

Grzegorz SMOŁALSKI

POLITECHNIKA WROCLAWSKA, INSTYTUT INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ I POMIAROWEJ,
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Estymacja wartości parametrów sygnału na podstawie dostępnej wiedzy

Dr inż. Grzegorz SMOŁALSKI

Absolwent Wydziału Elektroniki Politechniki Wrocławskiej. Doktorat (1984 r.) w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej. Pracował na Wydziale Elektroniki kolejno w: Instytucie Metrologii Elektrycznej i w Zakładzie Miernictwa i Systemów Pomiarowych. Obecnie jest adiunktem na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki. Obszary prowadzonych badań to miernictwo stochastyczne i teoria pomiaru.



e-mail: Grzegorz.Smolański@pwr.wroc.pl

Streszczenie

Jako mierzand przyjęto jeden z możliwych parametrów segmentu sygnału. Przedstawiono metodę jednolitego uwzględniania wszelkich dostępnych informacji o sygnale. Wykorzystano reprezentację sygnału w skończonej-wymiarowej przestrzeni liczbowej. Rozważono przypadek ogólny, gdy parametr mierzony nie jest równy parametrowi estymowanemu. Przeanalizowano użyteczność danej informacji o sygnale w estymacji określonego jego parametru. Przedstawiono przykład ilustrujący stosowanie zaproponowanej metody.

Słowa kluczowe: mierzand, parametr sygnału, wiedza aprioryczna, reprezentacja informacji, niepewność pomiaru.

Signal's parameters estimation based on the available knowledge**Abstract**

In this paper a measurand is assumed to be some particular parameter of the signal segment - the estimated parameter E (Section 2). A model of measurement is formulated in which all the information items available about the investigated signal (both those available a priori and those provided by measurement) are uniformly taken into account during the evaluation of the uncertainty of E . All information items are assumed to be certain. It is shown (Section 3) that the investigated signal segment can be interpreted as a point in a finite-dimensional numerical space. With each available information item corresponds in that space a specific constraint (1) of possible signals. Finding out the global extremes of the estimated parameter over the resulting set of possible signals, gives the prior uncertainty interval (3) according to E (Section 4). Measurement of some additional parameter M continues restricting the prior set of possible signals. The uncertainty (4), remaining after the measurement of M , results from a structural discrepancy between parameters E and M . One of measurability necessary conditions is presented in Section 6. It enables an easy rejection of such measured parameters M that cannot be useful for the estimation of E . Finally, an illustrative example for the method has been provided in Section 7.

Keywords: measurand, signal parameter, prior knowledge, knowledge representation, measurement uncertainty.

1. Wprowadzenie

Każdy proces pomiaru jest wielostronnie powiązany z dostępną wiedzą o obiekcie/zjawisku badanym. Z jednej strony, pomiar jakiegokolwiek wielkości indywidualnej (por. [10], pozycja 1.1; dawniej używano też terminu realizacja wielkości) wymaga stosunkowo bogatej wiedzy apriorycznej o zjawisku będącym jej źródłem. Wiedza ta nie tylko warunkuje zaprojektowanie odpowiedniego układu pomiarowego, ale także umożliwia interpretację uzyskanych wyników. Z drugiej strony, uzyskane wyniki pomiarów stają się jednym z elementów dostępnej wiedzy o obiekcie. Choć oba wymienione aspekty informacyjnego charakteru pomiaru są raczej znane, jak dotąd jednak nie doczekały się wystarczająco ogólnego uwzględnienia w teorii pomiaru.

Głównym celem wykonanych badań było więc opracowanie takiego modelu pomiaru, który pozwalałby wnioskować o wartości mierzand [10] na podstawie wszelkich dostępnych informacji o obiekcie/zjawisku badanym [1]. Chodzi o to, by w modelu dało się uwzględnić w sposób jednolity nie tylko informacje dostarczane przez sam pomiar, ale także te, które są dostępne a priori. Wszystkie one mogą być wykorzystane do ograniczenia niepewności wartości mierzand i stopień tego ograniczenia należy określić, [2, 4].

2. Mierzand czyli co chcemy wiedzieć – parametr estymowany

Klasyczna definicja pomiaru przyjmująca, że mierzandem jest pojedyncza realizacja wielkości, jest w wielu przypadkach niewystarczająca, a w rozważanym zagadnieniu uwzględniania wiedzy apriorycznej na ogół prowadzi do wniosków trywialnych lub mało użytecznych. Dlatego w dalszych rozważaniach założono, że przedmiotem pomiaru jest segment, czyli fragment sygnału, a mierzandem jest jeden z możliwych parametrów tego segmentu. Przez sygnał rozumiem tu zależność realizacji jednej wielkości fizycznej od jednej lub kilku realizacji innej wielkości. Gdy dla każdej z tych wielkości zdefiniowana jest skala pomiarowa, wtedy każdemu sygnałowi odpowiada pewna funkcja liczbowa: $y = f(x_1, \dots, x_K)$. W artykule są rozważane sygnały jednowymiarowe ($K = 1$) i są one utożsamiane z opisującymi je funkcjami.

Aby można było porównywać segmenty sygnałów, konieczna jest precyzyjna definicja tej cechy sygnału, pod względem której porównanie ma się odbywać. Właściwość tę można określić m.in. analitycznie, definiując funkcjonalowe odwzorowanie segmentu sygnału w zbiór liczb rzeczywistych: $y = f(x)_{x \in [x_{min}, x_{max}]} \rightarrow R$,

gdzie x_{min} , x_{max} oznaczają krańce dostępnego segmentu sygnału. Parametr sygnału, którego wartość jest przedmiotem zainteresowania eksperymentatora nazwano **parametrem estymowanym** E . Do określenia jego wartości z akceptowalnie niewielką niepewnością $U(E)_{akcept}$ należy wykorzystać nie tylko całą dostępną wiedzę aprioryczną, ale także wyniki ewentualnych pomiarów [4].

Przyjęte tu rozszerzenie pojęcia mierzand, jako parametru segmentu sygnału, nie jest sprzeczne z przyjętą definicją mierzand, [10]. Poza tym, w każdym pomiarze wielkości makroskopowej uzyskiwany wynik odnosi się zawsze do segmentu zależności tej wielkości co najmniej od współrzędnych położenia i czasu. Tak więc traktowanie segmentu sygnału jako przedmiotu pomiaru ma pełne uzasadnienie fizyczne. Z drugiej strony, znane są sposoby pomiaru wartości momentów sygnału, odbywające się w ramach pojedynczej procedury komparacyjnej (tzn. sekwencji porównań z wzorcem), bez potrzeby określania wartości poszczególnych próbek, [7, 8]. Tak więc przyjęte tu uogólnienie znajduje też uzasadnienie w znanych dziś sposobach technicznej realizacji pomiaru.

3. Źródła i rodzaje informacji o sygnale oraz ich modelowanie w przestrzeni sygnałowej

Wiedza o sygnale badanym jest zwykle dostępna dzięki znajomości obiektu, z którego sygnał pochodzi i zjawisk w nim zachodzących, a niekiedy także dzięki znajomości sposobu zasilania lub pobudzania obiektu badanego. Kolejnym źródłem tej wiedzy mogą być informacje dotyczące sposobu akwizycji sygnału, jego transmisji do systemu pomiarowego i budowy tego ostatniego. Trzecią grupę stanowią informacje o zakłóceniach spodziewanych w sygnale. Informacje tego rodzaju mogą ułatwiać ograniczanie wpływu zakłóceń na wynik pomiaru (np. jeśli wiadomo, że zakłócenia addytywne mają charakter periodyczny o okresie znanym choćby

w przybliżeniu). W pracy założono, że dostępne informacje są całkowicie pewne, co oznacza, że stosowanie modeli rozmytych i probabilistycznych do modelowania wiedzy nie jest konieczne.

Wiedza o sygnale składa się zwykle z szeregu odrębnych informacji, które mogą dotyczyć struktury sygnału oraz modeli matematycznych poszczególnych składników struktury [3]. Mogą to być na przykład informacje o kształcie sygnału, przedziałach wartości wybranych jego parametrów, itd.

W referacie założono, że interesujący segment sygnału ma ograniczone krańce x_{min} , x_{max} , i może być wystarczająco dokładnie opisany za pomocą skończonego zbioru liczb, [5]. Gdy opis funkcyjny segmentu nie jest znany bezpośrednio, zawsze możliwe jest zamodelowanie go w postaci uogólnionego szeregu Fouriera $\sum_{i=1}^{\infty} c_i b_i(x)$, gdzie $\{b_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ oznacza zbiór zupełny funkcji ortonormalnych, zaś współczynniki c_i wyznacza się jako iloczyny skalarne sygnału badanego i funkcji bazowych $b_i(x)$. Rozwinięcie w szereg gwarantuje dokładną reprezentację przeliczalnie-wymiarową ciągłych sygnałów okresowych. Ponieważ jednak badane w praktyce segmenty sygnałów mają zawsze skończoną długość, więc stosowanie szeregu Fouriera jest w pełni możliwe, gdyż brak poprawności opisu poza przedziałem obserwacji o skończonej długości nie jest na ogół wadą. Także nieskończona liczba współczynników rozwinięcia c_i może być zwykle ograniczona, jeżeli tylko zaakceptuje się pewną niezerową wartość błędu reprezentacji. Na całkowity błąd reprezentacji składa się wiele błędów składowych, w większości aparaturowych. Dlatego ograniczenie liczby współczynników c_i do takiej ich skończonej liczby, aby składnik błędu związany z uproszczonym opisem matematycznym był do pominięcia, jest na ogół możliwe. Zwykle więc badany segment sygnału może być interpretowany jako punkt w skończenie-wymiarowej przestrzeni liczbowej $\{c_i\}_{i=1}^N$, zwanej dalej przestrzenią sygnałową. Zbiór rzeczywistych segmentów sygnałów, które można zamodelować w takiej przestrzeni jest stosunkowo obszerny. Trzeba jednak podkreślić, że omawiany model skończenie-wymiarowy nie odnosi się do całego sygnału, lecz tylko do zaobserwowanego jego segmentu. Sprawa reprezentatywności segmentu dla całego sygnału jest problemem istotnym, ale nie jest poruszany w tej pracy.¹ Poszczególne informacje o sygnale wyrażane są w rozmaity sposób, często za pomocą różniących się modeli matematycznych, a także – nierzadko – w języku potocznym. Przestrzeń sygnałowa umożliwia ich jednocześnie i jednolite uwzględnienie. Każdą dostępną informację o sygnale należy w tym celu wyrazić w postaci jednego lub kilku ograniczeń zbioru sygnałów możliwych:

$$\psi_k(c_1, c_2, \dots, c_N) \stackrel{<}{>} 0 \quad (1)$$

Istotną właściwością ograniczenia (1) jest nie tylko specyficzna postać funkcji ψ_k , ale także podzbiór κ_k współczynników c_i , które w tym warunku występują. Najprostszą bodaj postacią związku (1) jest jedno- lub dwustronne ograniczenie wartości pojedynczego wymiaru w przestrzeni sygnałowej: $c_i \leq \bar{c}_i$. Niestety, większość informacji o sygnale wymaga bardziej złożonych, a często - uwikłanych modeli (1) ograniczających zbiór sygnałów możliwych w przestrzeni sygnałowej do pewnego podzbioru D_k .

¹ Ograniczymy się w tej kwestii do podania dwóch przykładów: Gdy główna składowa sygnału jest okresowa, ale segment sygnału ma długość różną od całkowitej krotności okresu, to niektóre parametry sygnału wyznaczone na podstawie takiego segmentu mogą być mało reprezentatywne dla sygnału [11]. W przypadku sygnałów losowych sytuacja jest podobna: możliwość wnioskowania o właściwościach procesu stochastycznego na podstawie ograniczonego segmentu pojedynczej jego realizacji, wymaga dodatkowego założenia stacjonarności i ergodyczności procesu. Ponadto oszacowanie jakiegokolwiek parametru procesu na podstawie segmentu o skończonym czasie trwania, jest źródłem dodatkowego składnika niepewności. Możliwość praktycznego oszacowania tego składnika wymaga informacji o pasmie lub czasie korelacji procesu [12].

Na wiedzę o sygnale składają się też relacje logiczne pomiędzy poszczególnymi informacjami. Związkiem najczęstszym, zwykle przyjmowanym milcząco, jest iloczyn logiczny. Oznacza on, że zbiór sygnałów możliwych (przy założeniu, że sygnał spełnia warunki: ψ_i i ψ_j i ψ_k) jest częścią wspólną zbiorów sygnałów możliwych odpowiadających każdej z tych informacji osobno, tj. $D_{i,j,k} = D_i \cap D_j \cap D_k$.

4. Niepewność aprioryczna

Zapisanie wszystkich dostępnych a priori informacji o badanym sygnale w postaci odpowiadających im ograniczeń (1), a następnie wykonanie odpowiednich operacji na tak wygenerowanych podziorach w przestrzeni sygnałowej (najczęściej jest to ich część wspólna) prowadzi do określenia wypadkowego zbioru sygnałów możliwych D_{ap} (ap - od a priori). Z drugiej strony, podstawienie modelu sygnału badanego (np. w postaci sumy częściowej szeregu Fouriera) do wzoru definiującego parametr estymowany, daje zależność E od położenia segmentu w przestrzeni:

$$E = \psi_E(c_1, c_2, \dots, c_E), \quad (2)$$

gdzie c_1, c_2, \dots, c_E oznaczają te wymiary w przestrzeni sygnałowej od których zależy estymowany parametr E . Jeżeli znaleźć ekstrema globalne $\max_{D_{ap}} \psi_E$ oraz $\min_{D_{ap}} \psi_E$ funkcji (2) w zbiorze sygnałów

możliwych D_{ap} , to otrzymuje się ograniczenia wartości parametru

E wynikające wyłącznie z wiedzy apriorycznej, bez wykonywania jakichkolwiek pomiarów, [9]. Przedział niepewności a priori ma więc krańce:

$$\left(\min_{D_{ap}} \psi_E; \max_{D_{ap}} \psi_E \right). \quad (3)$$

Jeżeli okazałoby się, że szerokość tego przedziału jest mniejsza niż liczba wynikająca z przyjętej dopuszczalnej wartości niepewności rozszerzonej: $\max_{D_{ap}} \psi_E - \min_{D_{ap}} \psi_E < 2 \cdot U(E)_{accept}$, to wykony-

wanie pomiarów nie jest potrzebne. Można więc powiedzieć, że (3) odpowiada wg GUM przedziałowi rozszerzenia z prawdopodobieństwem objęcia równym 1.

5. Parametry mierzone i niepewność po pomiarze

Jeżeli szerokość przedziału (3) wynikająca z wiedzy apriorycznej jest zbyt duża, należy zdobyć dodatkowe informacje o sygnale. Najczęściej polega to na pomiarze jednego lub kilku parametrów badanego segmentu. Aparaturę pomiarową buduje się zwykle tak, by parametr mierzony M był możliwie identyczny z estymowanym E , ale nie jest to konieczne. Zresztą, ścisła zgodność parametru faktycznie mierzonego z jego postulowanym modelem matematycznym nie jest na ogół osiągalna. Ponadto parametr mierzony może być intencjonalnie odmienny od estymowanego, np. po to by mierzyło się go prościej, szybciej, lub mniejszym kosztem. Strategię tę stosowano już wielokrotnie, np. mierząc wartość średnią wyprostowaną dla celów estymacji wartości skutecznej sygnału, czy mierząc średnią z próbek sygnału: $1/N \sum_{i=1}^N f(x_i)$ podczas estymacji średniej całkowitej. Parametrów mierzonych można też wybrać kilka; mogą one być dobierane i mierzone jednocześnie, bądź po kolei – wtedy wyboru kolejnego parametru mierzonego dokonuje się na podstawie wyników pomiarów wykonanych wcześniej. Generalnie, cel jest taki, by wybór parametrów mierzonych uzupełniał wiedzę aprioryczną o sygnale w stopniu pozwalającym oszacować parametr estymowany z akceptowalnie niewielką szerokością przedziału niepewności. Zagadnienie doboru wektora parametrów mierzonych,

będące następstwem przedstawionego tu modelu, wydaje się istotnym i interesującym elementem teorii pomiaru.

Stwierdzenie w rezultacie pomiaru, że parametr M ma w przypadku badanego segmentu konkretną wartość M^j (w artykule przyjęto założenie upraszczające, że odbyło się to z zerową niepewnością) jest nową informacją, której model w przestrzeni sygnałowej ma postać: $\psi_M(c_1, c_2, \dots, c_M) = M^j$. Funkcję ψ_M można skonstruować podobnie jak ψ_E dla parametru estymowanego. Powyższy związek wprowadza nowe ograniczenie w zbiorze sygnałów możliwych: $D_{ap, M=M^j} = D_{ap} \cap D_{M=M^j}$, gdzie ostatni symbol oznacza zbiór sygnałów możliwych przy założeniu, że parametr M ma wartość M^j . Znalezienie ekstremów globalnych parametru estymowanego przy obecnie zawężonym zbiorze sygnałów możliwych daje nowe granice przedziału niepewności co do E po pomiarze parametru M i uzyskaniu wyniku M^j :

$$\left(\min_{D_{ap, M=M^j}} \psi_E; \max_{D_{ap, M=M^j}} \psi_E \right). \quad (4)$$

Jeżeli obecna szerokość tego przedziału jest mniejsza od oczekiwanej niepewności rozszerzonej: $2 \cdot U(E)_{akcept}$, to proces zdobywania informacji o sygnale można uznać za zakończony, przyjmując przedział (4) jako wynik estymacji E .

Niezerowa szerokość przedziału (4) jest następstwem faktu, że parametr mierzony jest odmienny od estymowanego. Z tego powodu, nawet gdyby poznało się wartość M całkowicie dokładnie, pozostawi to pewną niezerową niepewność co do E . Gdy parametry M i E są powiązane zależnością jedno-jednoznaczną, tzn. gdy są one strukturalnie identyczne, szerokość przedziału (4) jest zerowa, a jedynym źródłem niepewności końcowej staje się niepewność pomiaru parametru mierzonego.

6. Użyteczność informacji w estymacji parametru

Mierzalność parametru E za pomocą parametru M zależy nie tylko od dostępnej wiedzy o sygnale, ale także od uzyskanej wartości M^j . Okazuje się mianowicie, że wartości ekstremów globalnych występujących w (4) zależą od M^j . Pojęcie mierzalności zbadano więc szczegółowo, wyróżniając spośród rozmaitych parametrów M sygnału takie, które w estymacji E są zaledwie użyteczne (tzn. ograniczają szerokość przedziału (4) w stosunku do (3), ale w stopniu niewystarczającym), takie które gwarantują mierzalność E (tzn. $\max_{D_{ap, M=M^j}} \psi_E - \min_{D_{ap, M=M^j}} \psi_E < 2 \cdot U(E)_{akcept}$),

oraz takie które są z E równoważne strukturalnie (tzn. że szerokość (4) wynosi zero), [4]. Tak precyzyjna kwalifikacja wymaga jednak szczegółowych i często żmudnych analiz. Na szczęście analizy te mogą być wykonane na etapie projektowania inteligentnego przyrządu pomiarowego i nie mają wpływu na późniejszą szybkość jego działania.

Wspomniana pracochołność sprawdzania warunków wystarczających mierzalności powoduje, że pożądana staje się znajomość warunków koniecznych, które przy mniejszej czasochłonności obliczeń, lub nawet bez nich, pozwalają eliminować takie informacje o sygnale (np. pomiar takich parametrów M), które nie mogą być użyteczne w estymacji danego parametru E .

Jedną z metod polega na analizie podzbioru κ_k współczynników przestrzeni sygnałowej występujących w opisie matematycznym (1) danej informacji o sygnale, [5]. Użyteczności danej informacji nie można wykluczyć, gdy zbiór κ_k współczynników, których związek ona opisuje ma niezerową część wspólną ze zbiorem κ_E współczynników, od których zależy parametr estymowany. Ponieważ jednak wpływ ocenianej informacji na para-

metr estymowany może też być pośredni, w zbiorze wszystkich $\{c_i\}_{i=1}^N$ wprowadzono pojęcie grona podzbiorów. Pozwoliło to nie tylko sformułować warunek konieczny użyteczności informacji, ale także pokazało, że użyteczność taka ma szereg interesujących właściwości formalnych, np. jest zależna od kontekstu, czyli od pozostałych dostępnych informacji o sygnale.

7. Ilustracja metody

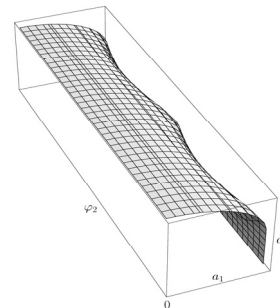
W charakterze przykładu zostanie tu przedstawiona estymacja wartości skutecznej $v_{sk} = \left[(1/T) \int_0^T v^2(t) dt \right]^{1/2}$ (parametr estymowany E) na podstawie pomiaru wartości średniej wyprostowanej dwupołówkowo $v_{|sr|} = (1/T) \int_0^T |v(t)| dt$ (parametr mierzony M) dla czasowego sygnału napięciowego $v(t)$. Założono, że o sygnale badanym a priori wiadomo, że jest okresowy i zawiera tylko składową podstawową i jedną harmoniczną o numerze 2. Jeżeli lokalizacja czasowa sygnału nie jest istotna, to przy obecnej wiedzy apriorycznej jego model:

$$a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x + \varphi_2) \quad (5)$$

zawiera tylko trzy niezależne parametry: amplitudy a_1, a_2 oraz kąt fazowy φ_2 . Oczywiście, do określenia skali na osi czasu konieczna jest też znajomość okresu T składowej podstawowej, która – poprzez pulsację $\omega = 2\pi/T$ – wpływa na szybkość zmian argumentu $x = \omega t$, o wymiarze kąta. Ponieważ oba analizowane parametry: v_{sk} i $v_{|sr|}$ są z definicji średnimi za całkowitą krotkość okresu, w dalszych analizach okres T jawnie nie występuje, ale jego znajomość, choćby przybliżona, jest jednak konieczna podczas pomiaru parametru $v_{|sr|}$, [11].

W przestrzeni związanej z rozwinięciem segmentu sygnału w szereg Fouriera: $a_0, a_1, a_2, \varphi_2, a_3, \varphi_3, \dots$ zbiór sygnałów możliwych a priori D_{ap} stanowi obecnie podprzestrzeń trójwymiarowa a_1, a_2, φ_2 , gdyż wartości pozostałych wymiarów: $a_0, a_3, \varphi_3, \dots$ są znane i równe zero. Wobec braku ograniczeń co do wartości chwilowych sygnału, zbiór D_{ap} jest tu nieograniczony w zakresie wymiarów a_1, a_2 oraz ograniczony do odcinka $[0, 2\pi]$ dla wymiaru φ_2 .

Pomiar wartości średniej wyprostowanej $v_{|sr|}$ i uzyskanie wyniku liczbowego $v_{|sr|}^0$ wprowadza do tej podprzestrzeni dodatkowe ograniczenie. Trudno je wprawdzie wyrazić analitycznie, ale wygląd powierzchni odpowiadającej stałej wartości $v_{|sr|} = v_{|sr|}^0$ można uzyskać na podstawie obliczeń numerycznych (Mathematica), rys. 1. Aby znaleźć granice przedziału niepewności co do v_{sk} po pomiarze średniej wyprostowanej, należy poszukiwać wartości $\min v_{sk}$ oraz $\max v_{sk}$ po tej właśnie powierzchni będącej zbiorem sygnałów możliwych po pomiarze $D_{ap, M=M^j}$.

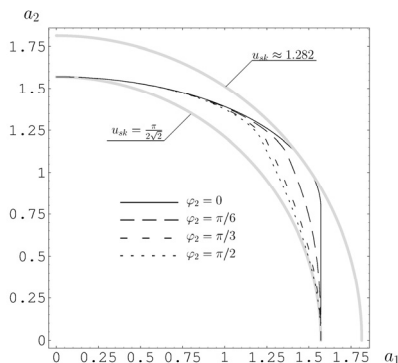


Rys. 1. Kształt powierzchni stałej wartości średniej wyprostowanej $v_{|sr|} = v_{|sr|}^0$ w trójwymiarowej przestrzeni sygnałowej a_1, a_2, φ_2

Fig. 1. Shape of the surface of the constant rectified mean value $v_{|sr|} = v_{|sr|}^0$ in the three-dimensional signal space a_1, a_2, φ_2

Przekroje powierzchni $v_{|sr|} = v_{|sr|}^0$, z rys. 1, dla różnych wartości kąta φ_2 przedstawiają krzywe czarne na rys.2. Krzywe wykre-

ślono tylko dla $\varphi_2 \in [0; \pi/2)$ bo, dla większych wartości, przebiegi powtarzają się. Jak wiadomo, $v_{sk} = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}/2$ i nie zależy od φ_2 . Na rys. 2, linie stałych wartości skutecznych są więc ćwiartkami okręgów koncentrycznych (linie szare).



Rys. 2. Linie stałych wartości średniej wyprostowanej $v_{|sr|} = 1$ (czarne) i odpowiadające im linie stałych wartości skutecznych: najmniejszej i największej (szare), dla sygnałów o modelu (5)

Fig. 2. Lines of the constant rectified value $v_{|sr|} = 1$ (black) and the corresponding lines of the constant effective values: the smallest and the greatest (grey), for the signals described by (5)

Z przebiegu linii stałych wartości $v_{|sr|}$ dla różnych wartości φ_2 (rys. 2) widać, że:

- W sąsiedztwie punktów, dla których $a_1 = 0$ lub $a_2 = 0$, tzn. dla sygnałów o kształcie sinusoidalnym, linie stałych wartości $v_{|sr|}$ są styczne do okręgów stałych wartości skutecznych. Oznacza to możliwość przeliczenia jednych wartości na drugie. Ścisłej: linia uzyskanej wartości $v_{|sr|} = v_{|sr|}^0$ pokrywa się z okręgiem odpowiadającym wartości skutecznej $\pi/2\sqrt{2} \approx 1.111$ razy większej. Jest to wynik od lat powszechnie wykorzystywany w konstrukcji prostych woltomierzy i amperomierzy prądu zmiennego.
- Najmniejszą wartość skuteczną ze wszystkich sygnałów o uzyskanej wartości średniej wyprostowanej mają te, dla których $a_1 = 0$ lub $a_2 = 0$.
- Największą wartość skuteczną ma jeden z sygnałów o fazie $\varphi_2 = 0$.

Poszukiwanie tego ostatniego wykonano numerycznie. Stwierdzono, że jest to sygnał o stosunku amplitud $a_2/a_1 \approx 0,7115684$, którego wartość skuteczną jest ok. 1,282555 razy większa od uzyskanej wartości $v_{|sr|}$. Okręgi odpowiadające najmniejszej i największej wartości skutecznej sygnału o zmierzonej wartości średniej wyprostowanej naniesiono także na rys. 2.

Tak więc, przy przyjętych tu założeniach, uzyskanie w wyniku pomiaru wartości średniej wyprostowanej $v_{|sr|}^0$ oznacza, że przedział niepewności a posteriori co do wartości skutecznej jest następujący:

$$u_{sk} \in \left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}} v_{|sr|}^0; 1,282555 v_{|sr|}^0 \right] \quad (6)$$

Względna szerokość połowy tego przedziału wynosi ok. 7,2%.

8. Podsumowanie i dyskusja

Zaproponowany model pozwala w sposób jednolity uwzględnić wszelkie dostępne informacje o badanym sygnale: od jakościowych i wyrażonych w języku potocznym, aż po ilościowe uzyskane w wyniku pomiarów. Odbywa się to poprzez nakładanie kolejnych ograniczeń na zbiór sygnałów możliwych w skończonym wymiarowej przestrzeni sygnałowej. W opracowanym modelu możliwe jest oszacowanie niepewności co do parametru estymowanego na każdym etapie zdobywania informacji o sygnale badanym.

Parametr mierzony M nie musi być identyczny z parametrem estymowanym E . Powinien on odpowiednio uzupełniać informacje aprioryczne tak, aby możliwie niewielkim kosztem ograniczyć szerokość przedziału niepewności poniżej akceptowalnej wartości.

W zaproponowanym modelu możliwe jest określenie nie tylko składnika niepewności będącego następstwem niepewności pomiaru parametru M , ale zwłaszcza **nowego** składnika wynikającego z odmienności parametrów: estymowanego i mierzonego.

Pełna analiza wpływu kolejnych informacji o sygnale na niepewność co do parametru estymowanego E powinna polegać na badaniu ewolucji funkcji gęstości prawdopodobieństwa parametru E . W przedstawionym modelu pojęcie funkcji gęstości prawdopodobieństwa pozornie nie występuje w ogóle. Jest to następstwem dwóch przyjętych tu założeń upraszczających: 1) założono, że wszystkie dostępne informacje o sygnale badanym są całkowicie pewne; 2) założono, że któryś z parametrów sygnału ma rozkład, którego funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma nośnik ograniczony. Nośnikiem nazywam tu zbiór wartości, dla których gęstość prawdopodobieństwa jest niezerowa. Ponieważ nie poczyniono żadnych założeń co do kształtów funkcji gęstości a priori, więc na ogół określenie kształtu funkcji gęstości parametru estymowanego po pomiarze (a więc także większości parametrów tego rozkładu) nie jest możliwe. Okazuje się jednak, że w wielu przypadkach możliwe jest określenie wartości skrajnych nośnika funkcji gęstości prawdopodobieństwa parametru E , co też może być użyteczne w praktyce. W przykładzie ilustrującym metodę (rozdział 7) założono mianowicie, że rozkład prawdopodobieństwa dla parametru mierzonego jest jednopunktowy. Jak się okazało, nawet przy braku założeń co do wartości chwilowych sygnału, granice nośnika funkcji gęstości dla wartości skutecznej (parametr estymowany E) są wtedy ograniczone i granice te można wyznaczyć (wzór (6)). Oprócz przedstawionego tutaj przykładu ilustracyjnego, wykonano też szereg innych analiz mierzalności z wykorzystaniem omawianej metody, [4].

Uwzględnienie w przyszłości także niepewności dostępnych informacji, np. za pomocą modeli rozmytych oraz teorii Bayes'a, wydaje się nieuniknione. Podejście takie generuje jednak wiele rozmaitych trudności analitycznych, [2]. Wydaje się więc, że opracowanie i pełne wyeksploatowanie przedstawionego tu modelu uproszczonego, jest w pełni uzasadnione.

9. Literatura

- [1] Finkelstein L.: Intelligent and knowledge based instrumentation – an examination of basic concepts. *Measurement*, vol. 14 (1994) ss.23-29.
- [2] Beyerer J.: A method for assessing the worth of prior knowledge about the measurand. *Measurement*, vol. 18 (1996) ss.225-235.
- [3] Zayezdny A., Druckmann I.: A new method of signal description and its application to signal processing. *Signal Processing*, vol. 22 (1991) ss.153-178.
- [4] Smolański G.: Measurability conditions of the signal parameter for a given prior knowledge. *Measurement*, vol. 42 (2009) ss. 583-603. Praca zawiera obszerny spis literatury.
- [5] Smolański G.: Knowledge modelling in signal parameter evaluation. *Measurement*, vol. 42 (2009) ss. 863-870.
- [6] International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms. *Tech. Rep., Joint Committee for Guides in Metrology*, wyd.3, 2008.
- [7] Wehrmann W.: A new line of stochastic-ergodic measuring instruments. *Norma Technical Information VIII (II)*, 1971, ss. 3-12.
- [8] Smolański G.: The concept and forms of measuring comparisons. *Rozprawy elektrotechniczne*, vol. 32, nr 3, 1986, ss. 857-868.
- [9] Combettes P.L.: The Foundations of Set Theoretic Estimation. *Proceedings of the IEEE*, vol. 81, nr 2 (1993), ss. 182-208.
- [10] Przewodnik PKN-ISO/IEC Guide99:2010P. Międzynarodowy słownik metrologii. Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nimi związane (VIM). Polski Komitet Normalizacyjny.
- [11] Smolański G.: Segmentation error in averaged parameters' measurements of periodic signals: its upper limits and general probabilistic properties. *Measurement*, vol. 29 (2001) ss.21-30.
- [12] Bendat J.S., Piersol A.G.: *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*. PWN, Warszawa, 1976.