

ZADANIE KRYŁOWA W PRZYPADKU BELKI NA INERCYJNYM PODŁOŻU WŁASOWA

W artykule omówiono pewien sposób znajdowania postaci zamkniętej całki szczególnej w równaniu ruchu sprężystej belki Eulera obciążonej nieinercyjną siłą, poruszającą się po belce ze stałą lub zmienną prędkością. Całka szczególna opisuje drgania czysto wymuszone, a żeby otrzymać pełne rozwiązanie zadania należy jeszcze dodać całkę szczególną opisaną szeregiem. Belka spełnia warunki brzegowe swobodnego podparcia. W pracy zamieszczono również obszerny wykaz literatury związanej z tematyką referatu.

WSTĘP I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Zadanie ruchomej, bezmasowej siły skupionej na swobodnie podpartej, sprężystej belce mostowej nazywane jest w literaturze przedmiotu zadaniem Kryłowa, od opublikowanej w języku niemieckim pracy [1] z 1905 roku. Praca ta była również wydana w języku rosyjskim w Rosji [2]. Następnie w dwóch monografiach [2÷4] Kryłow sumuje szereg opisujący tak zwane drgania czysto wymuszone

wykorzystując szereg Fouriera funkcji liniowej $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Koncept

cję Kryłowa wykorzystał Ruczynskij w pracy [5], sumując szereg opisujący drgania czysto wymuszone od zmiennej liniowo w czasie siły skupionej $P(t) = P_0 \frac{vt}{l}$ poruszającej się po belce ze stałą prędkością v .

W 1963 roku Kączkowski w pracy [5], stosując metodę ugięć walcowych, sumuje szereg opisujący drgania czysto wymuszone, pokazując stronę fizyczną zagadnienia. Uogólnienie, na belki o dowolnych warunkach brzegowych, sposobu Kączkowskiego dokonał Reipert w pracach [6÷7]. Jeszcze inną koncepcję wysumowania szeregów opisujących drgania czysto wymuszone dokonał Śniady w pracach [8÷11]. Zagadnienie to wystąpiło w pracach autorów [13÷15].

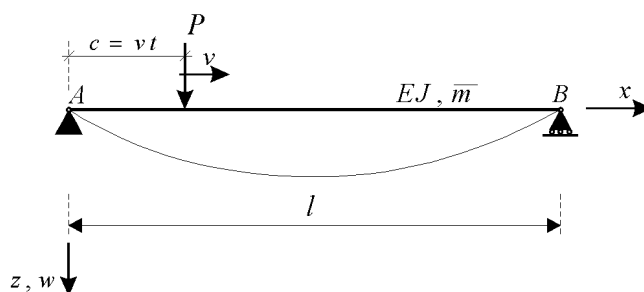
W niniejszej pracy pokażemy jeszcze jeden sposób wysumowania szeregu opisującego drgania czysto wymuszone, nadając mu przy tym interpretację statyczną pokazaną przez Timoshenkę w pracy [12] z 1926 roku.

1. RÓWNANIE RUCHU BELKI SWOBODNIE PODPARTEJ NA PODŁOŻU WINKLERA POD OBCIĄŻENIEM RUCHOMEJ, BEZINERCYJNEJ SIŁY SKUPIONEJ

Równanie ruchu belki pokazanej na rysunku 1 wyprowadzamy z równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

Zakładamy ugięcie belki w postaci szeregu spełniającego warunki brzegowe zadania:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi}{a} x. \quad (1)$$



Rys.1. Schemat dynamiczny zadania Kryłowa

Energia sprężysta belki i energia sprężysta podłoża Winklera określona jest wzorami:

$$V_{bel} = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EJ \pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 q_n^2. \quad (2)$$

$$V_{pod} = \frac{k}{2} \int_0^l w^2 dx = \frac{kl}{4} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2,$$

gdzie k jest współczynnikiem podłoża.

Energia kinetyczna belki o masie rozłożonej \bar{m} jest opisana wzorem:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \bar{m} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{\bar{m} l^4}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^2. \quad (3)$$

Uogólniona siła może być wyznaczona w następujący sposób:

$$P \delta w = Q_n \delta q_n, \quad \delta w = \delta q_n \sin \frac{n\pi vt}{l}, \quad (4)$$

$$Q_n = P \sin \frac{n\pi vt}{l}.$$

Zważywszy, że $V = V_{bel} + V_{pod}$, równanie Lagrange'a drugiego rodzaju zapisujemy w standardowej postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_v} \right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial q_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = Q_n \quad (5)$$

Podstawiając (2), (3) i (4) do (5) otrzymujemy niejednorodne, liniowe równanie różniczkowe o stałych współczynnikach, drugiego rzędu na wyznaczenie uogólnionej funkcji (współrzędnej) q_n . Mamy zatem:

$$\ddot{q}_n + \frac{2}{\bar{m}l} \left(\frac{EJ n^4 \pi^4}{2l^3} + \frac{kl}{2} \right) q_n = \frac{2}{\bar{m}l} P \sin \frac{n\pi vt}{l} \quad (6)$$

Równanie (6) możemy zapisać również w standardowej postaci

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n &= \frac{2}{\bar{m}l} P \sin \frac{n\pi vt}{l}, \\ \omega_n^2 &= \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\bar{m}} + \frac{kl^4}{n^4 \pi^4 \bar{m}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Pełnym rozwiązaniem równania (7) jest następująca funkcja:

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \frac{2P}{\bar{m}l(\alpha_n^2 - \omega_n^2)} \left(\frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n t - \sin \alpha_n t \right), \\ \alpha_n &= \frac{n\pi v}{l} = \lambda_n v, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}. \end{aligned} \quad (8)$$

Pierwszy składnik wzoru (8) z $\sin \omega_n t$ opisuje drgania swobodne towarzyszące, drugi zaś z czynnikiem $\sin \alpha_n t$, opisuje drgania czysto wymuszone belki.

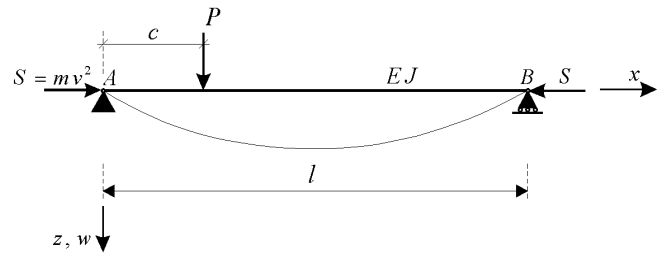
Drgania czysto wymuszone w belce na podłożu Winklera zatem opisuje funkcja

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \frac{2P}{\bar{m}l(\alpha_n^2 - \omega_n^2)} \sin \alpha_n t = \\ &= \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{\sin \frac{n\pi vt}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \frac{n^2 v^2 \bar{m}l^2}{EJ\pi^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ostatni zapis równania (9) jest całką szczególną równania (6). Podstawiając (9) do (1) otrzymamy ostateczny zapis drgań czysto wymuszonych podanych w pracach [1÷17]. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} w_{szcz}(x,t) &= \frac{2P}{\bar{m}l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n t \sin \lambda_n x}{\alpha_n^2 - \omega_n^2} = \\ &= \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \frac{n^2 v^2 \bar{m}l^2}{EJ\pi^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

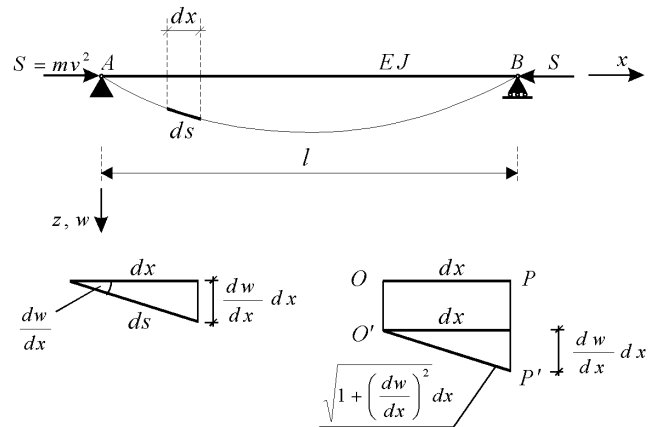
Rozważmy z kolei tę samą belkę obciążoną statycznie siłą skupioną w stałej odległości $c = vt$, oraz obciążoną dużą ściskającą siłą osiową S , jak na rysunku 2.



Rys.2. Schemat statyczny rozważanego zadania

Energia sprężysta od dużej siły ściskającej S może być wyznaczona następującym sposobem. Zgodnie z rysunkiem 3 mamy:

$$\begin{aligned} ds - dx &= \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2} dx - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx, \\ V_s &= S \int_0^l (ds - dx) dx = \frac{S}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \\ &= \frac{S\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n^2. \end{aligned} \quad (11)$$



Rys. 3. Interpretacja geometryczna odkształcenia belki w zadaniu statycznym z dużą siłą osiową

Dołączając pochodną energii sprężystej do uogólnionej siły Lagrange'a, pomijając energię kinetyczną układu, równanie (5) jest teraz następujące:

$$\begin{aligned} P \sin \frac{n\pi c}{l} + \frac{S\pi^2}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n &= \\ = \frac{\partial V}{\partial q_n} &= \left(\frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 + \frac{kl}{2} \right) q_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Wyznaczając z ostatniego q_n otrzymujemy:

$$q_n = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^4 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} - \frac{n^2 v^2 \bar{m}l^2}{EJ\pi^2}} \quad (13)$$

Wstawiając (13) do (1) otrzymujemy rozwiązanie równania różniczkowego belki obciążonej statycznie siłą P i dużą siłą ściskającą S :

$$\tilde{w}(x) = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + \frac{k l^4}{EJ\pi^4} - \frac{n^2 S l^2}{EJ\pi^2}} \quad (14)$$

Porównując ze sobą teraz rozwiązania (10)₂ i (14) zauważymy, że są one identyczne jeśli

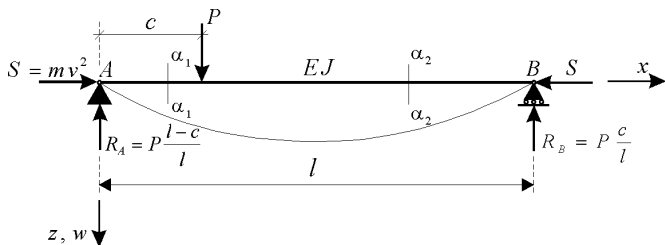
$$S = \bar{m} v^2. \quad (15)$$

Oznacza to, że drgania czysto wymuszone w ustalonej chwili określającej położenie ruchomej siły skupionej P na belce są równoważne z zadaniem statycznym przy $v t = c = \text{const.}$ i dużej ściskającej sile osiowej $S = \bar{m} v^2$.

Rozwiązanie (14) można uzyskać dość prosto ze statyki pręta z dużą ściskającą siłą osiową w postaci zamkniętej, a następnie podstawiając w nim $c = v t$ oraz $S = \bar{m} v^2$, można otrzymać zamkniętą postać całki szczególnej równania ruchu (6) opisującej drgania czysto wymuszone (10).

2. ROZWIĄZANIE ZADANIA STATYCZNEGO

Zadanie statyczne rozwiążemy w dwóch przypadkach. W pierwszej kolejności założymy, że współczynnik podłoża w rozwiązaniu (14) jest równy zero: $k = 0$. W drugim przypadku uwzględnimy podłoże sprężyste Winklera czyli $k \neq 0$.



Rys. 4. Obliczanie reakcji i momentu zginającego w belce z dużą, ściskającą siłą osiową

Rozpatrując zatem pierwszy przypadek, zgodnie z rysunkiem 4, reakcje statyczne i momenty zginające w belce statycznie wyznaczalne z dużą ściskającą siłą osiową wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} k = 0, \quad R_A &= P \frac{l-c}{l}, \quad R_B = P \frac{c}{l}, \\ M_{\alpha 1} &= P \frac{l-c}{l} x + S \tilde{w}, \quad x \in (0, c), \\ M_{\alpha 2} &= P \frac{c}{l} (l-x) + S \tilde{w}, \quad x \in (c, l). \end{aligned} \quad (16)$$

Całkowite ugięcie statyczne belki wyznaczamy standardowym sposobem zapisując dwa równania różniczkowe drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} &= -P \frac{l-c}{l} x - S \tilde{w}, \quad x \in (0, c), \\ EJ \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} &= -P \frac{c}{l} (l-x) - S \tilde{w}, \quad x \in (c, l). \end{aligned} \quad (17)$$

Wprowadzając współczynnik $\beta = \frac{S}{EJ}$, równania (17) zapisujemy w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + \beta^2 \tilde{w} &= -P \frac{l-c}{EJ l} x - S \tilde{w}, \quad x \in (0, c), \\ \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + \beta^2 \tilde{w} &= -P \frac{c}{EJ l} (l-x) - S \tilde{w}, \quad x \in (c, l). \end{aligned} \quad (18)$$

Rozwiązaniami równań (18) są następujące funkcje:

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= A \cos \beta x + B \sin \beta x - P \frac{l-c}{S l} x, \quad x \in (0, c), \\ \tilde{w} &= C \cos \beta x + D \sin \beta x - P \frac{c}{S l} (l-x), \quad x \in (c, l). \end{aligned} \quad (19)$$

Stałe całkowania $A \div D$, wyznaczmy z następujących warunków brzegowych i warunków ciągłości odkształconej osi belki:

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow \tilde{w} = 0, \quad x = l \rightarrow \tilde{w} = 0, \\ x = c &\rightarrow \tilde{w}_{lew.} = \tilde{w}_{praw.}, \\ x = c &\rightarrow \frac{d\tilde{w}_{lew.}}{dx} = \frac{d\tilde{w}_{praw.}}{dx}. \end{aligned} \quad (20)$$

W wyniku rozwiązania układu równań (20), stałe całkowania wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad B = \frac{P \sin[\beta(l-c)]}{S \beta \sin(\beta l)}, \\ C &= \frac{P}{S \beta} \sin(\beta c), \quad D = \frac{P}{S \beta} \sin(\beta c) \operatorname{ctg}(\beta l). \end{aligned} \quad (21)$$

Podstawiając teraz (21) do (19) otrzymujemy dwa wyrażenia na linię ugięcia belki w przypadku statycznym

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x) &= \frac{P}{S} \left\{ \frac{\sin[\beta(l-c)]}{\beta \sin(\beta l)} \sin(\beta x) - \frac{l-c}{l} x \right\}, \\ &\quad x \in (0, c), \\ \tilde{w}(x) &= \frac{P}{S} \left\{ \frac{\sin[\beta(l-x)]}{\beta \sin(\beta l)} \sin(\beta c) - \frac{l-x}{l} c \right\}, \\ &\quad x \in (c, l). \end{aligned} \quad (22)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$b^2 = \frac{EJ}{\bar{m}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{S}{EJ}} \rightarrow \beta = \frac{v}{b}, \quad (23)$$

$$S = \bar{m} v^2, \quad c = vt,$$

po prostych przekształceniach równania (22) przechodzą ściśle w rozwiązanie Kryłowa [3÷4] uzyskane inną drogą. Mamy zatem:

$$w_w(x, t) = \frac{P}{EJ} \frac{b^2}{v^2} \left\{ \frac{b}{v} \frac{\sin\left[\frac{v}{b}(l-vt)\right]}{\sin\left(\frac{vl}{b}\right)} \sin\left(\frac{vx}{l}\right) +, \right. \\ \left. - \frac{l-vt}{l} x \right\}, \quad x \in (0, vt), \quad (24)$$

$$\tilde{w}(x) = \frac{P}{EJ} \frac{b^2}{v^2} \left\{ \frac{b}{v} \frac{\sin\left[\frac{v}{b}(l-x)\right]}{\sin\left(\frac{vl}{b}\right)} \sin\left(\frac{v}{l} vt\right) +, \right. \\ \left. - \frac{l-x}{l} vt \right\}, \quad x \in (vt, l).$$

W zakończeniu tego rozdziału przedyskutujemy jeszcze przypadek $S = S_{kr} = \frac{\pi^2}{l^2} EJ$, co oznacza, że duża ściskająca siła osiowa osiągnęła swoją wartość graniczną w sensie Eulera. Mamy zatem:

$$S = S_{kr} = \frac{\pi^2}{l^2} EJ = \bar{m} v^2, \quad \rightarrow v = v_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EJ}{\bar{m}}}. \quad (25)$$

W konsekwencji dużej ściskającej, granicznej sile krytycznej w zadaniu statycznym odpowiada w drganiach czysto wymuszonych przejazd ruchomej siły skupionej z prędkością krytyczną w sensie Kryłowa-Timoshenki. Jednakże przejazd z taką prędkością nie oznacza utraty stateczności belki, bowiem maksymalne ugięcie jest ograniczone do $1.55 w_{st}$, a siła skupiona opuszcza belkę. Nie jest to maksymalne ugięcie belki, które wynosi $1.67 w_{st}$ przy prędkości $0.67 v_{kr}$ i $x = 0.67 l$.

3. BELKA NA PODŁOŻU WŁASOWA

W przypadku belki na podłożu Własowa, o dwóch współczynnikach podłoża k i k_t , obciążonej statycznie siłą P i dużą, ściskającą osiowo siłą S równanie równowagi zapiszemy w następujący sposób:

$$EJ \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} + (S - 2k_t) \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + k \tilde{w} = P \delta(x-c). \quad (26)$$

Równanie jednorodne (26), po wprowadzeniu pewnych oznaczeń ma postać:

$$\frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} + \beta^2 \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + 4\eta^4 \tilde{w} = 0, \quad (27)$$

$$\beta^2 = \frac{S - 2k_t}{EJ}, \quad \eta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}.$$

Równanie charakterystyczne równania (27) jest czwartego stopnia o czterech pierwiastkach zależnych od współczynników β i η .

Mamy zatem:

$$r^4 + \beta^2 r^2 + 4\eta^4 = 0,$$

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\left(-\frac{S - 2k_t}{2EJ}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{S - 2k_t}{2EJ}\right)^2 - \frac{k}{EJ}}}, \quad (28)$$

$$S < 2\sqrt{kEJ},$$

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\left(-\frac{S - 2k_t}{2EJ}\right) \pm \sqrt{\frac{k}{EJ} - \left(\frac{S - 2k_t}{2EJ}\right)^2}},$$

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{k}{4EJ}} + \frac{S - 2k_t}{4EJ}} = \sqrt{\eta^2 + \frac{S - 2k_t}{4EJ}},$$

$$\gamma = \sqrt{\sqrt{\frac{k}{4EJ}} - \frac{S - 2k_t}{4EJ}} = \sqrt{\eta^2 - \frac{S - 2k_t}{4EJ}}.$$

W przypadku podkrytycznej dużej ściskającej siły $S < \bar{m} v^2$, rozwiązanie równania niejednorodnego opisuje funkcja:

$$\tilde{w}(x) = (C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x}) \cos(\alpha x) + (C_3 e^{\gamma x} + C_4 e^{-\gamma x}) \sin(\alpha x). \quad (29)$$

Rozwiązanie (29) może opisywać odkształconą oś belki przy $x \in (0, c)$. W przypadku kiedy $x \in (c, l)$, równanie (29) przechodzi w następujące:

$$\tilde{w}(x) = (D_1 e^{\gamma x} + D_2 e^{-\gamma x}) \cos(\alpha x) + (D_3 e^{\gamma x} + D_4 e^{-\gamma x}) \sin(\alpha x). \quad (30)$$

W równaniach (29) i (30) mamy do wyznaczenia aż osiem stałych całkowania $C_1 \div C_4$ oraz $D_1 \div D_4$. Stałe te wyznaczymy z czterech warunków brzegowych na końcach belki i z czterech warunków ciągłości belki pod siłą skupioną:

$$x = 0 \rightarrow \tilde{w}_l = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{w}_l}{dx^2} = 0,$$

$$x = l \rightarrow \tilde{w}_p = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{w}_p}{dx^2} = 0, \quad (31)$$

$$z = c \rightarrow \tilde{w}_l = \tilde{w}_p, \quad \frac{d \tilde{w}_l}{dx} = \frac{d \tilde{w}_p}{dx},$$

$$z = c \rightarrow \frac{d^2 \tilde{w}_l}{dx^2} = \frac{d^2 \tilde{w}_p}{dx^2}, \quad -EJ \left(\frac{d^3 \tilde{w}_l}{dx^3} = \frac{d^3 \tilde{w}_p}{dx^3} \right) = P.$$

W równaniach (31) \tilde{w}_l oznacza rozwiązanie (29), zaś \tilde{w}_p oznacza rozwiązanie (30).

Rozwiązując układ ośmiu równań (31) wyznaczamy osiem stałych całkowych, które mają skomplikowaną i rozbudowaną postać zapisu i, w związku z tym, nie będziemy przytaczali tutaj tego rozwiązania z powodów edycyjnych.

Równania (29) i (30) możemy zapisać również w alternatywnej postaci zamieniając funkcje wykładnicze na funkcje hiperboliczne oraz przyjmując nowe stałe całkowe [21]. Mamy zatem:

$$\tilde{w}(x) = \hat{C}_1 \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(\beta x) + \hat{C}_2 \operatorname{sh}(\alpha x) \cos(\beta x) + \hat{C}_3 \operatorname{ch}(\alpha x) \sin(\beta x) + \hat{C}_4 \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(\beta x). \quad (29a)$$

Rozwiązanie (29a) opisuje odkształconą oś belki przy $x \in (0, c)$. W przypadku gdy $x \in (c, l)$ równanie (29a) przechodzi w (30a) i ma postać:

$$\tilde{w}(x) = \hat{D}_1 \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(\beta x) + \hat{D}_2 \operatorname{sh}(\alpha x) \cos(\beta x) + \hat{D}_3 \operatorname{ch}(\alpha x) \sin(\beta x) + \hat{D}_4 \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(\beta x). \quad (30a)$$

W zakończeniu tego rozdziału przeanalizujemy jeszcze raz rozwiązanie (14), które przy wprowadzeniu oznaczenia $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$ możemy zapisać w następujący sposób:

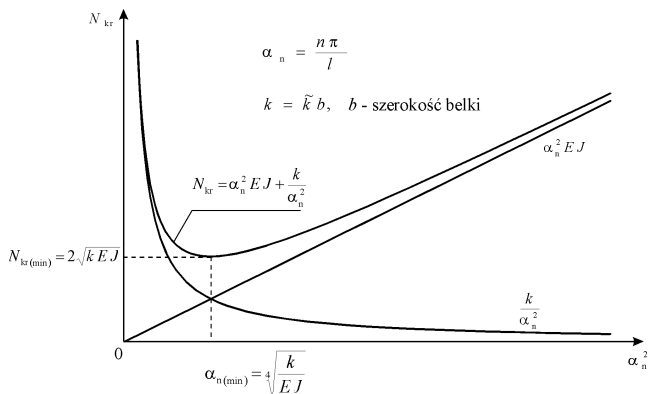
$$\tilde{w}(x) = \frac{2P}{IEJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n c}{\alpha_n^4 - \frac{S - 2k_l}{EJ} \alpha_n^2 + \frac{\tilde{k}b}{EJ}} \sin \alpha_n x. \quad (32)$$

gdzie $k = \tilde{k}b$, zaś b oznacza szerokość prostokątnego przekroju poprzecznego belki.

Przyrównując do zera mianownik wyrażenia stojącego pod sumą w (32) otrzymujemy wzór na siłę krytyczną Eulera belki na podłożu sprężystym Winklera przy $k_l = 0$ oraz Własowa przy $k_l \neq 0$:

$$S_{kr} = \alpha_n^2 EJ + \frac{\tilde{k}b}{\alpha_n^2}, \quad \text{oraz} \quad S_{kr} = \alpha_n^2 EJ + \frac{\tilde{k}b}{\alpha_n^2} + 2k_l. \quad (33)$$

Interpretację graficzną wzoru (33)₁ pokazano na rysunku 5 we współrzędnych $S_{kr} = N_{kr}$ i α_n^2 .



Rys. 5. Interpretacja geometryczna funkcji (33)₁ w przypadku modelu Winklera

Łatwo zauważyć, że wykres S_{kr} jest sumą dwóch wykresów: prostej i hiperboli. Obliczając pochodną

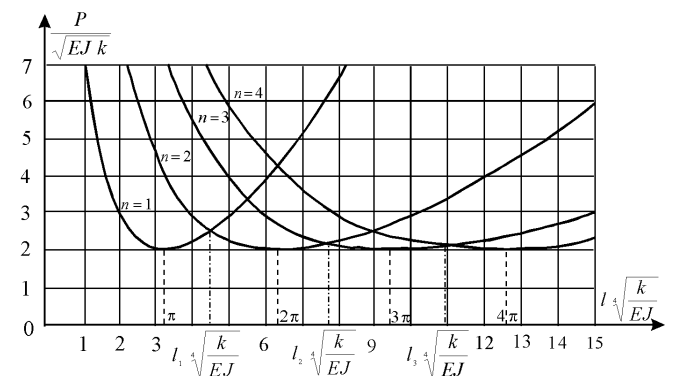
$$\frac{d S_{kr}}{d \alpha_n} = 0 \rightarrow \alpha_{n \min} = \sqrt[4]{\frac{\tilde{k}b}{EJ}}, \quad (34)$$

$$S_{kr \min} = S_{gr} = 2\sqrt{\tilde{k}b EJ} = 2\sqrt{k EJ},$$

$$k_l \neq 0 \rightarrow S_{kr \min} = S_{gr} = 2\sqrt{k EJ} + 2k_l.$$

otrzyaliśmy minimalną długość wybożenia $\alpha_{n \min}$ oraz graniczną wartość siły Eulera S_{gr} . Jak widać z rysunku 6 dolną granicą wszystkich wykresów, zależnych od n , we współrzędnych

$\left\{ \frac{S}{\sqrt{k EJ}}, l^4 \sqrt{\frac{k}{EJ}} \right\}$, jest pozioma prosta.



Rys. 6. Interpretacja geometryczna wzoru (34) na siłę krytyczną belki na podłożu sprężystym Winklera

4. ZAMKNIĘTA POSTAĆ DRGAŃ CZYSTO WYMUSZONYCH WEDŁUG KRYŁOWA, KĄCZKOWSKIEGO I ŚNIADEGO

Jak już zaznaczono we wstępie Kryłow w 1913 roku w monografii [3] pierwszy wysumował szereg nieskończony opisujący drgania czysto wymuszone belki sprężystej o swobodnych końcach obciążonej ruchomą siłą skupioną poruszającą się ze stałą prędkością.

Rozwiązanie równania ruchu (5) jest sumą całki ogólnej i szczególnej

$$w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t). \quad (35)$$

Rozbijając rozwiązanie na dwie części zależne od $v t$ (całka szczególna) i $\omega_n t$ (całka ogólna) całkowite ugięcie belki Kryłow zapisał w następujący sposób:

$$\tilde{w}(x, t) = \frac{2Pl^3 g}{\pi^4 q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi v t}{l}}{n^2 (n^2 \pi^2 b_1^2 - v^2 l^2)} + \frac{2Pl^4 v g}{\pi^4 q b_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi v t}{l}}{n^3 (n^2 \pi^2 b_1^2 - v^2 l^2)}, \quad (36)$$

gdzie: $b_1^2 = \frac{v^2 l^2}{q}$, $\frac{q}{g} = \bar{m}$.

Pierwsza część rozwiązania (36) opisuje drgania czysto wymuszone, druga zaś drgania swobodne belki, których nie można wysumować, bowiem układ o masie ciągłej ma nieskończenie wiele stopni swobody. Drgania czysto wymuszone można również rozbić na dwie części i zapisać je następująco:

$$w_2(x, t) = \frac{2 P l^3}{\pi^4 E J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi v t}{l} + \frac{2 P l^3}{\pi^4 E J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\alpha}^2}{n^4 (n^2 - \hat{\alpha}^2)} \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi v t}{l}, \quad (37)$$

gdzie $\hat{\alpha}^2 = \frac{v^2 l^2}{b_1^2 \pi^2}$.

Różniczkując wyrażenie (37) trzy razy względem zmiennej x otrzymujemy:

$$-w_2'''(x, t) = \frac{2 P}{\pi E J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi v t}{l} + \frac{2 P \hat{\alpha}^2}{\pi E J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\alpha}^2}{n (n^2 - \hat{\alpha}^2)} \cos \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi v t}{l}. \quad (38)$$

"Prim" oznacza pochodną cząstkową względem zmiennej przestrzennej. Wyrażenie (38) można zapisać również w następującej postaci:

$$-\frac{\pi E J}{2 P} w_2'''(x, t) = \varphi(x) = \varphi_1(x) + \hat{\alpha}^2 \tilde{\omega}(x). \quad (39)$$

Pierwszy z szeregów (38) jest rozwinięciem funkcji kawałkami liniowej na długości belki z uwagi na wyrażenie $\frac{1}{n}$.

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu względem x równania (39), otrzymujemy następujące liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu na funkcję jednej zmiennej $\varphi(x)$. Mamy zatem:

$$\varphi''(x) + \frac{v^2}{b_1^2} \varphi(x) = 0, \quad \tilde{\omega}(x) = \frac{\pi^2}{l^2} \varphi(x). \quad (40)$$

Rozwiązanie równania (40)₁ jest znane. Powracając do (39) możemy już wyznaczyć zamkniętą postać $w_2(x, t)$. W oryginalnej pracy Kryłowa [3] zamknięta forma szeregu opisującego drgania czysto wymuszone podana jest w następujący sposób:

$$w_2(x, t) = -\frac{P}{E J} \frac{b_1^2}{v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{l-vt}{l} x + \frac{b_1}{v} \frac{\sin \frac{v}{b_1} (l-vt)}{\sin \frac{v l}{b_1}} \sin \frac{v x}{b_1} \right], \quad (41)$$

przy $0 < x < vt$, oraz

$$w_2(x, t) = -\frac{P}{E J} \frac{b_1^2}{v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(l-x) \frac{vt}{l} + \frac{b_1}{v} \frac{\sin \frac{v}{b_1} (l-x)}{\sin \frac{v l}{b_1}} \sin \frac{v}{b_1} vt \right], \quad (42)$$

przy $vt < x < l$.

Następnie Kączkowski [6], Reipert [7÷8] i Śniady [9÷11] powtórzyli innymi metodami rozwiązanie Kryłowa z prac [3÷4], wskazując przy tym na interpretację fizyczną zagadnienia.

W pracy Kączkowskiego [6] wzory (41) i (42) wyprowadzone metodą ugięć fałdowych, podane są w następującej, bezwymiarowej postaci:

$$w_2(\tau, \xi) = \frac{P l^3}{E J \sigma^2} \left(\frac{\sin \sigma \xi' \sin \sigma \tau}{\sigma \sin \sigma} - \xi' \tau \right), \quad (43)$$

przy $\tau < \xi$, oraz

$$w_2(\tau, \xi) = \frac{P l^3}{E J \sigma^2} \left(\frac{\sin \sigma \xi \sin \sigma \tau'}{\sigma \sin \sigma} - \xi \tau' \right), \quad (44)$$

przy $\tau > \xi$.

W równaniach (43) i (44) zastosowano oznaczenia:

$$\xi' = 1 - \xi, \quad \tau' = 1 - \tau, \quad \sigma^2 = \frac{\bar{m} v^2 l^2}{E J}. \quad (45)$$

Do powyższych form zamkniętych opisujących drgania czysto wymuszone należy dodać drgania swobodne towarzyszące, spełniające warunki początkowe zadania. Drgania te są opisane już szeregami:

$$w_3(\xi, \tau) = \frac{2 P l^3}{E J} \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \pi \xi \sin \alpha_n \tau}{(n \pi)^3 [(n \pi)^2 - \sigma^2]}, \quad (46)$$

$$w_3(\xi', -\tau') = \frac{2 P l^3}{E J} \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n \pi \xi \sin \alpha_n \tau'}{(n \pi)^3 [(n \pi)^2 - \sigma^2]}$$

gdzie: $\alpha_n = \frac{(n \pi)^2}{\sigma}$.

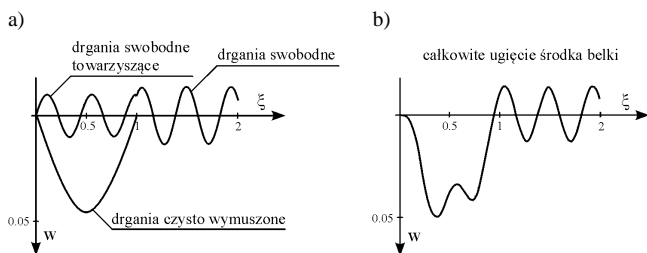
Całkowite ugięcie belki opisane jest ostatecznie funkcjami:

$$w = w_2^I + w_3(\xi, \tau) \quad \text{przy } \tau < 0 < \xi,$$

$$w = w_2^{II} + w_3(\xi, \tau) \quad \text{przy } \xi < 0 < 1, \quad (47)$$

$$w = w_3(\xi, \tau) + w_3(\xi', -\tau') \quad \text{przy } \tau > 0.$$

Wyizolowane wykresy drgań swobodnych towarzyszących, drgań wymuszonych i drgań swobodnych po zjechaniu siły z belki swobodnie podpartej pokazano na rysunku 7a). W wyniku zsumowania tych trzech wykresów (wzory (47)) otrzymujemy ostateczny wykres przebiegu w czasie całkowitego ugięcia belki w jej środkowym punkcie (rysunek 7b)).



Rys. 7. Drgania środka belki swobodnie podpartej przy prędkości ruchomej siły skupionej $v=75$ m/s

Żyszko w pracy [25] uwzględniła tłumienie proporcjonalne do prędkości wykorzystując metodę rozwiązania [6]. Reipert w pracach [7÷8] wykorzystując [6] uogólnia metodę na dowolne warunki brzegowe i rozwiązuje ramę obciążoną ruchomą siłą skupioną.

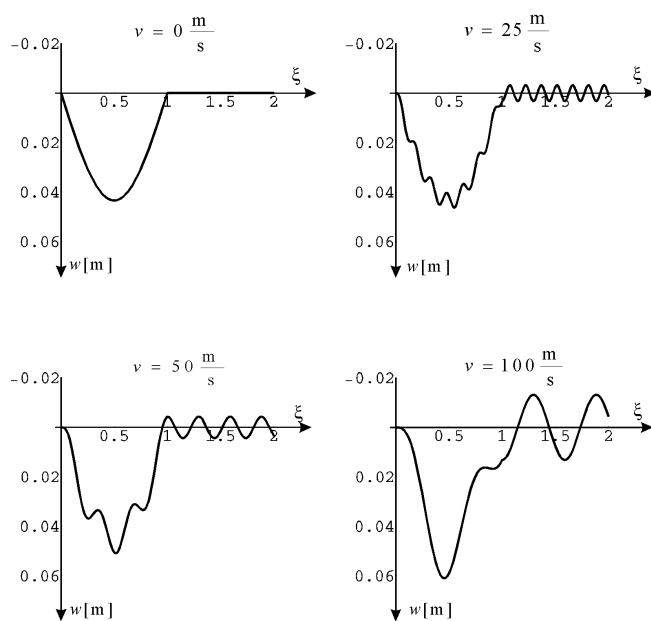
Jeszcze inne podejście stosuje Śniady w pracach [9÷11]. Wprowadzając dwie współrzędne bezwymiarowe ξ i τ sprowadza cząstkowe równanie ruchu belki do równania zwyczajnego drugiego rzędu o zamkniętej postaci całki szczególnej. Jest to inny sposób niż zastosowany w oryginalnej pracy Kryłowa [3] lub [4].

5. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

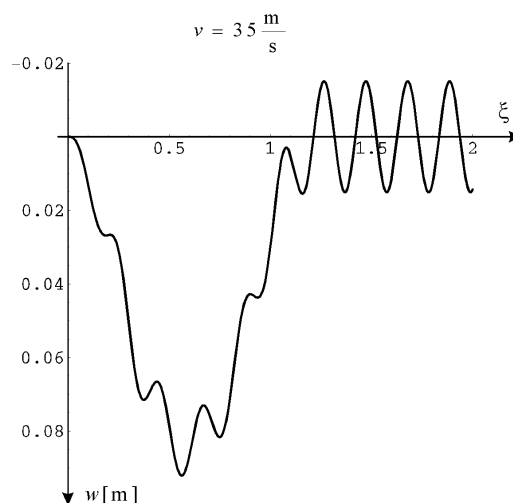
Wyniki przedstawionych rozważań analitycznych zaprogramowano na komputer przy wykorzystaniu programu «Mathematica». Obliczenia przeprowadzono dla belki stalowej dwuteowej o przekroju monosymetrycznym, rozpiętości przęsła $l = 24$ m, sztywności na zginanie $EJ = 2019,25 \cdot 10^3$ kNm² i obciążeniu zewnętrznym $P = 305$ kN. Wykres ugięć dynamicznych belki swobodnie podpartej, zarówno w przypadku drgań wymuszonych siłą skupioną, jak i w przypadku drgań swobodnych, przedstawiono na rysunku 8 przy czterech różnych prędkościach obciążenia.

Wyniki uzyskano z rozwiązania w formie zamkniętej, jak również w postaci szeregu. W rozwiązaniu analitycznym w postaci szeregu uwzględniono 121 wyrazów. Jak wynika z rysunku 8a, przy małych prędkościach ruchomej siły skupionej, decydujący wpływ na całkowite ugięcie dynamiczne belki mają drgania czysto wymuszone (opisane zamkniętą postacią). Przy większych prędkościach obciążenia ruchomego drgania swobodne towarzyszące i drgania swobodne rosną i mogą przewyższać amplitudy drgań czysto wymuszonych.

Zastosowanie zasady superpozycji pozwala na wyznaczenie ugięć belki od dwóch i więcej sił skupionych poruszających się jedna za drugą w stałych lub zmiennych odstępach. Przykładowy wykres drgań tej samej belki, ale obciążonej dwiema siłami skupionymi poruszającymi się jedna za drugą w stałej odległości pokazano na rysunku 9. Uzyskane wyniki potwierdzono metodą elementów skończonych w pracy [13].



Rys. 8. Ugięcie dynamiczne środka belki obciążonej siłą skupioną ($0 \leq \xi \leq 1$ – drgania wymuszone, $\xi > 1$ – drgania swobodne), gdzie $\xi = \frac{vt}{l}$



Rys. 9. Ugięcie dynamiczne środka belki swobodnie podpartej, obciążonej dwiema siłami skupionymi, $0 \leq \xi \leq 1$ – drgania wymuszone, $\xi > 1$ – drgania swobodne, $v=35$ m/s

WNIOSKI I UOGÓLNIENIA

W pracy analizowano problem Kryłowa ruchomej, bezmasowej siły skupionej poruszającej się po sprężystej belce o masie równomiernie rozłożonej. Istotą opracowania jest pokazanie pewnego sposobu wyznaczenia drgań czysto wymuszonych w formie zamkniętej. Udowodniono, przy tym, że rozwiązanie statyczne belki na podłożu Winklera oraz na podłożu Własowa z dużą siłą ścisiskającą $S = mv^2$ przy $vt = c = \text{const.}$ jest takie samo jak rozwiązanie w postaci szeregu opisujące drgania czysto wymuszone w rozwiązaniu Kryłowa. Pokazano, że drgania czysto wymuszone stanowią zasadniczą część rozwiązania, zwłaszcza przy małych prędkościach ruchomego obciążenia. Podano przykład obliczeniowy ilustrowany rysunkami. W pracy przedyskutowano również wybrane problemy ze stateczności belki na podłożu Winklera oraz na podłożu Własowa. Jak wynika ze wzorów (33) siła krytyczna w przypadku

belki na podłożu Własowa jest większa od siły krytycznej w belce na podłożu Winklera. Do pracy dołączono wykaz literatury zawierający 42 pozycje.

BIBLIOGRAFIA

1. Kriloff A., *Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben*. Mathematische Annalen, 61, 1905, pp. 211–234.
2. Крылов А.Н., *О вынужденных колебаниях упругих призматических стержней*. Избранные Труды, Издат. Академии Наук СССР, Москва 1956, стр. 288-314. Patrz także Крылов А.Н., *О напряжении вызываемом в упругом системе динамической нагрузки*. Бюллетень Научно-Технического Комитета Управления Военно-Морских Сил РККА. 1930, Выпуск 4, стр. 5-38.
3. Крылов А.Н., *О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах*. Известия Морской Академии, ОПБ, вып.2, 1913, а тоже ГИТ-ТЛ, Москва 1956, пятое издание.
4. Крылов А.Н., *Вибрация судов. том X*, Собрание Трудов, Издательство АН СССР, Москва-Ленинград 1948.
5. Ручимский М.Н., *К вопросу о расчете балки, находящейся под действием движущейся силы переменной величины*. Инженерный Сборник, том XI, 1952, стр. 187-188.
6. Kaçzkowski Z., *Vibration of a beam under a moving load*. Proceedings of Vibration Problems, Vol.4, no.4, Warsaw 1963, pp. 357–373.
7. Reipert Z., *Vibration of a beam arbitrarily supported on its edges under a moving load*. Proceedings of Vibration Problems, 2, 10, Warsaw 1969, pp. 247– 259.
8. Reipert Z., *Vibration of frames under moving load*. Archiwum Inżynierii Łądowej, tom XVI, z. 3/1970, pp. 419–447.
9. Śniady P., *Drgania dźwigarów wywołane ruchomym obciążeniem*. Prace naukowe Inst. Inż. Łąd. Politechniki Wrocławskiej, 21, Monografia 5, Wrocław 1976.
10. Śniady P., *Zamknięte postacie aperiodycznych drgań dźwigarów pólnieskończonych*. Archiwum Inżynierii Łądowej, tom XX, z.4, 1974, str. 601–608.
11. Śniady P., *Tłumione drgania struny i pręta wywołane ruchomą siłą*. Rozprawy Inżynierskie, 24, 1, 1976, str. 33–43.
12. Timoshenko S.P., *Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail*. Proceeding of the Second International Congress for Applied Mechanics Zurich Switzerland, 1926, pp. 407–418.
13. Ataman M., Szcześniak W., *Analiza dynamiczna belek pod obciążeniem ruchomym*. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej im. Kazimierza Puławskiego, Transport Nr 2(11), 2000, str. 84–100.
14. Szcześniak W., *Inercyjne obciążenia ruchome na belkach*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo z. 112, 1990, str. 1–132.
15. Szcześniak W., *Wybrane zagadnienia dynamiki płyt poddanych inercyjnym obciążeniom ruchomym*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo z. 119, 1992, str. 1–112.
16. Szcześniak W., *Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt*. OWPW, Warszawa 2000 str. 155–156.
17. Szcześniak W., *Zastosowanie równań Lagrange'a drugiego rodzaju w zagadnieniu dynamicznym belki Timoshenki pod ruchomym obciążeniem inercyjnym*. Rozprawy Inżynierskie, 38, 3–4, 1990, str. 591–633.
18. Hetényi M., *Beams on elastic foundation*. Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1956.
19. Naleszkiewicz J., *Zagadnienia stateczności sprężystej*. Wydawnictwa Komunikacyjne, Warszawa 1953.
20. Timoshenko S.P., Gere J.M., *Teoria stateczności sprężystej*. Arkady, Warszawa 1963.
21. Ржаницын А.Р., *Устойчивость равновесия упругих систем*. ГИТ-ТЛ, Москва 1956.
22. Вольмир А.С., *Устойчивость деформируемых систем*. Издат. Наука, Москва 1967.
23. Тимошенко С.П., *Устойчивость стержней, пластин и оболочек*. Издат. Наука, Москва 1971.
24. Динник А.Н., *Избранные труды*. издат. АН УССР, Киев 1952.
25. Żyszko M., *Pewne zagadnienie dynamiki belki mostowej*. AIL, 12, 3, 1966, str. 373–381.
26. Szcześniak W., *Problemy ruchomych obciążeń w Polsce*. Księga pokonferencyjna «Theoretical foundations of civil engineering I» Depropietrowsk, 1993, str. 191–198.
27. [27] Бондар Н.Г., Казей И.И., Лесохин Б.Ф., Козьмин Ю.Г.: *Динамика железнодорожных мостов*. Издательство Транспосрт, Москва 1965.
28. Szcześniak W., *Drgania wymuszone belek i płyt na podłożu odkształcalnym w zakresie lekko-sprężystym pod obciążeniem ruchomym*. Rozprawy Inżynierskie, Vol. 30, No.3, 1972, str. 455–476.
29. Gałęcka E., Reipert Z., *Drgania belki mostowej wywołane niere-sorowaną ruchomą siłą masową*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo z. 56, Warszawa 1977, str. 7–18.
30. Fryba L., *Vibration of solids and structures under moving load*. Academia, Prague, 1972.
31. Пановко Я.Г., *Исторический очерк развития теории динамического действия подвижной нагрузки (к столетию постановки проблемы)*. Труды Ленинградской Краснознаменной Военно-Воздушной Инженерной Академии, выпуск 17, Издт. ЛКВВИА, 1948, стр. 8-38.
32. Timoshenko S.P., *Vibration Problems in engineering*. D. Van Nostrand Company, Pricenton, 1956.
33. Szcześniak W., *Zastosowanie równań Lagrange'a drugiego rodzaju w zagadnieniu dynamicznym belki Timoshenki pod ruchomym obciążeniem inercyjnym*. Rozprawy Inżynierskie, 38, 3–4, 1990, str. 591–634.
34. Jeffcott H.H., *On the vibration of beam under the action of moving loads*. Phil. Mag., Ser. 7, Vol. 8, p. 66, 1929.
35. Szcześniak W., *Drgania belki Timoshenki pod wpływem ciągłego, równomiernie rozłożonego, ruchomego obciążenia inercyjnego. Model ciągły konstrukcji*. Prace naukowe Politechniki warszawskiej. Budownictwo z.119, 1990, str. 77–118.
36. Szcześniak W., *Drgania belki Timoshenki pod wpływem ciągłego, równomiernie rozłożonego, ruchomego obciążenia inercyjnego. Model dyskretny konstrukcji*. Prace Naukowe Politechniki warszawskiej. Budownictwo z.119, 1990, str. 119–132.
37. Zbiciak A., Szcześniak W., *Ruchome obciążenia bezinercyjne na belce modelowanej jednym stopniem swobody*. Komputerowe Systemy Wspomagania Nauki, Przemysłu i transportu «TRANSCOMP», Zakopane-Radom, 2000, str. 441–450.
38. Ataman M., Szcześniak W.: *Drgania belki wspornikowej modelowanej jednym stopniem swobody pod lewostronnym obciążeniem ruchomym*. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport, Radom,1(13) 2001, str. 67-79.
39. Strzyżakowski Z., Szcześniak W., *Drgania belki wspornikowej modelowanej jednym stopniem swobody pod prawostronnym obciążeniem ruchomym*. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport, Radom,1(13) 2001, str. 81-93.

40. Szcześniak W., *Zadanie Willisa-Stoksa i «MATHEMATICA»*. IX Seminarium Posko-Ukraińskie, 2001, str. 405-412.
41. Solecki R., Szymkiewicz J., *Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*. Arkady, Warszawa 1964.
42. Szcześniak W., *Ruchome inercyjne obciążenia ciągłe na sprężystej belce swobodnie podpartej, modelowanej jednym stopniem swobody*. X Jubileuszowe Seminarium Polsko-Rosyjskie, Moskwa, 2001, str. 173-200.

The Krylov problem in the case of a beam on Vlasov inertial foundation

The paper deals with vibrations of the elastic beam caused by the moving force traveling with uniform speed. The function defining the pure forced vibrations (aperiodic vibrations) is presented in a closed form. Dynamic deflection of the beam caused by moving force is compared with the static deflection of the beam subjected to the force P , and com-

pressed by axial forces $S = mv^2$. Comparing equations (9) and (13), it can be concluded that the effect on the deflection of the speed of the moving force is the same as that of an additional compressive force $S = mv^2$. Selected problems of stability of the beam on the Winkler foundation and on the Vlasov inertial foundation are discussed. One can see that the critical force of the beam on Vlasov foundation is greater than in the case of Winkler's foundation. Numerical examples are presented in the paper.

Autorzy:

prof. dr hab. inż. **Wacław Szcześniak** – Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury

dr inż. **Magdalena Ataman** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej

JEL: L64 DOI: 10.24136/atest.2018.165

Data zgłoszenia: 2018.05.24 Data akceptacji: 2018.06.15