm{i}\,\tau_{r\varphi}\right)_{\varphi=0}=\frac{K_I+iK_{II}}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_r}}\left(\frac{r}{2a}\right)^{\mathrm{i}\delta} cosh[\pi\delta], \tag{8}$$

gdzie wymiar *a* można traktować jako np. wysokość karbu.

Wykorzystując równanie (6), warunki brzegowe i przyjętą uogólnioną definicję współczynników intensywności naprężeń (8), można uzyskać analityczny opis pól naprężeń występujących w obszarze wierzchołka karbu [18]:

$$\sigma_{ik}=\frac{cosh[\pi\delta]\sqrt{K_I{}^2+K_{II}{}^2}}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_r}}\left(\sin\left[arctan\left[\frac{K_{II}}{K_I}\right]+\delta\log\left[\frac{r}{2a}\right]\right]Re\left[f_{ik}^{I}\right]+cos\left[\frac{K_{II}}{K_I}+\delta\,log\left[\frac{r}{2a}\right]\right]Re\left[f_{ik}^{II}\right]\right), \tag{9}$$

gdzie:

$$f_{rr}^{\mathrm{I}}=M^{-1}\begin{pmatrix}(\lambda-1)cos\left[(1+\lambda)\varphi\right]\left(\lambda\,sin[2\epsilon]-sin[2\epsilon\lambda]\right)-(1+\lambda)\left(\lambda-\lambda\,cos[2\epsilon]+cos[2\epsilon\lambda]-1\right)sin\left[(1+\lambda)\varphi\right]\\ +(\lambda-3)\left(\lambda\,sin\left[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi\right]+(1+\lambda)sin[\varphi-\lambda\varphi]-sin[2\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi]\right)\end{pmatrix},$$

$$f_{rr}^{II}=-M^{-1}\begin{pmatrix}(1-\lambda)\left(\lambda cos[2\epsilon]+cos[2\epsilon\lambda]-1-\lambda\right)cos\left[(1+\lambda)\varphi\right]+\\ (\lambda-3)\left(-\lambda cos\left[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi\right]+(\lambda-1)cos[\varphi-\lambda\varphi]+cos[2\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi]\right)-\\ +(\lambda-1)\left(\lambda\,sin[2\epsilon]+sin[2\epsilon\lambda]\right)sin\left[(1+\lambda)\varphi\right]\end{pmatrix},$$

$$f_{\varphi\varphi}^{I}=M^{-1}(1+\lambda)\begin{pmatrix}(1-\lambda)sin\left[(1+\lambda)\varphi\right]+\lambda\,sin\left[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi\right]+\\ (1+\lambda)sin[\varphi-\lambda\varphi]-sin[2\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi]-\lambda\,sin\left[2\epsilon-(1+\lambda)\varphi\right]+sin\left[2\epsilon\lambda-(1+\lambda)\varphi\right]\end{pmatrix},$$

$$f_{\varphi\varphi}^{II}=-M^{-1}\begin{pmatrix}(\lambda-1)\left(-1-\lambda+\lambda\,cos[2\epsilon]+cos[2\epsilon\lambda]\right)cos\left[(1+\lambda)\varphi\right]+(\lambda-1)\left(\lambda\,sin[2\epsilon]+sin[2\epsilon\lambda]\right)sin\left[(1+\lambda)\varphi\right]\\ +(1+\lambda)\left(\lambda\,cos\left[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi\right]-\lambda\,cos[\varphi-\lambda\varphi]+2\,sin[\epsilon\lambda]sin[\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi]\right)\end{pmatrix},$$

$$f_{r\varphi}^{I}=M^{-1}\begin{pmatrix}(1+\lambda)\left(1-\lambda+\lambda\,cos[2\epsilon]-cos[2\epsilon\lambda]\right)cos\left[(1+\lambda)\varphi\right]+\\ (\lambda-1)\left(\lambda\,cos\left[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi\right]-(1+\lambda)cos[\varphi-\lambda\varphi]+cos[2\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi]\right)+\\ +(1+\lambda)\left(\lambda\,sin[2\epsilon]-sin[2\epsilon\lambda]\right)sin\left[(1+\lambda)\varphi\right]\end{pmatrix},$$

$$f_{r\varphi}^{II}=M^{-1}(\lambda-1)\begin{pmatrix}(1+\lambda)sin\left[(1+\lambda)\varphi\right]-\lambda\,sin\left[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi\right]\\ -(\lambda-1)sin[\varphi-\lambda\varphi]-sin[2\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi]+\lambda\,sin\left[2\epsilon-(1+\lambda)\varphi\right]+sin\left[2\epsilon\lambda-(1+\lambda)\varphi\right]\end{pmatrix},$$

$M=2\left(\lambda^2-\lambda^2 cos[2\epsilon]+cos[2\epsilon\lambda]-1\right)$, $\epsilon=\alpha$ -dla materiału 1 i $\epsilon=-\gamma$ dla materiału 2.

Poniżej podano szczególną postać pól naprężeń dla kąta φ=0, czyli wzdłuż linii interfejsu.

$$\sigma_{\varphi 1,2_{\varphi=0}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{K_I{}^2+K_{II}{}^2}\,r^{\lambda_r-1}cos\left[arctan\left[\frac{K_{II}}{K_I}\right]+\delta\,ln\left[\frac{r}{2a}\right]\right]cosh[\pi\delta],$$

$$\tau_{r\varphi 1,2_{\varphi=0}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{K_I{}^2+K_{II}{}^2}\,r^{\lambda_r-1}\,sin\left[arctan\left[\frac{K_{II}}{K_I}\right]+\delta\,ln\left[\frac{r}{2a}\right]\right]cosh[\pi\delta], \tag{10}$$

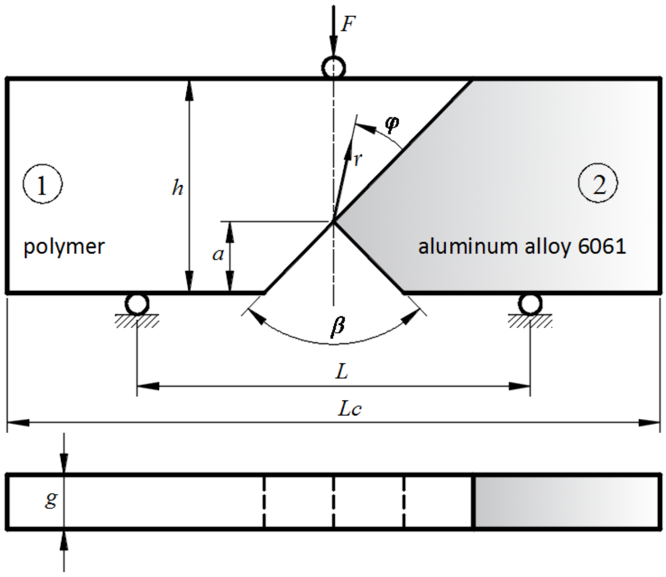
W sytuacji, gdy wykładnik λ opisany jest liczbą rzeczywistą wzory (10) uproszczą się do następującej postaci:

$$\sigma_{\varphi 1,2_{\varphi=0}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_I\;r^{\lambda_r-1},\;\tau_{r\varphi 1,2_{\varphi=0}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_{II}\;r^{\lambda_r-1}\;. \tag{11}$$

Do ilościowego opisu naprężeń niezbędne jest wyznaczenie wartości współczynników K_j. Wyznaczono je na podstawie porównania uzyskanych rozwiązań analitycznym z naprężeniami otrzymanymi z rozwiązania MES. W związku z tym, że głównym celem prezentowanej pracy była eksperymentalna weryfikacja możliwości stosowania kryterium McClintocka, wykonano modele MES próbek, których wytrzymałość została zbadana doświadczalnie w pracy [11,12].

4. Próbki badawcze i model MES

W symulacjach numercznych modelowano próki, których geometria i właściwości materiałowe były identyczne jak próbek użytych w badaniach eksperymrntalnych opisanych w pracy [11, 12].



Rys. 4 Greometraia i sposób obciążenia próbek z karbem strukturalnym.

Analizowano dwa rodzaje próbek:
- element 1 wykonany z PC (Poliwęglanu) oraz komponent 2 ze stopu aluminium 6061;
- element 1 wykonany z PMMA (Poli (metakrylan metylu)), natomiast komponent 2 ze stopu aluminium 6061.

Komponenty zostały sklejone za pomocą kleju Weld-on® 10. Klej został tak dobrany, aby jego właściwości sztywnościowe były zbliżone do właściwości polimerów. Dzięki temu możliwe było spełnienie założenia, że modelowany jest bi-materiał, a nie kompozyt trójwarstwowy. W takiej sytuacji interfejs klejowy można było potraktować, jako warstwę bez żadnej grubości, ale o różnej wytrzymałości i odporności na kruche pękanie niż polimery lub stop aluminium rozpatrywane oddzielnie.

Aby uzyskać minimalną grubość kleju, próbki zostały połączone pod wysokim ciśnieniem za pomocą specjalnego uchwytu. Pozostawiono je do utwardzenia na okres 24 godzin, aby uzyskać wymaganą wytrzymałość. Grubość warstwy klejącej nie została zmierzona. Takie informacje nie były potrzebne do prognozowania odporności na kruche pękanie, przy założeniu, że analizowana struktura jest bi-materiałem. Warto zauważyć, że stosując wybrany klej w przypadku, gdy łączone byłyby dwa różne stopy metali np. stal i stop aluminium, pominięcie grubości warstwy kleju i traktowanie takiej struktury, jako bi-materiał byłoby niedopuszczalne. W takim przypadku do przewidywania obciążenia krytycznego można wykorzystać podejście oparte o kryterium Traction-Separation [25]. Mianowicie warstwa kleju powinna być modelowana przy użyciu specjalnych elementów skończonych (cohesive elements).

Wykonane analizy miały na celu określenie możliwości zastosowania zaproponowanego kryterium pękania dla struktur bi-materiałowych w sytuacji, gdy w płaszczyźnie pękania (na interfejsie) występuję złożony stan naprężeń, a karb strukturalny generuje osobliwe pola naprężeń. Przy czym pola naprężeń, w zależności od cech geometryczno-materiałowych struktury, opisane mogą być za pomocą rzeczywistych lub zespolonych wykładników potęgowych λ. W badaniach wykorzystano próbki o różnym kącie wierzchołkowym karbu. Kąty wierzchołkowe β dobrano w ten sposób, żeby uzyskać przypadki, gdy naprężenia opisane są zarówno rzeczywistym jak i zespolonym wykładnikiem potęgowym λ. Co więcej zmienność kątów wierzchołkowych pozwoliła uzyskać różne proporcję naprężeń stycznych i normalnych występujących w płaszczyźnie połączenia. We wszystkich próbkach przyjęto jednakową wysokość karbu (mierzoną od dolnej powierzchni próbki), wymiary gabarytowe oraz położenie punktów podparcia i obciążania w próbie trójpunktowego zginania. Miało to na celu zapewnienie jednakowych warunków brzegowych (mocowania i obciążania) dla wszystkich badanych próbek. Wymiary gabarytowe dobrano arbitralnie uwzględniając możliwości stanowiska badawczego oraz przyrządu wykorzystywanego do klejenia.

Wymiary próbek wynosiły odpowiednio: długość całkowita Lc=254 mm, odległość między podporami L=90 mm, wysokość karbu a=19.1 mm, wysokość próbki h=50.8 mm, grubość g=5.4 mm. Analizowano trzy rodzaje próbek, o różnym kącie wierzchłkowym karbu strukturalnego: β= 30^0 , β= 90^0 i β= 120^0. Próbki użyte w badaniach przedstawiono w tabeli 1. Dane materiałowe poszczególnych komponentów podano w tabeli 2.

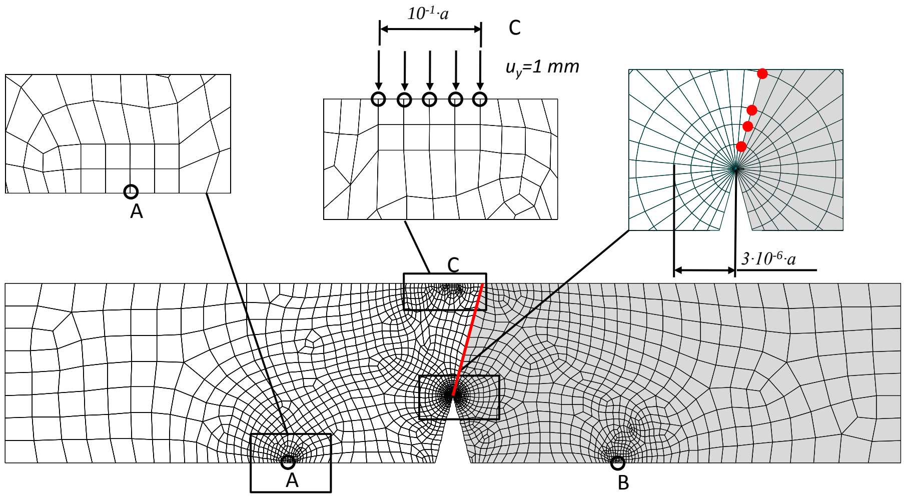
Tab. 1 Próbki badawcze

Lp.	próbki badawcze	kąt wierzchołkowy karbu β[°]
1	PC/ stop aluminium 6061	30
2	PC/ stop aluminium 6061	90
3	PC/ stop aluminium 60611	120
4	PMMA/ stop aluminium 6061	30
5	PMMA stop aluminium 6061	90
6	PMMA/ stop aluminium 6061	120

Tab. 2 Właściwości mechaniczne poszczególnych komponentów próbek [12]

	moduł Younga E [GPa]	Współczynnik Poissona ν
stop aluminium 6061	70	0.35
PC	2.38	0.37
PMMA	3.79	0.37

Badane próbki (rys.4) zamodelowano za pomocą MES, wykorzystując program ANSYS. Na rysunku 5 pokazano, dla wybranej próbki, podział na elementy skończone oraz warunki brzegowe.



Rys. 5. Podział na elementy skończone oraz warunki mocowania i obciążenia próbki z karbem o kącie wierzchołkowym β= 30^0, kolorem czerwonym zaznaczono węzły, z których naprężenia zostały wykorzystane do obliczenia współczynników intensywności naprężeń

Płaskie próbki opisano siatką czworokątnych, ośmiowęzłowych elementów skończonych, o zwiększonym zagęszczeniu w okolicy wierzchołkowej, z trójkątnymi elementami specjalnymi [35] otaczającymi punkt osobliwy (rys. 5). Całkowita długość bocznych krawędzi ostatnich trzech elementów zależała od wysokości karbu *a* i założono, że wynosi 3 10^{-6} *a* dla wszystkich próbek. Ze względu na dużą gęstość siatki elementów skończonych w obszarze wierzchołkowym karbu, przygotowane modele zawierały około 10000 elementów skończonych. Jak już wspomniano wcześniej, próbki można traktować jako strukturę bi-materiałową. Dlatego warstwa adhezyjna nie została uwzględniona w przygotowanych modelach numerycznych. Jeśli chodzi o warunki połączenia poszczególnych komponentów, to węzły leżące na interfejsie były wspólne dla obydwu materiałów (nie ma możliwości poślizgu między komponentami na interfejsie).

Ze względu na fakt, że ciężko jest określić rzeczywiste warunki tarciowo-kontaktowe, między podporami a materiałem próbki, jakie występują podczas próby trójpunktowego zginania należało przyjąć pewne uproszczenia. Zatem przetestowano dwa sposoby zamocowania:

I) podpory przesuwne (odebrana możliwość przemieszczenia pionowego w węzłach usytuowanych w punktach podparcia A i B);

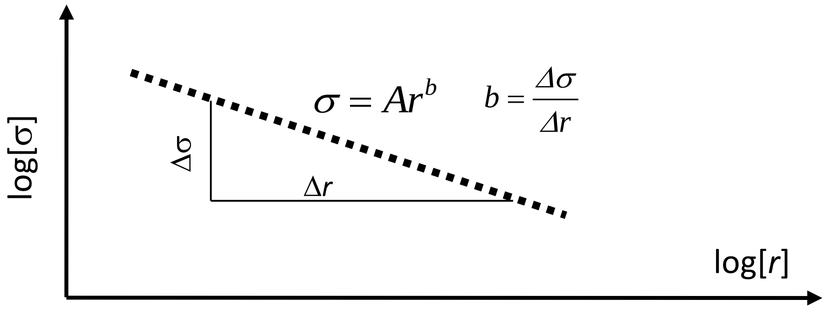
II) podpory nieprzesuwne (odebrana możliwość przemieszczenia pionowego i poziomego w węzłach usytuowanych w punktach podparcia A i B).

Co się tyczy warunków obciążenia, to próbki obciążano stałym przemieszczeniem pionowym u_y = 1mm, aplikowanym w wybranych węzłach (punkt C). Siła obciążająca *F* została określona na podstawie naprężeń w węzłach, w których aplikowano przemieszczenie u_y.
Obliczenia numeryczne wykonano dla dwóch przypadków stanu naprężeń: płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia.

Jak już wspomniano wcześniej, w modelach *MES* klej, jako oddzielna warstwa materiału, nie został uwzględniony. Mimo to możliwe było uwzględnienie właściwości wytrzymałościowych interfejsu w zastosowanym kryterium pękania. Na podstawie symulacji numerycznych wyznaczono współczynniki intensywności naprężeń. Wykorzystano je do obliczenia wartości przewidywanej funkcji zniszczenia (opisanej dalszej części pracy), którą następnie porównano z wartościami krytycznymi. Właściwości wytrzymałościowe interfejsu w badanych próbkach zostały uwzględnione w ten sposób, że wartości krytyczne funkcji zniszczenia i parametru ρ_c zostały określone w oparciu o wytrzymałość na rozciąganie i odporność na pękanie warstwy adhezyjnej (Tab. 3). Oba parametry zostały określone eksperymentalnie dla bi-materiałów wykonanych z PMMA i stopu aluminium, a także PC i stopu aluminium.

5. Opis metody wykorzystanej do wyznaczania uogólnionych współczynników intensywności naprężeń

Do wyznaczenia wartości współczynników K_j wykorzystano metodę ekstrapolacji. Metoda ta, w przeciwieństwie np. do metod energetycznych [37] czy też metod opartych na stosowaniu specjalnych elementów skończonych [4], jest mniej skomplikowana. Wadą tej metody jest konieczność stosowania dużego zagęszczenia siatki podziału na elementy skończone w okolicy wierzchołkowej koncentratora naprężeń. Dodatkowo na dokładność wyników ma wpływ wybór obszaru, w którym porównywane jest rozwiązanie numeryczne z analitycznym. Niedogodność tą można wyeliminować poprzez użycie w opisie analitycznym członów wyższych rzędów [17, 33, 24] lub ustalenie odpowiedniego kryterium wyboru węzłów, dla których wartości naprężeń otrzymane z MES porównuje się ze znanym rozwiązaniem analitycznym. Kryterium takie, określono w pracach [20] (dla zagadnienia szczeliny międzyfazowej) oraz [18] (dla karbu strukturalnego). Jak powszechnie wiadomo, jeżeli wykres naprężeń typu -$\sigma = Ar^b$ -w układzie podwójnie logarytmicznym jest liniowy (rys. 6), to gradient naprężeń wynosi *b*.



Rys. 6. Graficzna interpretacja osobliwych pól naprężeń o teoretycznym gradiencie *b*

Zatem, wyznaczając współczynniki intensywności naprężeń, porównuje się rozwiązania numeryczne i analityczne tylko dla węzłów o gradiencie równym *b*.

Dla zagadnienia karbu strukturalnego, składowe naprężeń zawsze uzależnione są jednocześnie od współczynników K_I i K_{II}, w związku z tym, aby skorzystać z powyższego kryterium, konieczne jest określenie tzw. 'naprężeń kombinowanych' [18]:

$$\sigma_{1(r,0)} = Sech[\pi\delta]\left(\sigma\, cos\left[\delta\, ln\left[\frac{r}{2a}\right]\right] + \tau\, sin\left[\delta\, ln\left[\frac{r}{2a}\right]\right]\right) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_r}}, \tag{12}$$

$$\sigma_{2(r,0)} = \left(\tau\, cos\left[\delta\, log\left[\frac{r}{2a}\right]\right] - \sigma\, sin\left[\delta\, log\left[\frac{r}{2a}\right]\right]\right) Sech[\pi\delta] = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_r}}, \tag{13}$$

gdzie- σ,τ to odpowiednio naprężenia obwodowe i styczne uzyskane z MES.

Zgodnie z przyjętym kryterium przy wyznaczaniu poszukiwanych współczynników pod uwagę brano tylko pary węzłów gradiencie naprężeń $b = (\lambda_r - 1) \pm 0.01$.

'Naprężenia kombinowane' $\sigma_{i(r,0)}$ w odległości r_n i r_{n+1} od wierzchołka karbu można zapisać w następujący sposób:

$$\sigma_{j(r_n,0)} = \frac{K_{j(r)}}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_r}}(1+cr_n), \sigma_{j(r_{n+1},0)} = \frac{K_{j(r)}}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_r}}(1+cr_{n+1}). \tag{14}$$

Wykorzystując zależności (12÷14) po prostych przekształceniach matematycznych otrzymuje się wzory (15) umożliwiające wyznaczenie współczynników $K_{j(r)}$ (w pewnej odległości od wierzchołka karbu):

$$\begin{aligned} K_{I(r)} &= \frac{\sqrt{2\pi}\left(r_n r_{n+1}\right)^{1-\lambda_r}}{r_n - r_{n+1}} sech\left[\pi\delta\right] \left(\begin{array}{l} r_n^{\lambda_r}\left(\sigma_{(r_{n+1})} cos\left[\delta\, ln\left[\frac{r_{n+1}}{2a}\right]\right] + \tau_{(r_{n+1})} sin\left[\delta\, ln\left[\frac{r_{n+1}}{2a}\right]\right]\right) \\ -r_{n+1}^{\lambda_r}\left(\sigma_{(r_n)} cos\left[\delta\, ln\left[\frac{r_n}{2a}\right]\right] + \tau_{(r_n)} sin\left[\delta\, ln\left[\frac{r_n}{2a}\right]\right]\right) \end{array} \right) \\ K_{II(r)} &= \frac{\sqrt{2\pi}\left(r_n r_{n+1}\right)^{1-\lambda_r}}{r_n - r_{n+1}} sech\left[\pi\delta\right] \left(\begin{array}{l} r_n^{\lambda_r}\left(\tau_{(r_{n+1})} cos\left[\delta\, ln\left[\frac{r_{n+1}}{2a}\right]\right] - \sigma_{(r_{n+1})} sin\left[\delta\, ln\left[\frac{r_{n+1}}{2a}\right]\right]\right) \\ -r_{n+1}^{\lambda_r}\left(\tau_{(r_n)} cos\left[\delta\, ln\left[\frac{r_n}{2a}\right]\right] - \sigma_{(r_n)} sin\left[\delta\, ln\left[\frac{r_n}{2a}\right]\right]\right) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Obliczone współczynnik, dla wyselekcjonowanych węzłów, za pomocą wzoru (15) aproksymuje się linią prostą i w ten sposób wyznacza się uogólnione współczynniki intensywności naprężeń $K_{j(r=0)}$.

Warto zauważyć, że przypadku, gdy wykładnik potęgowy λ jest liczbą rzeczywistą ($\delta = 0$) zależność (15) upraszcza się do postaci przedstawionej w pracy [14].

$$K_I = \frac{\sqrt{2\pi}\left(r_n r_{n+1}\right)^{1-\lambda_r}\left(r_{n+1}^{\lambda_r}\sigma_{(r_n)} - r_n^{\lambda_r}\sigma_{(r_{n+1})}\right)}{r_{n+1} - r_n}. \quad (16)$$

6. Wyniki badań oraz ich dyskusja

Jak już wspomniano do zweryfikowania zmodyfikowanego kryterium McClintocka niezbędna jest znajomość jakościowego i ilościowego opisu pól naprężeń występujących w płaszczyźnie pękania, parametrów krytycznych i danych eksperymentalnych (obciążenie niszczące). Obciążenia niszczące zaczerpnięto z prac [11, 12]. Ponieważ po zainicjowaniu procesu pękania pęknięcie propagowało wzdłuż interfejsu, to w testowanym kryterium użyto parametrów krytycznych charakteryzujących właściwości warstwy adhezyjnej, dla których określono długość strefy zniszczenia ρ_c, zgodnie ze wzorem (5). Metody wyznaczania krytycznych parametrów warstwy adhezyjnej omówiono w pracach [7, 10, 22, 25].

Tab. 3. Właściwości wytrzymałościowe warstwy adhezyjnej [10]

	wytrzymałość na rozciąganie σ_c [MPa]	odporność na pękanie K_{Ic} [MPa m $^{0.5}$]	dystans krytyczny ρ_c [mm]
PC/ stop aluminium 6061	11.35	0.24	0.071
PMMA/ stop aluminium 6061	12.85	0.28	0.075

W celu określenia ilościowego opisu pól mechanicznych, obliczono uogólnione współczynniki intensywności naprężeń K_j. Wyznaczone je numerycznie metodą ekstrapolacji, wykorzystując dane uzyskane z MES i rozwiązania analityczne. Metodę ekstrapolacji, modelowanie MES i rozwiązanie analityczne przedstawiono i omówiono wcześniejszych częściach pracy. Wartości obliczonych współczynników przedstawiono w tabelach 4-5.

Tab. 4 Wartości uogólnionych współczynników intensywności naprężeń K_j oraz obciążania F, przy którym obliczano współczynnik K_j
PC /stop aluminium 6061

β [°]	Warunki podparcia					
	podpory przesuwne			podpory nieprzesuwne		
	K_I [Pa m$^{1-\lambda r}$]	K_{II} [Pa m$^{1-\lambda r}$]	F [N]	K_I [Pa m$^{1-\lambda r}$]	K_{II} [Pa m$^{1-\lambda r}$]	F [N]
30	6621327.4* 5654415.8**	16207.8* 565904.7**	4139.0* 3508.3**	2670172.3* 2337935.8**	334892.9* 576351.2**	5598.9* 4718.3**
90	6953117.8* 7929593.6**	-2675922.6* -1851771.4**	3532.6* 3004.2**	2654647.7* 3089615.1**	-1281221.0* -622169.7**	5071.6* 4276.7**
120	3224964.6* 3206237.2**	-4631416.6* -6451442.2**	3345.1* 2853.9**	1156739.9* 1185145.1**	-1821056.5* -2538667.0**	5001.9* 4225.0**
*-płaski stan odkształcenia, **- płaski stan naprężenia						

Tab. 5 Wartości uogólnionych współczynników intensywności naprężeń K_j oraz obciążania F, przy którym obliczano współczynnik K_j
PMMA/stop aluminium 6061

β [°]	Warunki podparcia					
	podpory przesuwne			podpory nieprzesuwne		
	K_I [Pa m$^{1-\lambda r}$]	K_{II} [Pa m$^{1-\lambda r}$]	F [N]	K_I [Pa m$^{1-\lambda r}$]	K_{II} [Pa m$^{1-\lambda r}$]	F [N]
30	10590286.9* 9092521.1**	88797.8* 449519.4**	6510.0* 5522.1**	4304874.73* 3774299.6**	466048.7* 845462.9**	8818.2* 7435.5**
90	15655266.1* 13838295.9**	-8259321.6* -4731359.1**	5572.9* 4742.3**	6032440.86* 5427305.2**	-1915526.6* -578767.5**	8002.9* 6753.4**
120	4796910.9* 4040648.9**	-6494991.4* -6507052.4**	5279.8* 4507.1**	1798019.9* 1525983.9**	-2641592.9* -2594161.8**	7892.7* 6671.4**
*-płaski stan odkształcenia, **- płaski stan naprężenia						

Wartości wykładników potęgowych λ, otrzymane z równania (7), dla stałych materiałowych podanych w tabeli 2, zestawiono w tabeli 6.

Tab. 6 Wartości wykładników potęgowych λ

β [°]	Typ próbki			
	PC /stop aluminium 6061		PMMA/stop aluminium 6061	
	λ_r	δ	λ_r	δ
30	0.5032* 0.5033**	0.0611* 0.0958**	0.5051* 0.5052**	0.0579* 0.0913**
90	0.5222* 0.5231**	0.0450* 0.0810**	0.5339* 0.5352**	0.0235* 0.0646**
120	0.5058* 0.5324**	0* 0**	0.5003* 0.5071**	0* 0**
*-płaski stan odkształcenia, **- płaski stan naprężenia				

Jak już wspomniano, jeżeli w płaszczyźnie pękania występują zarówno naprężenia styczne, jak i normalne, w celu prognozowania procesu pękania można zastosować ekwiwalentny współczynnik intensywności naprężeń K_E. Dla analizowanego przypadku został on określony (na podstawie analitycznego opisu lokalnych pól naprężeń) za pomocą wzoru (17):

$$K_E = cosh(\pi\delta)\sqrt{K_I^{\,2} + K_{II}^{\,2}}, \tag{17}$$

Krytyczną wartość współczynnika K_{Ec} można wyznaczyć poprzez rozwiązanie poniższego układu równań (18):

$$\frac{\sigma_\varphi(\rho_c,0)}{\sigma_c}=1, \left(\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0,r=\rho_c}=0. \tag{18}$$

Po rozwiązaniu układu równań (18) – z wykorzystaniem wzorów (5), (9) i (10) uzyskuje się zależność, pozwalającą wyznaczyć wartość krytycznego współczynnika K_{Ec} (19):

$$K_{Ec}=(2\pi)^{\lambda_r-\frac{1}{2}}\left(\frac{K_{Ic}{}^2}{\sigma_c^2}\right)^{1-\lambda_r}\sigma_c. \tag{19}$$

Warto zauważyć, że dla przypadku rozciąganego elementu ze szczeliną ($\lambda_r=0.5$) lub z karbem, o kącie wierzchołkowym równym π ($\lambda_r=1$), zależność (19) upraszcza się odpowiednio do następujących postaci: $K_{Ec}=K_{Ic};K_{Ec}=\sqrt{2\pi}\sigma_c$, co jest zgodne z danymi literaturowymi.
Zakładając, że proces pękania zostanie zainicjowany, w sytuacji, gdy:

$$K_E=K_{Ec}, \tag{20}$$

przewidywana siła krytyczna może być obliczona na podstawie następującego warunku:

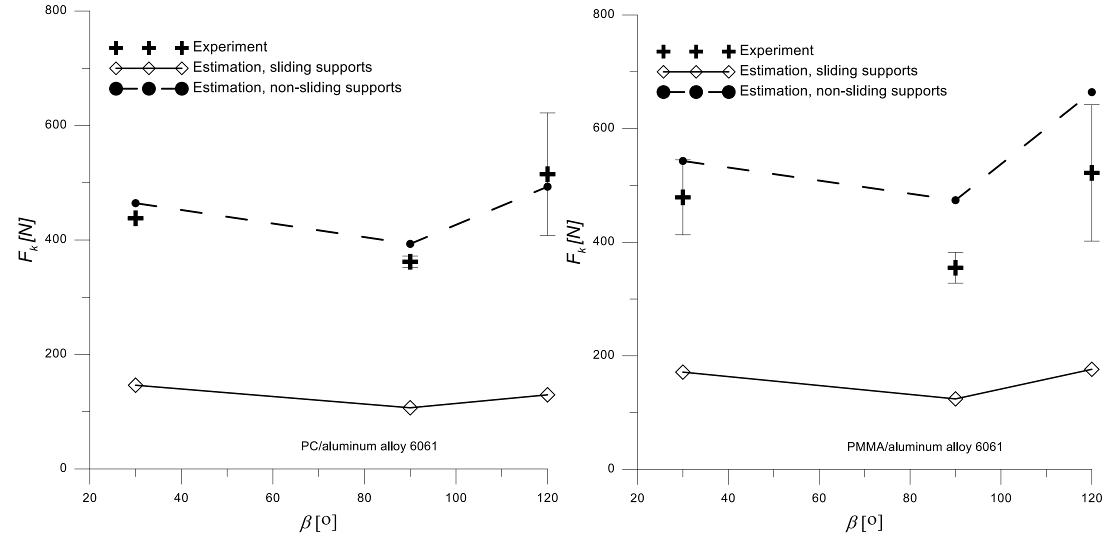
$$F_k=\frac{K_{Ec}F}{K_E}, \tag{21}$$

gdzie F jest obciążeniem, przy którym obliczano ekwiwalentny współczynnik intensywności naprężeń K_E (17).

Jak już wspomniano wcześniej, trudno jest odzwierciedlić rzeczywiste warunki tarciowo- kontaktowe [2, 15] występujące w miejscu podparcia przy numerycznym modelowaniu trójpunktowej próby zginania. Dlatego też na rysunku 7 (dla płaskiego stanu naprężenia) i tabela 7 (dla płaskiego stanu odkształcenia) podano wartości prognozowanych sił F_k (21) określonych dla dwóch wariantów zamocowania próbek w modelach MES. Oczywistym jest fakt, że rzeczywista siła krytyczna przyjmie wartości z zakresu ograniczonego przez siły oszacowane przy stosowaniu podparcia przesuwnego i nieprzesuwnego.

Tab. 7 Wartości sił krytycznych F_k (21) obliczone dla różnych typów próbek, płaski stan odkształcenia

β [°]	PC/ stop aluminium 6061		PMMA/ stop aluminium 6061	
	experiment [12]	estimation (21)	experiment [12]	estimation (21)
30	438±1	151.9* 505.7**	479±66	177.7* 588.6**
90	362±10	139.2* 403.3**	355±27	121.3* 487.2**
120	515±107	150.3* 587.9**	522±120	183.6* 693.6**
*- podpory przesuwne, **- podpory nieprzesuwne				



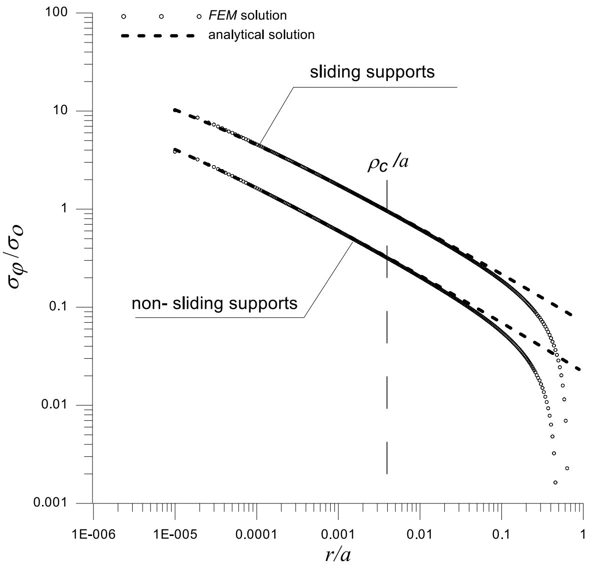
a b

Rys. 7 Porównanie krytycznych wartości obciążeń, uzyskanych z testowanych kryteriów z wartościami otrzymanymi z badań eksperymentalnych [12], a) PC/ stop aluminium 6061, b) PMMA/ stop aluminium 6061, płaski stan naprężenia

Wartości sił krytycznych określone za pomocą wzoru (21) zostały porównane z danymi eksperymentalnymi, co pokazano na rys. 7 i w tabeli 6. Eksperymentalne obciążenie inicjujące proces pękania jest średnią wartością siły niszczącej określonej na podstawie, co najmniej trzech prób wykonanych dla każdego typu próbki.

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że rozkład prognozowanych sił krytycznych jest zgodny z danymi eksperymentalnymi. Lepszą zbieżność wyników, zarówno dla płaskiego stanu naprężenia, jak i odkształcenia, uzyskano przy zastosowaniu w modelach MES podpór nieprzesuwnych.

Przy określaniu sił krytycznych w opisie analitycznym użyto tylko pierwszego członu osobliwego rozwiązania asymptotycznego. Używanie członów wyższych rzędów nie było konieczne ze względu na fakt, że rozwiązania analityczne (przy użyciu tylko pierwszego członu osobliwego) i numeryczne zgadzały się ze sobą w obszarze większym niż krytyczny dystans ρ_c, co pokazano na rysunku 8.



Rys. 8 Unormowane naprężenia obwodowe w funkcji *r/a* dla próbki PC/ stop aluminium 6061specimen z kątem wierzchołkowym β= 30^0, $\sigma_0 = 3FL/\left(2gh^2\right)$, płaski stan naprężenia

Warto zauważyć, że prognozowanie odporności na kruche pękanie za pomocą koncepcji ekwiwalentnego współczynnika intensywności naprężeń jest dość skomplikowane. Konieczne jest bowiem wyznaczenie wykładników λ i uogólnionych współczynników intensywności naprężeń K_j. W przypadku materiałów jednorodnych nie stanowi to poważnego problemu, ponieważ w literaturze dostępne są przybliżone formuły, które pozwalają na obliczenie uogólnionych współczynników intensywności naprężeń, a wykładnik λ zależy tylko od kąta wierzchołka karbu i można go łatwo określić (wartości wykładników można znaleźć np. w pracy [28]). W przypadku bi-materiału z karbem usytuowanym na interfejsie, zarówno K_j, jak i λ zależą od cech geometryczno- materiałowych struktury i powinny być wyznaczone indywidualnie dla każdego analizowanego przypadku. Ze względu na powyższe niedogodności, w artykule podjęto próbę opracowania procedury prognozowania odporności na kruche pękanie, która może być bardziej praktyczna z inżynierskiego punktu widzenia.

Autorzy wielu prac, np. [30] wskazują, że krytyczna wartość współczynnika uwalniania energii (dla zagadnienia bi-materiału)) zależy od proporcji naprężeń stycznych i normalnych występujących w płaszczyźnie pękania. Dlatego też wartości krytyczne σ_c również muszą być uzależnione od takiego czynnika. W związku z tym warunek (3) można zapisać w następujący sposób (22):

$$\sigma_\varphi(\rho_c, 0) = \sigma_c(\psi) \tag{22}$$

Biorąc pod uwagę wzajemne zależności między poszczególnymi parametrami mechaniki pękania zaproponowano następującą formę funkcji uzależniającej naprężenia krytyczne od proporcji naprężeń stycznych i normalnych ψ :

$$\sigma_c(\psi) = \sigma_c / \sqrt{1+\psi^2}, \tag{23}$$

gdzie: $\psi = \dfrac{\tau_{r\varphi}(\rho_c, 0)}{\sigma_\varphi(\rho_c, 0)}$.

Warto zauważyć, że zaproponowana modyfikacja kryterium pękania (23) jest zbieżna z koncepcją przedstawioną w pracy [34]. Autor pracy [34] sugeruje zastosowanie, w procesie prognozowania inicjacji pękania, dodatkowego współczynnika, uwzgledniającego wpływ ilościowego udział naprężeń stycznych i normalnych. Współczynnik ten nie jest stały i zależy od geometrii elementu i warunków obciążeniowych. Wartość siły krytycznej, wykorzystując kryterium (23), można obliczyć z zależności (24):

$$F_k = \frac{\sigma_c(\psi) F}{\sigma_\varphi(\rho_c, 0)}. \tag{24}$$

Siła krytyczna F_k (24) może być określona na dwa sposoby:

- przy wykorzystaniu zarówno rozwiązań analitycznych (opis jakościowy (9, 10)), jak i numerycznych (opis ilościowy (15));
- przy wykorzystaniu tylko rozwiązania numerycznego (określenie naprężeń $\tau_{r\varphi}(\rho_c, 0)$ i $\sigma_\varphi(\rho_c, 0)$ np. przy użyciu MES).

Oczywiście sposób drugi, z praktycznego punktu widzenia, jest mniej skomplikowany i zalecany do stosowania w obliczeniach inżynierskich.

Jednak w prezentowanej pracy zastosowano podejście pierwsze. Podyktowane to było koniecznością sprawdzenia zbieżności rozwiązań uzyskiwanych ze wzorów (21) i (24). Ze względu na fakt, że siły krytyczne (21) zostały oszacowane przy użyciu rozwiązań analitycznych i numerycznych, to identyczne podejście powinno zostać użyte przy prognozowaniu z wykorzystaniem zależności (24). W związku z tym wykorzystując rozwiązania analityczne i numeryczne wyznaczono siły krytyczne F_k (24) dla wszystkich analizowanych próbek. Uzyskane wyniki były identyczne z wynikami uzyskanymi na podstawie wzoru (21) i w związku z tym nie było potrzeby zamieszczenia ich w prezentowanej pracy.

7. Podsumowanie i wnioski

W pracy analizowano proces inicjacji pęknięć w strukturze bi-materiałowej z karbem usytuowanym na interfejsie. Zweryfikowano możliwość zastosowania kryterium McClintocka do prognozowania odporności na pękania tego typu elementów konstrukcyjnych. Stosowanie tego kryterium wymaga znajomości ilościowego i jakościowego opisu pól naprężeń wokół wierzchołka koncentratora. Zatem uzyskano opis analityczny i przedstawiono metodykę jego otrzymywania. Ponadto omówiono metodę wyznaczania uogólnionych współczynników intensywności naprężeń, uwzględniającą jakościowy charakter osobliwości pól generowanych przez karb strukturalny, i dla wybranych przypadków wyznaczono ich wartości.

Uzyskane rozwiązania analityczne i numeryczne pozwoliły na sformułowanie postaci kryterium pękania i parametrów kryterialnych. Opracowano dwie postacie kryterium pękania, oparte na:

-ekwiwalentnym współczynniku intensywności naprężeń;

-wprowadzeniu modyfikacji w kryterium McClintocka polegającej na uzależnieniu naprężeń krytycznych od proporcji naprężeń stycznych i normalnych występujących w płaszczyźnie pękania.

Wykonane analizy pokazały, że z obydwu postaci kryterium pękania uzyskuje się identyczne wyniki prognozowania sił krytycznych. Jednak praktycznego punktu widzenia, druga postać kryterium pękania jest korzystniejsza. Wynika to z faktu, że w prognozowaniu pękania można wykorzystać tylko naprężenia wyznaczone np. za pomocą *FEM* bez konieczności wyznaczania współczynników intensywności naprężeń.

Wartości obciążeń krytycznych wynikających z hipotez porównano z wartościami uzyskanymi z badań eksperymentalnych. Ze względu fakt, że przy modelowaniu numerycznym próby trójpunktowego zginania nie można odzwierciedlić rzeczywistych warunków tarciowo-kontaktowych, jakie występują w miejscu podparcia próbek, wyznaczono jedynie przedział, w którym znajdują się prognozowane sił krytyczne. W zdecydowanej większości analizowanych przypadków siły krytyczne wyznaczone eksperymentalnie znajdowały się w przedziale określonym za pomocą testowanego kryterium. Co więcej, trend zmienności prognozowanych sił zgadzał się z danymi eksperymentalnymi. Pozwala to sądzić, że analizowane kryterium może być stosowane do prognozowania inicjacji procesu pękania elementów z karbem usytuowanym na interfejsie. Jednak w celu jednoznacznego stwierdzenia takiego faktu, należałoby wykonać dodatkowe badania eksperymentalne. Takie badania powinny być zaplanowane w ten sposób, żeby można było w modelowaniu numerycznym odzwierciedlić rzeczywiste warunki mocowania i obciążenia próbek badawczych. Wykonanie takich badań i ponowne zweryfikowanie przydatności hipotezy McClintocka będzie celem kolejnej pracy autora.

*Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr **S/WM/2/13** i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.*

References

1. Ayatollahi M.R., Torabi A.R. A criterion for brittle fracture in U-notched components under mixed mode loading. Engineering Fracture Mechanics 2009; 39: 1883–1896.

2. Baranowski P., Damaziak K., Małachowski J. Brake system studies using numerical methods, Eksploatacja i Niezawodnosc – Maintenance and Reliability 2013; 15 (4): 337–342.
3. Bogy D.B., Wang K.C. Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials. International Journal of Solids and Structures 1971; 1: 993-1005.
4. Byskov E. Calculation of stress intensity factors using finite element method with cracked elements. International Journal of Fracture Mechanics 1970; 6(2): 59-167.
5. Carpinteri, A., Paggi M. Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems. Engineering Fracture Mechanics 2007; 74: 59–74.
6. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical Transactions series A 1920; 221: 163-198.
7. Kinloch A. J. Adhesion and adhesives, Science and Technology. London: Springer, 1987.
8. Kirsch G. Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre. Verein deutscher Ingenieure Zeitschrift 1898; 29: 797-807.
9. Knesl Z., Klusak J., Nahlik L. Crack initiation criteria for singular stress concentrations, Part I: A Universal assessment of singular stress concentrations, Engineering Mechanics 2007; 14(6): 399–408.
10. Krishnan A., Xu LR. Systematic evaluation of bonding strengths and fracture toughnessess of adhesive joints. The Journal of Adhesion 2011; 87(1): 53–71.
11. Krishnan A, Xu LR. Experimental studies on the interaction among cracks, notches and interfaces of bonded polymers. International Journal of Solids and Structures 2013, 50: 1583–1596.
12. Krishnan A., Roy Xu L. An experimental study on the crack initiation from notches connected to interfaces of bonded bi-materials. Engineering Fracture Mechanics 2013; 111: 65–76.
13. Leguillon D. A criterion for crack nucleation at a notch in homogeneous materials. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB – Mechanics 2001; 329(2): 97–102.
14. Li Y., Song M. Method to calculate stress intensity factor of V-notch in bi-materials. Acta Mechanica Solida Sinica 2008; 21(4): 337–346.
15. Łukaszewicz A. Nonlinear numerical model of heat generation in the rotary friction welding, Journal of Friction and Wear 2018; 39 (6): 612-619.
16. McClintock F. A. Ductile fracture instability in shear. Journal of Applied Mechanics 1958; 25: 582-588.
17. Mieczkowski G. Description of stress fields and displacements at the tip of a rigid, flat inclusion located at interface using modified stress intensity factors. Mechanika 2015; 21(2): 91-98.
18. Mieczkowski G. Stress fields and fracture prediction for adhesively bonded bi-material structure with sharp notch located on the interface. Mechanics of Composite Materials 2017; 53(3): 305-320.
19. Mieczkowski G. Stress fields at the tip of a sharp inclusion on the interface. Mechanics of Composite Materials 2016; 52(5):601-610.
20. Naik R. A., Crews J. H. Determination of stress intensity factors for interface cracks under mixed-mode loading. Paper presented at the ASTM National Symposium on Fracture Mechanics, June 30-July 2,1992, Gatlinburg, TN.
21. Parton V.Z., Perlin P.I. Mathematical methods of the theory of elasticity. Moscow: Mir Publishers, 1984.

22. Pirondi A., Nicoletto, G. Fatigue crack growth in bonded DCB specimens. Engineering Fracture Mechanics 2004; 71(4–6): 859–871.
23. Ritchie R. O., Knott J. F., Rice J. R. On the relation between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1973; 21: 395-410.
24. Rogowski G., Molski K.L. The T-stress effect on the plastic zone size in a thin ductile material layer sandwiched between two elastic adherents. Engineering Fracture Mechanics 2016; 168 (A): 260-270.
25. Rudawska A., Dębski H. Experimental and numerical analysis of adhesively bonded aluminium alloy sheets joints. Eksploatacja i Niezawodnosc – Maintenance and Reliability 2011; 1: 4–10.
26. Savruk M.P, Shkarayev S., Madenci E. Stress near apex of dissimilar material with bilinear behavior. Journal of Applied Fracture Mechanics 1999; 31: 203-212.
27. Seweryn A., Łukaszewicz A. Verification of fracture criteria of elements with V-shaped notches. Eksploatacja i Niezawodnosc — Maintenance and Reliability 2001; 5: 6–8.
28. Seweryn A., Molski K. Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions. Engineering Fracture Mechanics 1996; 55: 529-556.
29. Sih G.C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. International Journal of Fracture 1974; 10: 305-321.
30. Sih G.C., Chen E.P. Cracks in composite materials, Ch.3 (Mechanics of Fracture VI) ed. G. C. Sih. Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1981.
31. Sneddon I.N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. Proceedings of the Royal Society of London A 1946;187(1009): 229-260.
32. Sun C T., Jih C. J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media. Engineering Fracture Mechanics 1987; 28: 13-20.
33. Sun C. T., Qian H. Brittle fracture beyond the stress intensity factor. Journal of Mechanics of Materials and Structures 2009; 4(4): 743-753.
34. Taylor, D. The Theory of Critical Distances: A new perspective in fracture mechanics. Oxford: Elsevier, 2007.
35. Tracey D. M. Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors. Engineering Fracture Mechanics 1971; 3(3): 255-265.
36. Tran V.-X., Leguillon D., Krishnan A. Interface crack initiation at V-notches along adhesive bonding in weakly bonded polymers subjected to mixed-mode loading. International Journal of Fracture Mechanics 2012; 176: 65–79.
37. Treifi M., Oyadiji S.O. Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bi-material V-notches. International Journal of Solids and Structures 2013; 50: 2196–2212.
38. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension. Journal of Applied Mechanics 1952; 9: 526-528.