

Algorytmy obliczenia parametrów okręgu skanowanego głowicą na współrzędnościowej maszynie pomiarowej

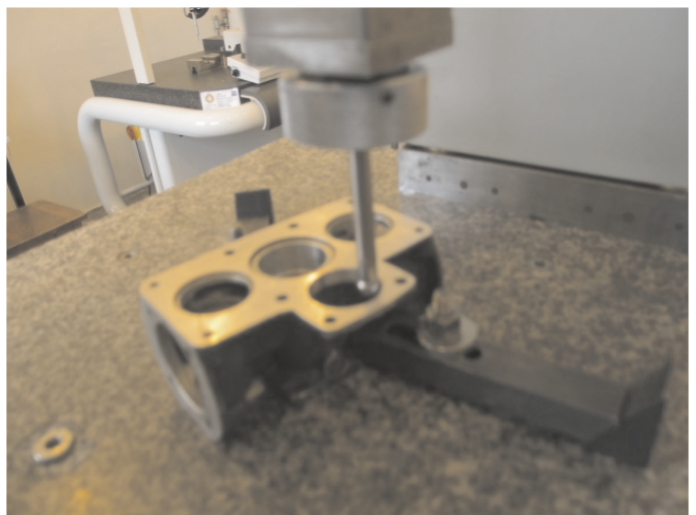
RYSZARD FILIPOWSKI, ZBIGNIEW LECHNIAK, JÓZEF ZAWORA*

Przedstawiono iteracyjną metodę obliczania parametrów okręgu (m_x, m_y, R) na podstawie formuły Newtona. Przyjęto, że graniczna wartość składowych gradientu układu równań jednorodnych wynosi 10^{-6} mm. Do testowania programu wykorzystano punkty kontrolne leżące w sąsiedztwie znanego okręgu oraz zbiór punktów po skanowaniu otworu na współrzędnościowej maszynie pomiarowej firmy VIS, głowicą ze sztywnym trzpieniem. Niepewność pomiaru wynosiła: w osi OX 0,012 mm, w osi OY 0,01 mm. Za pomocą programu oblicza się okręgi: odniesienia najmniejszych kwadratów (LSCI), wpisany największy (MICI), opisany najmniejszy (MCCI) oraz najmniejszej strefy (MZCI).

1. Wstęp

Pomiar okręgu na współrzędnościowej maszynie pomiarowej (ang. CMM) jest zadaniem występującym często we współrzędnościowych pomiarach elementów maszyn. Dokładne określenie parametrów okręgu (m_x, m_y, R) jest istotne zarówno na etapie definiowania układu współrzędnych przedmiotu, jak również w metrologii wymiarów wewnętrznych, zewnętrznych i mieszanych. Parametry okręgu oblicza się na podstawie współrzędnych punktów mierzonych za pomocą głowicy pomiarowej z końcówką kulistą, wykorzystując oprogramowanie CMM. Pomiar punktów w otworze (na wałku) głowicą pomiarową można wykonać przez próbkowanie lub przez skanowanie. Podczas skanowania otworu w korpusie (rys. 1) [2], współrzędne punktów pomiarowych $P_i(x_i, y_i, z_i)$ są zapisywane do sterownika CMM ze stałą częstością a następnie transmitowane do komputera PC jako plik tekstowy. Częstość zapisu współrzędnych punktów wynosiła 10 Hz [7]. Podczas skano-

wania manualnego prędkość przesuwu głowicy pomiarowej zależy od predyspozycji operatora i najczęściej jest prędkością zmienną. Powoduje to w konsekwencji zmienną odległość między zapisanymi punktami P_1, \dots, P_n . Chwilowy postój

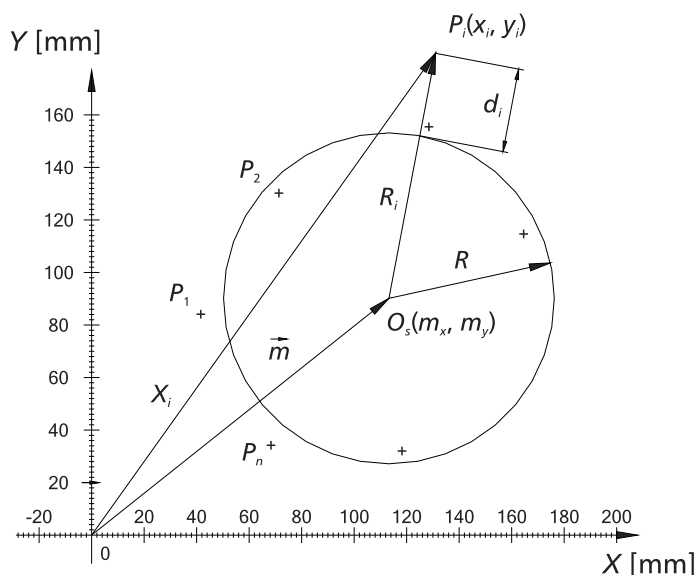


Rys. 1. Pomiar skanowaniem otworu na maszynie współrzędnościowej firmy VIS [2] głowicą pomiarową ze sztywnym trzpieniem z końcówką sferyczną

* Dr inż. R. Filipowski (rfilipowski@meil.pw.edu.pl), mgr inż. Z. Lechniak, dr hab. inż. J. Zawora, Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Produkcji, Instytut Technik Wytwarzania.

głowicy pomiarowej podczas skanowania powoduje, że w kolejnych punktach P_1, \dots, P_n zapisywane są te same współrzędne. Powoduje to poważne problemy podczas realizacji niektórych cykli obliczeniowych.

Po to, aby uniknąć tych kłopotów, prezentowany w artykule program sortuje ciąg punktów pomiarowych i usuwa wszystkie punkty leżące w mniejszej odległości od odległości granicznej równej $DIST = 1$ mm. Wartość graniczną odległości między punktami $DIST$ można zmienić podczas uruchomienia programu w trybie konwersacyjnym. Modyfikowany zbiór



Rys. 2. Parametry okręgu (m_x, m_y, R) w płaszczyźnie XY ; P_i – punkty pomiarowe w bliskim sąsiedztwie okręgu, O_s – środek okręgu, d_i – odległość punktu P_i od okręgu odniesienia

punktów po skanowaniu otworu jest prawie równomiernie rozłożony w sąsiedztwie hipotetycznego okręgu o parametrach (m_x, m_y, R) (rys. 2).

Współrzędne punktów pomiarowych $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ wykorzystuje się do obliczenia nieznanymi parametrów okręgu (m_x, m_y, R). Parametry okręgu wyznaczają trzy punkty. Ponieważ punkty po skanowaniu znajdują się w sąsiedztwie hipotetycznego okręgu, to każde trzy kolejne punkty będą określać okręgi o różnych środkach O_s i różnych promieniach R . Obliczenie dużej liczby okręgów z punktów ze zbioru punktów po skanowaniu i obliczenie wartości średniej parametrów okręgu poprawia dokładność obliczenia ale nie w istotny sposób. Do dokładnego obliczania parametrów okręgu zastosowano aproksymację średniokwadratową punktów leżących w bliskim sąsiedztwie hipotetycznego okręgu. W artykule przedstawiono metodę iteracyjną Newtona stosowaną do rozwiązywania układu nieliniowych równań jednorodnych [1]. Przybliżenie początkowe położenia okręgu i jego promienia niezbędne do rozpoczęcia procesu iteracyjnego, obliczone wg średniej arytmetycznej parametrów okręgu liczonych z $k = (n - 2)$ kombinacji trzech punktów pomiarowych. Warunkiem zakończenia cyklu iteracyjnego Newtona są wartości układu

równań jednorodnych mniejsze od 10^{-6} mm. Po zakończeniu cyklu iteracyjnego program oblicza wartości odchyłek okrągłości: wzniesienia-odniesienia, odniesienia-wgłębienia, wzniesienia-wgłębienia oraz średnią kwadratową względem okręgu odniesienia najmniejszych kwadratów (LSCI). Ponadto program oblicza okręgi odniesienia: wpisany największy (MICI), opisany najmniejszy (MCCI) oraz najmniejszej strefy (MZCI).

2. Parametry okręgu definiowane przez ciągi trzech punktów

Punkty $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ leżące na okręgu w płaszczyźnie XY wiąże w układzie kartezjańskim równanie:

$$(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2 - R^2 = 0 \quad (1)$$

gdzie:

(x_i, y_i) – współrzędne kolejnego punktu pomiarowego,

(m_x, m_y) – współrzędne środka okręgu O_s ,

R – promień okręgu (rys. 2).

Współrzędne środka O_s i promień okręgu R będą dalej nazywane parametrami okręgu. Parametry okręgu są ustalone przez trzy punkty leżące na tym okręgu. Po podstawieniu do równania (1) współrzędnych trzech punktów, oraz po odjęciu równań stronami i wyeliminowaniu kwadratów zmiennych m_x^2, m_y^2, r^2 , otrzymuje się układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi m_x, m_y o postaci:

$$\left. \begin{aligned} 2(x_1 - x_2)m_x + 2(y_1 - y_2)m_y &= (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) \\ 2(x_1 - x_3)m_x + 2(y_1 - y_3)m_y &= (x_1^2 - x_3^2) + (y_1^2 - y_3^2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Układ równań (2) rozwiązuje się metodą macierzową. Obliczenie okręgu z trzech kolejnych punktów określa parametry okręgu znacznie różniące się między sobą. Przyjmuje się w algorytmie, że parametry okręgu O_s są średnimi arytmetycznymi parametrów obliczonych z $k = (n - 2)$ kombinacji n punktów. Parametry okręgu O_s z $k = (n - 2)$ kombinacji n punktów obliczono ze wzorów:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{\sum_{i=1}^k m_{x_i}}{k}, & m_y &= \frac{\sum_{i=1}^k m_{y_i}}{k}, \\ R &= \frac{\sum_{i=1}^k \sqrt{(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2}}{k} \end{aligned} \quad (3)$$

Aby wyniki obliczeń były wystarczająco dokładne, odległość między punktami na okręgu powinna być możliwie równomierna. Dla uzyskania tego efektu należy po skanowaniu ręcznym stosować sortowanie pliku z warunkiem odległości między punktami ($DIST$). Przyjęto $DIST = 1$ mm. Wszystkie punkty w zbiorze po skanowaniu leżące w mniejszej odległości od granicznej $DIST$ zostały usunięte ze zbioru. Parametry okręgu obliczone według zależności (2) i (3) traktuje się jako wartości początkowe.

Dla poprawienia dokładności obliczeń parametrów okręgu, przy dużej liczbie punktów pomiarowych $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, stosuje się aproksymację średniokwadratową Newtona.

3. Aproksymacja średniokwadratowa Newtona

Okrąg hipotetyczny ustala się metodą najmniejszych kwadratów odchyłek punktów. Punkty pomiarowe $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, leżą w bliskim sąsiedztwie nominalnego okręgu. Odległość punktu $P_i(x_i, y_i)$ od środka okręgu O_s (rys. 2) określa się zależnością wektorową:

$$(\vec{x}_i - \vec{m}) - \vec{R} = \vec{d}_i \quad (4)$$

Ponieważ wektory $(\vec{x}_i - \vec{m})$, \vec{R} , \vec{d}_i są kolinearne (współliniowe), moduł odległości $|\vec{d}_i|$ punktu od okręgu określa równanie:

$$|\vec{d}_i| = \sqrt{(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2} - R = d_i \quad (5)$$

Sumę kwadratów odległości $\sum_{i=1}^{i=n} d_i^2$ opisuje funkcja:

$$\sum_{i=1}^{i=n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sqrt{(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2} - R \right)^2 \quad (6)$$

Gradient funkcji f

Funkcję f zawierającą trzy niewiadome (m_x , m_y , R) minimalizuje się poprzez obliczenie jej pochodnych cząstkowych względem zmiennych: m_x , m_y , R , które przyrównujemy do zera [6]. Składowe funkcji \vec{f} [f_1 , f_2 , f_3] (gradient) wyrażają się wzorami:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2} - R \right) \cdot (x_i - m_x) = 0 \\ f_2 &= \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2} - R \right) \cdot (y_i - m_y) = 0 \\ f_3 &= \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2} - R \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Składowe gradientu f_1 , f_2 , f_3 są nieliniowe względem niewiadomych (m_x , m_y , R). Nieliniowy układ równań (7) jest układem jednorodnym. Do rozwiązania układu nieliniowego jednorodnego zastosowano metodę kolejnych przybliżeń Newtona [1].

3.2. Wzór iteracyjny kolejnych przybliżeń Newtona

Istota metody Newtona jest następująca: wstępnie oblicza się wartości początkowe parametrów okręgu (m_x , m_y , R). Wektor przybliżenia początkowego oznaczono x^p :

$$x^p = [m_x, m_y, R]^T \quad (8)$$

kolejne przybliżenia x^{p+1} wartości parametrów okręgu zapisuje się za pomocą wzoru:

$$x^{p+1} = x^p - J_f^{-1}(x^p) \cdot f(x^p), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

gdzie:

$J_f^{-1}(x_p)$ – macierz odwrotna Jacobiego gradientu funkcji f dla przybliżenia x^p ,

$f(m_x, m_y, R)$ – wartość gradientu funkcji ($[f_1, f_2, f_3]^T$) dla przybliżenia x^p .

3.3. Elementy macierzy Jacobiego dla okręgu

Macierz Jacobiego J_f dla gradientu funkcji f ma następującą postać:

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m_x} & \frac{\partial f_1}{\partial m_y} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m_x} & \frac{\partial f_2}{\partial m_y} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial m_x} & \frac{\partial f_3}{\partial m_y} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dla skrócenia zapisu elementów jacobianu (10) wprowadzono we wzorach (7) oznaczenie:

$$(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2 = R_i^2$$

Niżej przytoczono pochodne cząstkowe jacobianu (10):

– elementy *pierwszego* wiersza jacobianu:

$$\frac{\partial f_1}{\partial m_x} = - \sum_{i=1}^{i=n} \left[(x_i - m_x)^2 / \sqrt{R_i^2} - (\sqrt{R_i^2} - R) \right],$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial m_y} = - \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - m_y) \cdot (x_i - m_x) / \sqrt{R_i^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial R} = - \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m_x);$$

– elementy *drugiego* wiersza jacobianu:

$$\frac{\partial f_2}{\partial m_x} = - \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m_x) \cdot (y_i - m_y) / \sqrt{R_i^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial m_y} = - \sum_{i=1}^{i=n} \left[(y_i - m_y)^2 / \sqrt{R_i^2} - (\sqrt{R_i^2} - R) \right],$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial R} = - \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - m_y);$$

– elementy *trzeciego* wiersza jacobianu:

$$\frac{\partial f_3}{\partial m_x} = - \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m_x) / \sqrt{R_i^2},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial m_y} = - \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - m_y) / \sqrt{R_i^2}.$$

3.4. Warunek graniczny zbieżności cyklu iteracyjnego Newtona

Kolejne przybliżenia x^{p+1} są realizowane według formuły (9). Każda kolejna iteracja ($p+1$) przy zbieżności tej formuły daje malejące wartości składowych gradientu f_1 , f_2 , f_3 . Koniec procesu iteracyjnego określa minimalna wartość gradientu równa $|(f_1, f_2, f_3)^T| = 10^{-6}$ [mm]. Przy błędnym doborze punktu początkowego x^p proces iteracyjny może być rozbieżny. Jako miernik rozbieżności algorytmu (9) przyjęto graniczną liczbę 100 iteracji. W takim przypadku drukowany jest komunikat informujący o rozbieżności procesu iteracyjnego. Przy poprawnym zakończeniu procesu iteracyjnego otrzymuje się końcowy wektor $x = [m_x, m_y, R]^T$, tj. współrzędne środka okręgu $O_s(m_x, m_y)$ oraz jego promień R .



3.5. Składowe elementy programu obliczającego parametry okręgu

Program obliczający parametry okręgu o nazwie CIRZMN.EXE napisano w języku Fortran. Składa się z kilku podprogramów: pierwszy oblicza parametry okręgu z $k = (n - 2)$ kombinacji trzech kolejnych punktów pomiarowych; drugi oblicza parametry okręgu najmniejszych kwadratów LSCI, trzeci oblicza okrąg wpisany największy MICI, który przechodzi przez trzy punkty o najmniejszych promieniach względem okręgu LSCI, czwarty oblicza parametry okręgu opisanego, największego, MCCI, który przechodzi przez trzy punkty o największych promieniach względem okręgu LSCI, piąty oblicza okrąg odniesienia najmniejszej strefy MZCI [4], w której znajdują się punkty pomiarowe.

Program CIRZMN.EXE, został skompilowany w systemie Digital Fortran Version 6.0, 1998, wykorzystując podprogramy własne oraz z biblioteki IBM [8].

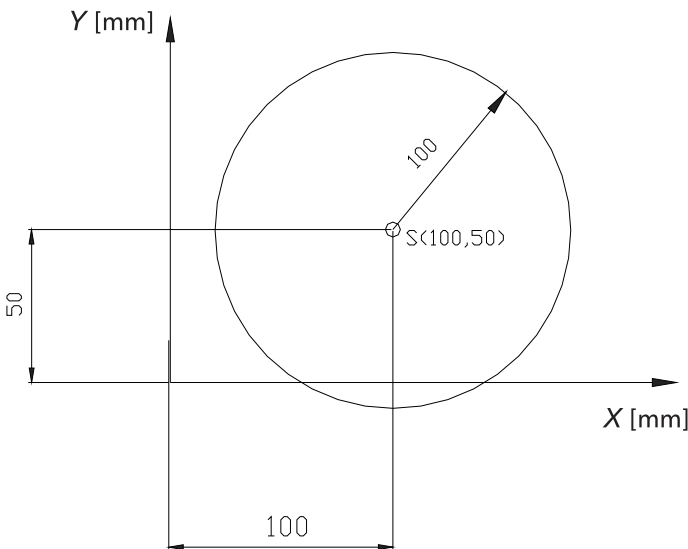
4. Analiza parametrów założonego okręgu obliczonych przez program

4.1. Założony okrąg w układzie współrzędnych XY (rys. 3)

Parametry okręgu: $(m_x, m_y, R) = (100, 50, 100)$ mm,

Równanie okręgu:

$$(x - 100)^2 + (y - 50)^2 = 100^2 \quad (11)$$



Rys. 3. Okrąg o parametrach $(m_x, m_y, R) = (100, 50, 100)$ mm

Na okręgu (rys. 3) obliczono 81 punktów, 41 punktów na górnym łuku oraz 40 punktów na dolnym łuku okręgu. Wzór roboczy do obliczenia współrzędnych punktów na górnym i dolnym łuku okręgu przyjmuje postać:

$$y = 50 \pm \sqrt{200 \cdot x - x^2} \quad (12)$$

Uzyskany zbiór punktów zmodyfikowano w ten sposób, że zmieniono przemiennie współrzędną $y_i, i=1, \dots, 81$ o wartość $-0,02$ mm lub $+0,02$ mm. Dla tak zmienionych współrzędnych punktów, leżących w bliskim sąsiedztwie nominalnego okręgu, obliczono parametry okręgu (m_x, m_y, R) za pomocą programu CIRZMN.EXE.

4.1.1. Parametry okręgu najmniejszych kwadratów LSCI

W tabelicy 1 przedstawiono wyniki obliczeń parametrów okręgu LSCI (rys. 3) aproksymowanego przez 81 punktów. Program CIRZMN.EXE oblicza średnie parametry okręgu z $k = (81 - 2)$ kombinacji trzech punktów pomiarowych a następnie okrąg najmniejszych kwadratów LSCI metodą iteracji Newtona. Program wykonał trzy iteracje. Ponadto program oblicza wartości odchyłek okrągłości wzniesienia, wgłębienia i średnią kwadratową odchyłkę względem okręgu LSCI [5], Obliczone przez program odchyłki okrągłości $-0,015/0,0206$ mm (Tabl. 1) są bliskie założonemu odchyłkom $-0,02, +0,02$ mm, a parametry okręgu (m_x, m_y, R) są bliskie wymiarom konstrukcyjnym $(100, 50, 100)$. Stanowi to potwierdzenie poprawności działania programu CIRZMN.EXE.

4.1.2. Parametry założonego okręgu obliczone w oparciu o trzy punkty

Obliczono parametry dwóch okręgów w oparciu o trzy punkty leżące w sąsiedztwie okręgu (rys. 3). Do obliczeń przyjęto punkty o indeksach (23, 24, 25) oraz trzy punkty o indeksach (22, 48, 69) z kątem rozstawienia około 120 stopni na obwodzie okręgu. Uzyskane wartości parametrów wykazują, że kąty rozstawienia punktów pomiarowych mają silny wpływ na dokładność obliczeń. W tabeli 2 podano parametry okręgu oraz odchyłki okrągłości, które mają wartość zerową, gdyż okrąg był liczony w oparciu o trzy punkty.

5. Analiza parametrów skanowanego okręgu obliczonych przez program

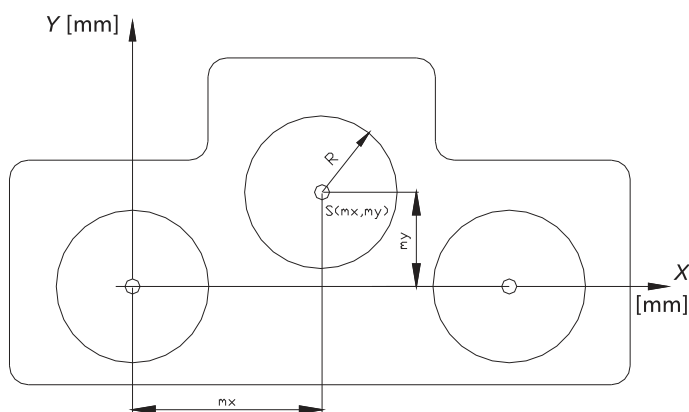
W wyniku skanowania otworu w korpusie na maszynie współrzędnościowej [2] w układzie współrzędnych XY (rys. 4) głowicą z końcówką sferyczną o średnicy $D = 11,995$ mm, uzyskano ciąg 133 punktów o nierównomiernej odległości między punktami. Program CIRZMN.EXE zmniejszył liczbę punktów z 133 do 54 przez parametr $DIST = 1$ mm.

Tablica 1. Parametry okręgu odniesienia najmniejszych kwadratów LSCI obliczone w oparciu o 81 punktów zadanego równaniem (12)

Liczba punktów	Liczba iteracji	Parametry okręgu mm			Odchyłki okrągłości wznies. / wgłęb. mm	Odchyłka okrągłości średnia kwadratowa mm
		m_x	m_y	R/D		
81	3	99,9986	49,9998	100,0004 / 200,0008	-0,015 / 0,0206	0,0162

Tablica 2. Parametry okręgu obliczone w oparciu o trzy punkty według równania (12)

Numer punktu	Liczba pkt.	Parametry okręgu mm			Odchyłki okrągłości wznies. / wglęb. mm	Odchyłka okrągłości średnia kwadratowa mm
		m_x	m_y	R/D		
(23, 24, 25)	3	103,5525	62,4354	87,0913 / 174,1827	0,0 / 0,0	0,0
(22, 48, 69)	3	99,9975	50,0014	100,0187 / 200,0373	0,0 / 0,0	0,0



Rys. 4. Schemat pomiaru otworu w układzie współrzędnych XY na maszynie współrzędnościowej [2]

5.1. Parametry okręgu skanowanego najmniejszych kwadratów LSCI

Program CIRZMN.EXE oblicza średnie parametry okręgu z $k = (54 - 2)$ kombinacji trzech punktów pomiarowych a następnie okrąg najmniejszych kwadratów LSCI metodą iteracji Newtona. Program wykonał trzy iteracje. Wyniki obliczeń programu zamieszczono w tabelicy 3. W ostatniej kolumnie (tabl. 3) podano wymiar strefy względem okręgu najmniejszych kwadratów LSCI, w której rozmieszczone są punkty pomiarowe.

Tablica 3. Parametry okręgu skanowanego najmniejszych kwadratów LSCI

Liczba punktów	Liczba iteracji	Parametry okręgu mm			Odchyłki okrągłości wznies. / wglęb. mm	Odchyłka okrągłości śred. kwadr. mm	Wymiar strefy dla okręgu LSCI mm
		m_x	m_y	R/D			
54	3	48,1360	44,6814	18,3532 / 36,7063	0,0405 / - 0,0295	0,0700	0,06998

Tablica 4. Parametry okręgu skanowanego obliczone z trzech punktów

Numer punktu	Liczba punktów	Parametry okręgu mm			Odchyłki okrągłości wznies. / wglęb. mm	Odchyłka okrągłości średnia kwadratowa mm
		m_x	m_y	R/D		
(41, 42, 43)	3	48,1390	44,2675	17,9862 / 35,9724	0,0 / 0,0	0,0
(1, 28, 46)	3	48,1227	44,6287	18,3341 / 36,6681	0,0 / 0,0	0,0

5.2. Parametry okręgu skanowanego obliczone w oparciu o trzy punkty

Do obliczeń przyjęto trzy kolejne punkty o indeksach (41, 42, 43) oraz trzy punkty o indeksach (1, 28, 46) z kątem rozstawienia około 120 stopni. Wyniki obliczeń (tabl. 4) potwierdzają, że kąty rozstawienia punktów pomiarowych mają silny wpływ na wartości parametrów okręgu. Bardziej dokładne wartości parametrów uzyskuje się w oparciu o trzy punkty o dużym kącie rozstawienia względem siebie, natomiast należy unikać pomiaru otworu według trzech kolejnych punktów w zbiorze. Odchyłka okrągłości średnia kwadratowa w oparciu o trzy punkty (tabl. 4) ma wartość zerową, gdyż okrąg był liczony z trzech punktów.

Porównując wyniki obliczeń parametrów okręgu skanowanego dla trzech punktach z dużą podziałką (punkty o indeksach: 1, 28, 46 – Tabl. 4) i wyniki obliczeń dla 54 punktów po skanowaniu (Tabl. 3) można postawić hipotezę, że niepewność obu pomiarów jest porównywalna. Dokładniejsze wyniki pomiarów otworów (wałków) uzyskujemy jednak po skanowaniu lub przez pomiar wielopunktowy metodą próbkowania.

6. Algorytm obliczenia okręgu odniesienia wpisanego największego MICI

Zgodnie z normą [7] okrąg wpisany największy MICI przechodzi przez trzy punkty, ze zbioru punktów o najmniejszych promieniach względem okręgu LSCI. W celu ich odnalezienia, punktom przyporządkowano współrzędne

Tablica 5. Parametry okręgu MICI wyznaczonego w oparciu o 3 punkty o najmniejszych promieniach w skanowanym otworze

Numer punktu	Liczba punktów	Parametry okręgu mm			Odchyłki okrągłości wznies. / wgnęb. mm	Odchyłka okrągłości średnia kwadratowa mm
		m_x	m_y	R/D		
(54, 53, 52)	3	48,1363	44,6856	18,3236 / 36,6471	0,0 / 0,0	0,0

biegunowe a następnie posortowano w funkcji przyrostu promienia R_i , $i = 1, 2, \dots, 54$, względem środka okręgu LSCI. Ze zbioru punktów program wybiera trzy ostatnie punkty o najmniejszych promieniach R_i , na których tworzy okrąg wpisany największy MICI [3]. Parametry okręgu MICI zamieszczono w tablicy 5.

7. Algorytm obliczenia okręgu odniesienia opisanego najmniejszego MCCI

Zgodnie z normą [7] okrąg odniesienia opisany najmniejszy MCCI przechodzi przez trzy punkty, ze zbioru punktów pomiarowych, o największych promieniach względem okręgu LSCI. Ze zbioru, po uprzednim sortowaniu, program wybiera trzy pierwsze punkty o największych promieniach R_i , na których tworzy okrąg odniesienia opisanego najmniejszy MCCI [3]. Parametry okręgu MCCI zamieszczono w tablicy 6.

8. Algorytm obliczenia okręgu odniesienia najmniejszej strefy MZCI

Zgodnie z normą [8] okrąg odniesienia najmniejszej strefy MZCI (rys. 5) oblicza się poprzez translację środka okręgu z położenia C_i do położenia C_{i+1} w kierunku punktu o największym promieniu R_i . Początkowe położenie okręgu C_i przyjęto w środku okręgu LSCI. Okręgu MZCI poszukuje się w cyklu iteracyjnym polegającym na definiowaniu kolejnych położenia środka okręgu C_{i+1} wzdłuż prostej przechodzącej przez środek okręgu C_i oraz przez punkt pomiarowy o największym promieniu R_i . Kolejny środek okręgu C_{i+1} definiuje się przez równanie parametryczne

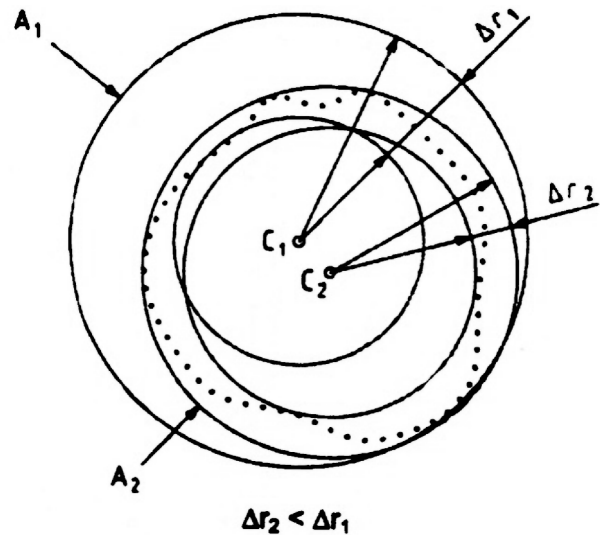
$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + t \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ y_{i+1} &= y_i + t \cdot (y_{i+1} - y_i) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

zaś zmniejszony promień okręgu C_{i+1} przez równanie

$$R(k + 1) = (R(k) - t \cdot R(k - 1)) \quad (14)$$

Wartość parametru przyjęto $t = 10^{-5}$. W obliczonym punkcie C_{i+1} program sortuje punkty w funkcji promienia R_i oraz oblicza strefę Δr_{i+1} rozmieszczenia punktów

$$\Delta r_{i+1} = R_1 - R_n \quad (15)$$



Rys. 5. Okrąg odniesienia najmniejszej strefy MZCI: A_1, A_2 – okręgi odniesienia, $\Delta r_1, \Delta r_2$ – długości stref punktów pomiarowych przed i po translacji środka okręgu, C_1, C_2 – wektor translacji środka okręgu w kierunku R_{max}

Tablica 6. Parametry skanowanego najmniejszego okręgu opisanego MCCI

Numer punktu	Liczba punktów	Parametry okręgu mm			Odchyłki okrągłości wznies. / wgnęb. mm	Odchyłka okrągłości średnia kwadratowa $\Delta R_{m\alpha}$ mm
		m_x	m_y	R/D		
(1, 2, 3)	3	48,1486	44,6802	18,3936 / 36,7872	0,0 / 0,0	0,0

Tablica 7. Parametry okręgu MZCI wyznaczonego w oparciu o ciąg 54 punktów pomiarowych

Liczba punktów.	Liczba iteracji	Parametry okręgu mm			Odchyłki okrągłości wznies. / wgnęb. mm	Wymiar strefy dla okręgu MZCI Δr_{min} mm
		m_x	m_y	R/D		
54	6	48,1360	44,6820	18,3525 / 36,7051	0,0406 / -0,0289	0,06948

Koniec cyklu iteracyjnego określa warunek

$$\Delta r_{i+1} = \Delta r_i \quad (16)$$

Parametry granicznego okręgu MZCI [3] po $i = 6$ -ciu iteracjach oraz szerokość strefy Δr_{min} zamieszczono w ostatniej kolumnie tablicy 7. Strefa dla okręgu MZCI jest mniejsza od strefy dla okręgu LSCI (Tabl. 4).

Pomiędzy promieniami okręgów w skanowanym otworze (rys. 4) zachodzi relacja:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{MZCI} < R_{MICI} < R_{LSCI} < R_{MCCI} \\ 18,3525 < 18,3531 < 18,3532 < 18,3936 \end{array} \right\} \quad (17)$$

5. Podsumowanie i wnioski

Oprogramowanie maszyny współrzędnościowej oblicza parametry okręgu metodą najmniejszych kwadratów. Przedstawione w artykule oprogramowanie przedstawia algorytmy obliczenia okręgu odniesienia najmniejszych kwadratów LSCI a ponadto algorytmy obliczenia pozostałych okręgów odniesienia, tj. wpisanego największego MICI, opisanego najmniejszego MCCI oraz okręgu najmniejszej strefy MZCI. Wykorzystuje się do tego celu współrzędne punktów pomiarowych zapisywane w pamięci komputera współpracującego z maszyną współrzędnościową. Na podstawie przytoczonych przykładów obliczeń wnioskujemy, że przy pomiarach okręgów w oparciu o trzy (cztery) punkty, należy dobierać punkty na okręgu z możliwie dużą podziałką kątową, aby uzyskać zadawalającą dokładność pomiaru okręgu. Przy dużej liczbie punktów pomiarowych $n \gg 3$ pomiary na CMM są bardziej wiarygodne, gdyż oprogramowanie CMM bazuje na metodzie aproksymacji średniokwadratowej.

Literatura

- [1] Demidovič B.P., Maron I.A.: Osnovy vyëislitelnoj matematyki, Izdatielstvo Nauka, Moskva, 1970, Rešenje nielinejnych uravneni.
- [2] Łazuchiewicz A., Kotnowski M., Koordynatometr XYZ, IO NE Nr 5/88, Ośrodek Badawczo-Rozwojowy Narzędzi VIS, Warszawa 1988,
- [3] Neumann H.J.: Koordinatenmesstechnik im Industriellen Einsatz, Moderne Industrie, 2000.
- [4] Pfeifer T., Hemdt A.: Berechnung der Basiselemente und die Tasterkompensation in der Koordinatenmesstechnik, Teil. 1, Basiselemente, Technisches Messen, t. 57, (1990), 3, R. Oldenburg Verlag.
- [5] Ratajczyk E.: Współrzędnościowa technika pomiarowa. Oficyna Wydawnicza, Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1994.
- [6] Sbornik Naučnych Program na Fortranie 2, Rukavodstvo dla Programista, Vypusk 2, Matričnaja Algebra i Liniejnaja Algebra, Moskva <STATISTICA> 1974.
- [7] PN-EN ISO 12181-1:2012, Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS), Okrągłość, Część 1: Terminologia i parametry okrągłości.
- [8] PN-EN ISO 1101:2006, Załącznik B, Ocena odchyłek geometrycznych, 8.4 – Okrągłość. ■