Monika MIŚKIEWICZ-NAWROCKA, Katarzyna ZEUG-ŻEBRO
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
monika.miskiewicz@ue.katowice.pl, katarzyna.zeug-zebro@ue.katowice.pl

KONSTRUKCJA PORTFELA OPTYMALNEGO PRZY WYKORZYSTANIU NARZĘDZI IDENTYFIKACJI CHAOSU W SZEREGACH CZASOWYCH

Streszczenie. W ostatnich latach oprócz klasycznych metod analizy portfelowej rozwinęły się również nowe, alternatywne techniki dywersyfikacji portfela inwestycyjnego, uwzględniające np. wskaźniki analizy fundamentalnej. Nowym podejściem zaproponowanym w niniejszym opracowaniu jest zastosowanie jednej z miar identyfikacji chaosu deterministycznego, tj. największego wykładnika Lapunowa. Celem artykułu jest konstrukcja portfeli optymalnych wyznaczonych m.in. na podstawie największego wykładnika Lapunowa oraz porównanie zysków ze zbudowanych portfeli.

Słowa kluczowe: analiza portfelowa, największy wykładnik Lapunowa, szeregi czasowe.

CONSTRUCTION OF OPTIMAL PORTFOLIO USING TOOLS IDENTIFICATION OF CHAOS IN TIME SERIES

Summary. In recent years, in addition to classical methods of portfolio analysis have been developed new, alternative diversification techniques of investment portfolio which take into account for example the indicators of fundamental analysis. A new approach proposed in the paper is the use of the measure for identifying chaos, i.e. the largest Lyapunov exponent. The paper aims to construct optimal portfolios determined based on the largest Lyapunov exponent and a comparison of the profits from the constructed portfolios.

Keywords: portfolio analysis, largest Lyapunov exponent, time series.

Wprowadzenie

Konstrukcja portfela optymalnego zaproponowana przez H. Markowitza (1952) zapoczątkowała intensywny rozwój dziedziny naukowej, jaką jest analiza portfelowa. Prowadzone od wielu lat badania dostarczyły nowych narzędzi oraz podejść do szacowania udziałów w portfelu optymalnym [Tarczyński, 2002; 2013]. Nowym podejściem zaproponowanym przez autorów jest zastosowanie największego wykładnika Lapunowa, będącego jedną z miar teorii nieliniowych układów dynamicznych do konstrukcji portfela optymalnego. Służy on m.in. do identyfikacji chaosu deterministycznego, jak również pozwala na oszacowanie wiarygodnych prognoz rzeczywistych szeregów czasowych.

Celem artykułu jest próba zdywersyfikowania ryzyka portfela inwestycyjnego na podstawie największego wykładnika – jednego z narzędzi identyfikacji chaosu w układach dynamicznych. W badaniach pod uwagę wzięto ceny akcji spółek notowanych na GPW w Warszawie w okresie od 1.01.2005 do 30.09.2013 oraz w celu oszacowania rocznych stóp zwrotu dla wyznaczonych portfeli ceny akcji z dnia 30.09.2014.

1. Wykładniki Lapunowa

Wykładniki Lapunowa oprócz wymiaru korelacyjnego są jednym z podstawowych narzędzi pozwalających wykryć obecność chaosu deterministycznego w układach dynamicznych. Pojęcie „deterministycznego chaosu" zostało wprowadzone w 1975 roku przez T.Y. Li i J.A. Yorke'a [Li i Yorke, 1975], jednak w literaturze można znaleźć wiele definicji tego pojęcia [Miśkiewicz-Nawrocka, 2012], które ponieważ wywodzą się z różnych dyscyplin matematycznych, nie zawsze są równoważne (jednoznaczne). Przyjmuje się, że definicja chaosu powinna przede wszystkim zakładać istnienie dynamiki nieokresowej w badanym układzie deterministycznym, wrażliwość na zmianę warunków początkowych oraz istnienie pewnego istotnego mechanizmu deterministycznego odpowiedzialnego za rekurencyjne zachowanie się układu [Nowiński, 2007]. Dostępne metody identyfikacji chaosu [zob. np. Kantz i Schreiber, 2004; Orzeszko, 2005] pozwalają jedynie na wykrycie pojedynczego atrybutu dynamiki chaotycznej. Jedną z nich jest szacowanie wartości największego wykładnika Lapunowa, który mierzy wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych.

Rozważmy układ dynamiczny (X, f) z czasem dyskretnym, opisany za pomocą równania rekurencyjnego:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0,1,... \tag{1}$$

gdzie: $X \subset R^m$ – przestrzeń stanów układu,

$x_t, x_{t+1} \in X$ – stan układu w chwilach t i $t+1$,

f – odwzorowanie przestrzeni stanów w siebie z warunkiem początkowym $x_0 \in X$.

Układ dynamiczny (X, f) jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych, jeżeli istnieje $\varepsilon > 0$, takie że dla każdego $x \in X$ oraz każdego otoczenia U punktu x istnieją $y \in U$ oraz $n \geq 1$, takie że $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \varepsilon$, gdzie f^n jest n-krotnym złożeniem odwzorowania f [Zawadzki, 1996; za: Deavney, 1987].

Dla układu dynamicznego (X, f), w którym $X \subset \mathrm{R}^m$, $f : X \to X$ $(m \geq 1)$, wykładniki Lapunowa określa wzór [Zawadzki, 1996]:

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|\mu_i(n, x_0)|, \qquad i = 1,\dots,m,\ m \geq 1 \tag{2}$$

gdzie: $\mu_i(n, x_0)$ – wartości własne macierzy Jacobiego $Df^n(x_0)$ odwzorowania f^n:

$$Df^n(x_0) = Df(x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot Df(x_1) Df(x_0), \tag{3}$$

$$Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right],$$

f^n – n-krotne złożenie funkcji f,

f_i – składowe odwzorowania f,

$i, j = 1,2,\dots,m$.

Zgodnie z twierdzeniem Oseledeca m-wymiarowy układ dynamiczny (X, f) ma m wykładników Lapunowa, które informują o zmianie odległości między bliskimi stanami względem odpowiedniego kierunku w przestrzeni stanów. Jednak najbardziej istotny pod względem identyfikacji chaosu jest największy wykładnik Lapunowa $\lambda_{\max}$, gdyż mierzy średnie tempo zbieżności i rozbieżności początkowo bliskich trajektorii. Dodatnia wartość największego wykładnika jest głównym wskaźnikiem dynamiki chaotycznej. Trajektorie dwóch losowo wybranych punktów początkowych układu są rozbieżne wykładniczo w tempie co najwyżej równym największemu wykładnikowi Lapunowa. Natomiast ujemny wykładnik jest miarą kontrakcji, mierzy wykładniczą zbieżność dwóch początkowo bliskich trajektorii.

Udowodniono następującą zależność [Eckmann i Ruelle, 1985]:

$$\delta_n \approx \delta_0 e^{n\lambda_{\max}}, \tag{4}$$

gdzie: $\lambda_{\max}$ – największy wykładniki Lapunowa,

δ_0 – początkowa odległość pomiędzy dwoma dowolnymi położonymi blisko siebie stanami przestrzeni X,

$\delta_n << 1$ – odległość między tymi punktami po n-tej iteracji,

$n >> 1$.

Największy wykładnik Lapunowa $\lambda_{\max}$ służy do rozróżniania charakteru dynamiki układu: regularnej od chaotycznej. W 1993 roku Rosenstein [Rosenstein, Collins i De Luca, 1993], a rok później Kantz [Kantz, 1994] przedstawili algorytm wyznaczania największego wykładnika Lapunowa dla układów dynamicznych definiowanych przez jednowymiarowe szeregi obserwacji. Przebiega on według następujących etapów [Kantz i Schreiber, 2004]:

1. Wyznaczamy zbiory Z_t, złożone z *K* najbliższych sąsiadów $\hat{x}_{t_j}^d$ wektorów opóźnień $\hat{x}_t^d$ [Zeug-Żebro i in., 2013], spełniających warunek $\left|t - t_j\right| > t^*$, gdzie t^* jest ustaloną liczbą naturalną. Dodany warunek zwiększa prawdopodobieństwo, że znaleziony sąsiad nie będzie należał do trajektorii wektora $\hat{x}_t^d$.
2. Obliczamy:

$$r_n(t) = \tfrac{1}{K} \sum_{\hat{x}_{tj}^d \in Z_t} \left| x_{t+n} - x_{t_j+n} \right|, \qquad t = 1, 2, ..., M \ ; \ n = 0, 1, ..., n_{\max}, \tag{5}$$

   gdzie: $M = N - (d-1)\tau$, $n_{\max}$ jest ustaloną liczbą naturalną, określająca liczbę iteracji.
3. Wyznaczamy średnią z $r_n(t)$ po wszystkich *d*-historiach:

$$r_n = \tfrac{1}{M} \sum_{t=1}^{M} r_n(t). \tag{6}$$

4. Największy wykładnik Lapunowa jest współczynnikiem kierunkowym równania regresji:

$$\ln(r_n) = \ln(r_0) + \lambda_{\max} n. \tag{7}$$

Dla szeregów chaotycznych nachylenie prostej regresji wykresu ilustrującego zależność $\ln \Delta_n$ od numeru iteracji *n* w początkowej fazie powinno być dodatnie. $\lambda_{\max}$ szacuje się na podstawie zbioru punktów należących do tego obszaru. Zatem oszacowana wartość $\lambda_{\max}$ zależy nie tylko od wyboru metryki, liczby najbliższych sąsiadów, wymiaru zanurzenia, lecz także od ustalonej wartości $n_{\max}$, dla której współczynnik regresji jest dodatni [Kantz i Schreiber, 2004].

2. Budowa optymalnych portfeli akcji

Podstawowymi charakterystykami opisującymi portfele akcji są oczekiwana stopa zwrotu portfela oraz ryzyko portfela, liczone za pomocą wzorów:

$$R_p = \sum_{i=1}^{m} x_i R_i \,, \tag{8}$$

$$S_p^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 S_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} x_i x_j S_i S_j \rho_{ij} , \tag{9}$$

gdzie: R_p – oczekiwana stopa zwrotu portfela *m* akcji,

S_p – ryzyko portfela *m* akcji,

R_i – oczekiwana stopa zwrotu *i*-tej akcji,

S_i – odchylenie standardowe akcji *i*-tej spółki,

ρ_{ij} – współczynnik korelacji *i*-tej akcji z *j*-tą akcją,

x_i – udział *i*-tej akcji w portfelu,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m, \tag{10}$$

m – liczba akcji w portfelu.

Udziały akcji w portfelu zazwyczaj wyznacza się przy wykorzystaniu modelu H. Markowitza [Markowitz, 1952], tak aby zminimalizować ryzyko tego portfela. W tym przypadku zadanie optymalizacji jest postaci:

Zadanie 1

$$\min S_p^2, \tag{11}$$

z warunkami ograniczającymi

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m,$$

gdzie: R_0 – oczekiwana stopa zwrotu dla spółek,

pozostałe oznaczenia jw.

Propozycją autorów jest budowa portfela optymalnego z zastosowaniem narzędzia teorii nieliniowych układów dynamicznych – największy wykładnik Lapunowa. W tym celu należy rozwiązać następujące zadanie maksymalizacji:

Zadanie 2

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{\max i} x_i\right), \tag{12}$$

z warunkami ograniczającymi:

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i x_i \geq S_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m,$$

gdzie: $\lambda_{\max i}$ – największy wykładnik Lapunowa dla szeregu czasowego generowanego przez utworzony z notowań cen akcji i-tej spółki,

pozostałe oznaczenia jw.

Zadanie 3

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{\max i} x_i\right), \tag{13}$$

z warunkami ograniczającymi:

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i x_i \geq S_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i \geq A_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m,$$

gdzie: A_i – współczynnik asymetrii,

A_0 – uśredniony współczynnik asymetrii.

pozostałe oznaczenia jw.

3. Badania empiryczne

W analizie empirycznej pod uwagę wzięto stopy zwrotu cen zamknięcia akcji następujących spółek finansowych: Bank Handlowy w Warszawie SA (BHW), Bank Zachodni WBK SA (BZW), ING Bank Śląski SA (ING), mBank SA (MBK), Bank Polska Kasa Opieki (PEO), Powszechna Kasa Oszczędności Bank Polski SA (PKO), oraz spółek niefinansowych: Grupa Apator SA (APT), Asseco Poland SA (ACP), Firma Oponiarska Dębica SA (DBC), Globe Trade Centre SA (GTC), KGHM Polska Miedź SA (KGH), LPP SA (LPP), Mostostal Zabrze SA (MSZ), Orange Polska SA (OPL), Polski Koncern Naftowy ORLEN SA (PKN), Synthos SA (SNS), Vistula Group SA(VST), Grupa Żywiec SA (ZWC).

W celu wyznaczenia wartości największego wykładnika Lapunowa dla analizowanych spółek pod uwagę wzięto szeregi czasowe utworzone z logarytmów dziennych stóp zwrotu cen zamknięcia ww. akcji notowanych w okresie 1.01.2005-30.09.2013. W pierwszym kroku skonstruowano wektory opóźnień, obliczając parametry rekonstrukcji przestrzeni stanów, tj. wymiar zanurzenia i czas opóźnienia[1]. Następnie na podstawie algorytmu przedstawionego w sekcji 1 oszacowano wartości największego wykładnika Lapunowa[2]. Wartości $\lambda_{\max i}$ oraz współczynnika determinacji R^2 przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Wartości największego wykładnika Lapunowa dla analizowanych spółek

Spółka	Największy wykładnik Lapunowa	R^2	Spółka	Największy wykładnik Lapunowa	R^2
APT	0,0547	0,1382	SNS	0,0719	0,1567
ACP	0,0221	0,1274	VST	0,0143	0,1270
DBC	0,1534	0,3564	ZWC	0,0697	0,1513
GTC	0,0301	0,3125	BHW	0,0010	0,3320
KGH	0,0008	0,3561	BZW	-0,0034	0,2134
LPP	0,0030	0,3605	ING	0,0005	0,3134
MSZ	0,0986	0,3764	MBK	0,0024	0,3126
OPL	0,0070	0,5119	PEO	0,0009	0,1469
PKN	0,0004	0,2753	PKO	0,0401	0,3576

W kolejnym etapie badania zbudowano sześć optymalnych portfeli akcji, rozwiązując przedstawione w sekcji 2 zadania optymalizacyjne. W skład portfeli oznaczonych numerami 1, 2 i 3 weszły spółki będące odpowiednio rozwiązaniami zadań 1, 2 i 3. Natomiast w portfelu 1', 2' i 3' umieszczono spółki będące rozwiązaniami zadań 1, 2 i 3, dla których przyjęto dodatkowe założenie o istotności oszacowanego wykładnika Lapunowa, tj. współczynnik determinacji $R^2 > 0{,}3$. Ponadto w celu dywersyfikacji ryzyka tworzonych portfeli uwzględniono jeszcze jeden warunek ograniczający postaci $x_i \leq 0{,}3,\ i = 1,...,m.$ Do obliczenia udziałów poszczególnych spółek w portfelu wykorzystano narzędzie *solver* – dodatek arkusza kalkulacyjnego *Excel*. Następnie oszacowano stopę zwrotu i ryzyko każdego portfela. Wyniki umieszczono w tabeli 2. Znak „-" postawiono przy spółkach, które nie weszły w skład portfela optymalnego oraz ze względu na nieistotność oszacowanego największego wykładnika Lapunowa nie zostały uwzględnione w budowie portfeli 1', 2' i 3'.

[1] Szczegóły szacowania parametrów rekonstrukcji przestrzeni stanów można znaleźć np. w [Zeug-Żebro i in., 2013].

[2] Szczegóły szacowania największego wykładnika Lapunowa dla rzeczywistych szeregów czasowych można znaleźć np. w [Miśkiewicz-Nawrocka, 2012].

Tabela 2

Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach

Spółka	Udziały akcji					
	Portfel 1	Portfel 2	Portfel 3	Portfel 1’	Portfel 2’	Portfel 3’
APT	0,10006	-	-	-	-	-
ACP	0,10013	-	-	-	-	-
DBC	0,10020	0,30000	0,30000	0,30000	0,30000	0,30000
GTC	0,03877	-	-	0,03645	0,09801	0,09801
KGH	0,10000	-	-	0,05277	-	-
LPP	0,10002	-	-	0,11411	-	-
MSZ	0,10004	-	-	0,09986	-	-
OPL	0,10020	-	-	0,30000	0,30000	0,30000
PKN	0,00960	-	-	-	-	-
SNS	0,10004	0,30000	0,30000	-	-	-
VST	0,10011	0,25536	0,25536	-	-	-
ZWC	0,02391	0,14464	0,14464	-	-	-
BHW	-	-	-	-	0,15142	0,15142
BZW	-	-	-	-	-	-
ING	0,00145	-	-	0,00069	-	-
MBK	0,00043	-	-	0,00023	-	-
PEO	0,01045	-	-	-	-	-
PKO	0,01459	-	-	0,09588	0,15057	0,15057
Stopa zwrotu portfela	**0,00290**	**0,00430**	**0,00430**	**0,00224**	**0,00194**	**0,00194**
Ryzyko portfela	**0,00010**	**0,00015**	**0,00015**	**0,00009**	**0,00023**	**0,00023**

Na podstawie danych przedstawionych w tabeli 2 można stwierdzić, że portfele 2 i 3 charakteryzują się najwyższą oczekiwaną stopą zwrotu, natomiast portfel 1’ jest obarczony najniższym poziomem ryzyka. Istotność największego wykładnika Lapunowa dla badanych szeregów ($R^2 > 0{,}3$) wpływa na skład portfela optymalnego, ale nie dywersyfikuje ryzyka związanego z inwestycją w taki portfel. Świadczą o tym portfele 1’, 2’ i 3’, dla których uzyskano niższą oczekiwaną stopę zwrotu, a w przypadku portfeli 2’ i 3’ wyższy poziom ryzyka. Ponadto należy zauważyć, że rozwiązaniem zadań optymalizacji 2 i 3 są portfele optymalne o tym samym składzie: portfele 2 i 3 oraz 2’ i 3’.

W tabeli 3 przedstawiono roczne stopy zwrotu dla wyznaczonych portfeli uzyskane w okresie 30.09.2013-30.09.2014.

Tabela 3

Roczna stopa zwrotu dla wyznaczonych portfeli akcji

Stopa zysku portfela (%)	Portfel 1	Portfel 2	Portfel 3	Portfel 1’	Portfel 2’	Portfel 3’
	3,3956%	4,1214%	4,1214%	4,0572%	22,4359%	22,4359%

Analizując roczne stopy zwrotu dla wyznaczonych portfeli akcji (tabela 3), należy zauważyć, że największy zysk w okresie 30.09.2013-30.09.2014 można było uzyskać, inwestując w portfel 2'(3'), zbudowany na podstawie istotnych wartości największych wykładników Lapunowa. Najniższą stopę zwrotu uzyskano dla portfela 1, zbudowanego na podstawie klasycznego modelu Markowitza. Warto jednak zwrócić uwagę, że stopa zysku tego portfela nieznacznie wzrosła w przypadku zastosowania dodatkowego założenia o istotności oszacowanego największego wykładnika Lapunowa (portfel 1') i kształtowała się na poziomie stóp zwrotu portfeli 2 i 3.

Podsumowanie

Zastosowanie narzędzia identyfikacji chaosu deterministycznego w szeregach czasowych, jakim jest największy wykładnik Lapunowa, wydaje się ważnym elementem badań dotyczących analizy portfelowej. Przeprowadzone badania pokazały, że zadanie maksymalizacji największego wykładnika Lapunowa daje lepsze rezultaty niż klasyczne zadanie Markowitza. Warto zatem przeprowadzić dodatkowe badania analizujące wpływ zastosowania innych miar teorii nieliniowych układów dynamicznych na konstrukcję portfeli optymalnych.

Bibliografia

1. Devaney R.L.: An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City 1987.
2. Eckmann J.P., Ruelle D.: Ergodic theory of chaos and strange attractors. Reviews of Modern Physics, vol. 57, no. 3, 1985.
3. Kantz H.: A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. Physical Letters A, vol. 185(1), 1994, p. 77-87.
4. Kantz H., Schreiber T.: Nonlinear Time Series Analysis. Cambridge University Press, 2004 (second edition).
5. Li T.Y., Yorke J.A.: Period. Three Implies Chaos. American Mathematical Monthly, vol. 82, 1975, p. 985-992.
6. Markowitz H.: Portfolio Selection. Journal of Finance, 1952, p. 77-91.
7. Miśkiewicz-Nawrocka M.: Zastosowanie wykładników Lapunowa do analizy ekonomicznych szeregów czasowych. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice 2012.
8. Nowiński M.: Nieliniowa dynamika szeregów czasowych. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2007.

9. Orzeszko W.: Identyfikacja i prognozowanie chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych. Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Warszawa 2005.
10. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J.: A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. Physica D, vol. 65, 1993, p. 117-134.
11. Tarczyński W.: Ocena efektywności metod analizy portfelowej na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie za lata 2001-2013. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, nr 761, Finanse, rynki finansowe, ubezpieczenia, nr 60, Szczecin 2013, s. 537-550.
12. Tarczyński W.: Fundamentalny portfel papierów wartościowych. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2002.
13. Zawadzki H.: Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane zagadnienia ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 1996.
14. Zeug-Żebro K., Dębicka J., Kuśmierczyk P., Łyko J.: Wybrane modele matematyczne ekonomii. Decyzje i wybory, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2013.

Abstract

In recent years, in addition to classical methods of portfolio analysis have been developed tools that are both modifications of these concept as well as new, alternative diversification techniques of investment portfolio which take into account for example the indicators of fundamental analysis. A new approach proposed in the paper is the use of the measure for identifying chaos, i.e. the largest Lyapunov exponent. Since determinism of chaotic time series indicates on potential possibility of their prediction, it is also expected that has a significant impact on the construction of optimal portfolio. The paper aims to construct optimal portfolios determined based on the largest Lyapunov exponent and a comparison of the profits from the constructed portfolios.