

KISIŁOWSKI Jerzy, ZALEWSKI Jarosław

## WYBRANE ASPEKTY ANALIZY I MODELOWANIA ZDERZENIA SAMOCHODÓW

### *Streszczenie*

*W artykule przeprowadzono analizę niektórych aspektów modelowania zderzenia samochodów z uwzględnieniem wybranych czynników wpływających na jego przebieg. Klasyczne podejście do zderzenia ciał zaadaptowano do problemu kolizji samochodów, prowadząc ogólną analizę złożoności tego zagadnienia.*

*Prócz uwzględnienia szorstkości powierzchni zderzających się pojazdów rozważono także występowanie dodatkowych, zewnętrznych sił impulsowych działających na układ pojazdów będących w kontakcie. Ponadto, prócz ruchu płaskiego, uwzględniono także ruch złożony (siła bezwładności, unoszenia i Coriolisa).*

*Dokonano analizy dotyczącej możliwości oraz konieczności uwzględnienia wybranych parametrów w modelowaniu zderzeń samochodów.*

### WSTĘP

Jednym z głównych problemów utrzymania płynności ruchu drogowego są jego zakłócenia wynikające z różnych zdarzeń, jakie mogą mieć miejsce na drodze i w jej bezpośrednim otoczeniu. Często o poprawności kontynuowania ruchu decydują skutki zderzenia oraz miejsce wystąpienia kolizji. Najgroźniejszymi w skutkach wydają się być wypadki, do których dochodzi na skrzyżowaniach, wzniesieniach oraz łukach drogi, a także zderzenia boczne i najechanie na nieruchomą przeszkodę.

W pracy skupiono się na analizie zjawisk zachodzących podczas zderzenia dwóch ciał (układów punktów materialnych), w odniesieniu do pojazdów samochodowych.

Dokonując prostego podziału zderzeń samochodów można, pod względem lokalizacji punktu początkowego kontaktu, wyodrębnić zderzenia czołowe, boczne, tylne i inne. Taka klasyfikacja jest bardzo uproszczona, ale pozwala na wyodrębnienie konkretnych przypadków. Pełniejszą klasyfikację zderzeń przy różnych kryteriach podziału zaprezentowano w [1], [2], [3] oraz [4].

Dotychczasowa analiza zderzenia pojazdów prowadzona była w kilku kierunkach. W pracach [1], [2], [3], [4], [5], [7], [8], [6], [9], [10] oraz [11] rozważano zarówno uproszczone, jak i bardziej złożone modele zderzenia. Opis uproszczonego modelu zderzenia sprowadza się do wykorzystania jedynie zasady pędu i krętu układu punktów materialnych [12] dla zestawu pojazdów pozostających w kontakcie, gdzie działające siły zewnętrzne zostają pomijane, jako znacznie mniejsze od impulsowych sił zderzenia.

W modelach złożonych uwzględniono m.in. parametry geometryczne i masowe oraz położenie środków mas zderzających się pojazdów, występowanie dodatkowych zewnętrznych sił impulsowych, związanych np. ze zmianą współczynnika przyczepności co

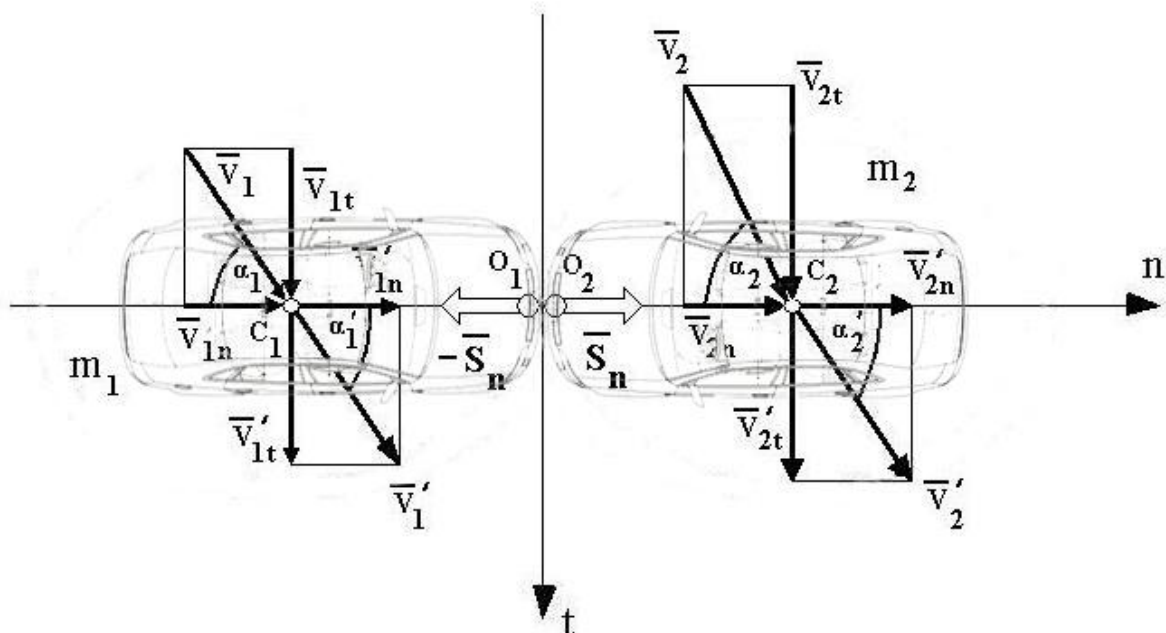
najmniej jednego koła [6], oddziaływanie przyczepy [5] oraz nachylenia drogi na przebiegu zderzenia [8], szorstkość powierzchni samochodów biorących udział w kolizji [2] oraz zderzenie z nieruchomą przeszkodą na przykładzie bariery betonowej [10] składającej się z  $n$  elementów połączonych przegubowo przy prędkości bariery przed zderzeniem równej zero.

W pracy [9] analizowano proces rekonstrukcji wypadku drogowego w oparciu o wzajemne położenie pojazdów, wykorzystując zależności kątowe pomiędzy wektorami prędkości samochodów przed i po zderzeniu (analiza czasowo – przestrzenna wypadku).

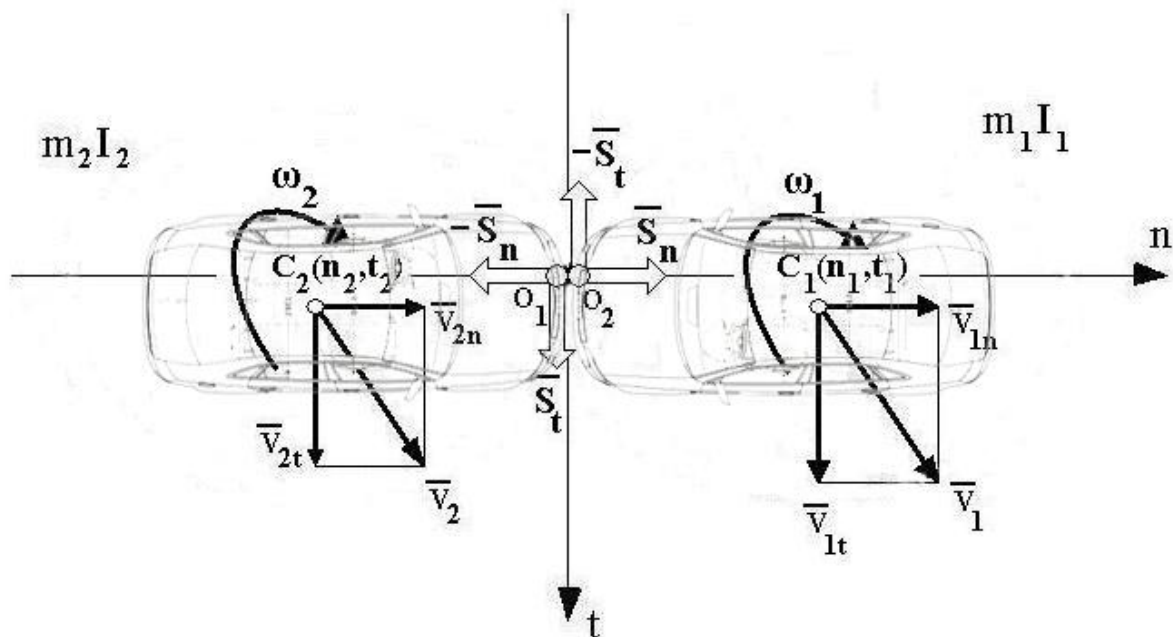
Prowadzono analizę modeli matematycznych opisujących zmianę parametrów podczas zderzenia bez ubytku masy. Zmiany położenia środka masy oraz wartości momentów bezwładności samochodu po zderzeniu przedstawiono w [6], [7] oraz [13]. Pomijając zmianę tych wielkości skupiono się na stworzeniu modelu matematycznego służącego do wyznaczenia parametrów ułatwiających rekonstrukcję wypadku drogowego (prędkości postępowej  $v$  oraz kątowej  $\omega$ ). Rozważano prowadzenie badań zarówno dla gładkich, jak i szorstkich powierzchni zderzających się ciał, dzięki czemu można obserwować procesy zderzenia w stanie rzeczywistym lub zbliżonym do rzeczywistego.

Na rys. 1 przedstawiono model zderzających samochodów o powierzchniach gładkich, zaś na rys. 2 – o powierzchniach szorstkich, gdzie dodatkowo występują impulsy styczne  $S_t$ , związane z tarcieniem między stykającymi się powierzchniami. W pracach [1], [2] oraz [11] prowadzono analizy dotyczące współczynnika restytucji dla prędkości normalnych i stycznych do powierzchni zderzenia.

Klasyfikację zderzeń, zarówno w kwestii szorstkości powierzchni jak i kierunku zderzenia rozwinięto w pracach [1], [2], [9]. Omówiono pojęcia zderzenia prostego, ukośnego oraz środkowego i mimośrodkowego. Opracowano także model matematyczny procesu zderzenia przy występowaniu dodatkowych sił zewnętrznych [6]. Problem kontaktu dwóch samochodów z uwzględnieniem i pominięciem tarcia omówiono w [14].



Rys. 1. Zderzenie samochodów o powierzchniach gładkich.



**Rys. 2.** Zderzenie samochodów o powierzchniach szorstkich.

Istotnym problemem dotyczącym modelowania zderzeń wydaje się uwzględnienie wielu dodatkowych czynników w jednym modelu, dzięki czemu możliwa jest pełniejsza analiza całego procesu. Deformacja nadwozia spowodowana jest odkształceniami objętościowymi oraz postaciowymi (normalny i styczny współczynnik restytucji), a więc istotne jest uwzględnienie współczynnika tarcia powierzchni pojazdów podczas uderzenia wzajemnie o siebie, jak i utraty energii kinetycznej wskutek wzajemnej penetracji. Ponadto pojazdy nie zawsze muszą wykonywać ruch płaski (np. przewracanie, oderwanie się od nawierzchni drogi lub pochyłość nawierzchni), zatem należy wziąć pod uwagę ruch złożony. Nie zawsze też siły zewnętrzne działające na samochody można pominąć, ponieważ ich wartość, w wyniku dynamicznego sprzężenia wywołanego zderzeniem, może impulsowo wzrosnąć na krótki przedział czasu. Innymi czynnikami mogącymi wpłynąć na przebieg zderzenia są: nierównomierny rozkład masy w pojeździe, trudne warunki drogowe (niski współczynnik przyczepności kół do nawierzchni) oraz uszkodzenia pojazdów objawiające się np. nierównomiernym naciskiem kół na nawierzchnię.

Obszerną analizę modelowania zderzenia z uwzględnieniem dodatkowych sił zewnętrznych prowadzono w pracy [6]. Prowadzono tam analizę zderzenia w ruchu płaskim, zaś impulsy sił zewnętrznych zaczepiono w środku masy i rozłożono na składowe w kierunku normalnym i stycznym do płaszczyzny zderzenia. Siły zewnętrzne określono jako wynikające np. ze zjawisk zachodzących między kołami a nawierzchnią drogi (reakcje poziome i pionowe, różna wartość współczynnika przyczepności dla każdego z kół pojazdu).

Należy zaznaczyć, że w pracy [6] wszystkie siły, z jakimi pojazdy oddziałują wzajemnie na siebie traktowane są jako siły wewnętrzne. Wynika stąd, że wszelkie siły powodujące zmianę ruchu lub parametrów zderzenia dla każdego pojazdu indywidualnie, ale nie pochodzące od drugiego pojazdu są siłami zewnętrznymi.

Biorąc pod uwagę powyższe, zwłaszcza w zakresie rekonstrukcji wypadku drogowego, wydaje się, że wielowątkowa analiza powiązania omawianych wyżej czynników z procesem zderzenia samochodów może przynieść interesujące rezultaty. Jest to istotne zwłaszcza przy badaniu wpływu dodatkowych czynników na skutki zderzenia.

Dalszą część poświęcono rozważaniom z uwzględnieniem impulsowych sił odśrodkowych oraz sił unoszenia i Coriolisa, jako składników ruchu złożonego, na przykładzie zderzenia

czołowego skośnego. Zderzenie takie może nastąpić np. podczas jazdy po łuku drogi, gdzie przy sprzyjających warunkach wartości sił odśrodkowych niwelowanych przez poprzeczną pochyłość drogi mogą zostać chwilowo tak zwiększone, że ich impulsów nie należy pomijać. Ponadto może dojść do oderwania się któregoś z pojazdów od nawierzchni drogi, przez co ruch płaski może zostać zamieniony na ruch złożony.

## 1. MODEL ZDERZENIA PODCZAS JAZDY PO ŁUKU

Modelowanie zderzeń samochodów można rozpatrywać w różnych aspektach [2], np. z wykorzystaniem parametrów masowo – bezwładnościowych pojazdów lub określeniem sił zewnętrznych działających podczas zderzenia. W pracy poświęcono uwagę zderzeniu czołowemu z uwzględnieniem parametrów masowo – bezwładnościowych oraz szorstkości powierzchni zderzających się ciał (wykorzystanie współczynnika restytucji prędkości stycznych).

Zwykle przy analizie zderzeń przyjmuje się, że obciążenia działające na pojazd mogą być w trakcie zderzenia pominięte, ze względu na ich stosunkowo niewielką wartość w porównaniu z siłami zderzenia, działającymi w krótkim czasie ([1], [2], [4]). Przyjęto, że siły odśrodkowe pojazdów poruszających się po łuku, niwelowane podczas normalnej jazdy przez pochylenie drogi i reakcje poprzeczne nawierzchni na koła, doznały gwałtownego przyrostu w krótkim czasie, mniejszym niż długotrwałość zderzenia. Podczas trwania zderzenia pojazdy są traktowane jako jeden układ, zatem siły odśrodkowe zostały potraktowane jako siły zewnętrzne. Na rys. 3 pokazano przykładowy szkic sytuacyjny wzajemnego położenia pojazdów podczas zderzenia na łuku drogi.

Wystąpienie impulsów sił odśrodkowych jako sił zewnętrznych działających na układ samochodów można odnieść do kryterium Mandelsztama dla silnych sprzężeń układów dynamicznych. Kryterium to mówi, że jeżeli iloraz częstości własnych połączonych układów jest dużo większy od jedności, to następuje duże sprzężenie dynamiczne.

Ponieważ ruch pojazdów, które w ruchu po łuku obciążone są dodatkowo siłą odśrodkową, doznaje nagłego zakłócenia, przeto można przyjąć, że siły odśrodkowe, zwrócone na zewnątrz łuku, po którym poruszają się pojazdy, mogą w krótkim czasie trwania zderzenia dać dodatkowe impulsy.

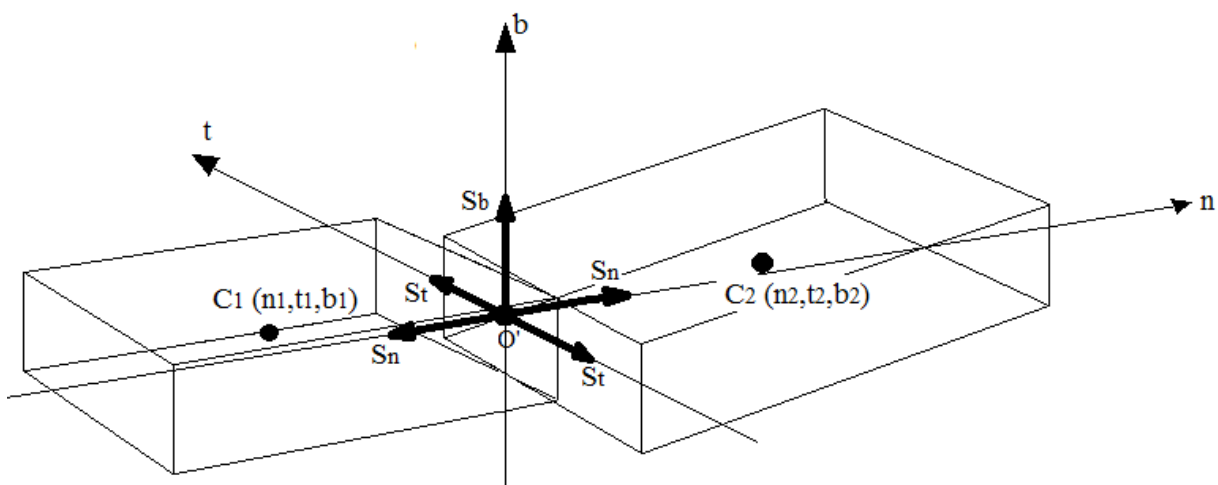


Rys. 3. Szkic wzajemnego położenia pojazdów w chwili zderzenia na łuku drogi.

### 1.1. Założenia

- Do opisu modelu matematycznego zderzenia czołowego przyjęto następujące założenia:
- modele pojazdów traktowane są jako ciała quasi sztywne;
  - nadwozia obu pojazdów są traktowane jako zbiory elementów prostopadłościennych o stałej sztywności i niezmienniej masie, dzięki czemu ruch pojazdów można traktować jako ruch punktów materialnych o masie tych pojazdów;
  - modele samochodów są liniowe;

- ruch odbywa się na czystej i suchej nawierzchni o współczynniku przyczepności równym 0,8;
- układ nieruchomy  $Oxyz$  jest układem bezwładnościowym, względem którego odbywa się ruch układu  $O'ntb$ ;
- modele pojazdów wykonują ruch płaski bądź złożony, zatem do opisu ruchu względem układu współrzędnych  $O'ntb$  o początku w geometrycznym środku zderzenia, wykorzystano dwie współrzędne  $n$  (normalną) oraz  $t$  (styczną) dla ruchu płaskiego, oraz dodatkowo współrzędną  $b$  (binormalną) dla ruchu złożonego;
- geometrycznym środkiem zderzenia jest punkt pierwotnego kontaktu pojazdów  $W$  leżący na wspólnej stycznej do powierzchni obu pojazdów lub w geometrycznym środku płaszczyzny kontaktu pojazdów, jeżeli ich powierzchnie nie dają jednego punktu kontaktu (płaszczyzna zderzenia);
- składowe impulsu siły uderzenia poprowadzono wzdłuż normalnej, stycznej i binormalnej do płaszczyzny zderzenia, osobno dla każdego pojazdu (rys. 4). Normalne składowe impulsów są zwrócone przeciwnie do wektorów normalnych prędkości postępowych. Wektor impulsu stycznego jest na rys. 5, 6 i 7 zwrócony dodatnio dla samochodu nr 1, zaś ujemnie dla pojazdu nr 2. Składowe binormalne impulsu (ruch złożony) zwrócone są w tym samym kierunku dla obu pojazdów;
- na parametry zderzenia składają się prędkości postępowe przed i po zderzeniu wskutek wykonywania przez pojazdy ruchu postępowego, oraz prędkości kątowe, również przed i po zderzeniu powstałe w wyniku obrotu wokół pionowej osi przechodzącej przez środek masy każdego pojazdu;
- siły zewnętrzne i momenty wynikające z ciągniętych przyczep lub różnego współczynnika przyczepności kół do nawierzchni drogi nie zostały uwzględnione;
- kąty pochylenia kół i nadwozia pominięto;
- płaszczyzna kierująca (płaszczyzna, w której odbywa się ruchu) jest równoległa do odcinka drogi, na której odbywa się zderzenie;
- impulsy sił odśrodkowych, bezwładności w ruchu względnym, unoszenia i Coriolisa zostały uwzględnione w równaniach zderzenia, przy czym ich kierunki nie są znane, zatem posłużono się składowymi tych sił w kierunku normalnej i stycznej do płaszczyzny zderzenia;
- impulsy sił odśrodkowych zaczepione są w środku masy pojazdów lub w pewnej odległości od środka masy, zaś impulsy sił bezwładności, unoszenia i Coriolisa (ruch złożony) – tylko w środku masy;
- apostrofem oznaczono składowe prędkości po zderzeniu.



**Rys. 4.** Składowe impulsu siły uderzenia dla obu pojazdów.

## 1.2. Opis modelu zderzenia podczas jazdy po łuku

Równania ruchu w modelowaniu zderzenia oparto o [2], przy czym ogólną postać równań dla ciał o powierzchniach szorstkich zaadaptowano dla przypadku zderzenia mimośrodkowego samochodów, gdzie występują dodatkowe impulsy sił odśrodkowych, a w przypadku ruchu złożonego także bezwładności, unoszenia i Coriolisa.

$$\begin{aligned}
 m_i(v'_{in} - v_{in}) &= \sum_{i=1}^k S_n + \sum_{i=1}^k S_{Oin} + \sum_{i=1}^k S_{Bin} + \sum_{i=1}^k S_{Uin} + \sum_{i=1}^k S_{Cin} \\
 m_i(v'_{it} - v_{it}) &= \sum_{i=1}^k S_t + \sum_{i=1}^k S_{Oit} + \sum_{i=1}^k S_{Bit} + \sum_{i=1}^k S_{Uit} + \sum_{i=1}^k S_{Cit} \\
 I_i(\omega'_i - \omega_i) &= \sum_{i=1}^k S_t n_i + \sum_{i=1}^k S_n t_i + \sum_{i=1}^k M_{Oi} + \sum_{i=1}^k M_{Bi} + \sum_{i=1}^k M_{Ui} + \sum_{i=1}^k M_{Ci}
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie:

- $m_i$  – masa i-tego pojazdu;
- $v_{it}$  – styczna do płaszczyzny zderzenia składowa prędkość postępowej i-tego pojazdu;
- $v_{in}$  – normalna do płaszczyzny zderzenia składowa prędkość postępowej i-tego pojazdu;
- $\omega_i$  – prędkość kątowna i-tego pojazdu;
- $I_i$  – masowy moment bezwładności i-tego pojazdu;
- $S_n, S_t$  – normalne i styczne składowe impulsu wypadkowej siły uderzenia;
- $M_{Oi}$  – moment pochodzący od impulsu siły odśrodkowej i-tego pojazdu;
- $M_{Bi}$  – moment pochodzący od impulsu względnej siły bezwładności i-tego pojazdu;
- $M_{Ui}$  – moment pochodzący od impulsu siły unoszenia i-tego pojazdu;
- $M_{Ci}$  – moment pochodzący od impulsu siły Coriolisa i-tego pojazdu;
- $n_i, t_i$  – współrzędne położenia środków mas pojazdów biorących udział w zderzeniu względem geometrycznego środka zderzenia  $O'$ ;
- $n_{Oi}, t_{Oi}$  – współrzędne punktów przyłożenia impulsów sił odśrodkowych względem geometrycznego środka zderzenia  $O'$ ;

Rozważono trzy przypadki zderzenia w łuku:

- przypadek, kiedy impulsy sił odśrodkowych obu pojazdów zaczepione są w ich środkach mas. Ich składowe uwzględniono zatem w równaniach ruchu postępowego. Pojazdy wykonują ruch płaski;
- przypadek przyłożenia impulsów sił odśrodkowych w określonej odległości od środka masy każdego pojazdu. Ich składowe stanowią wówczas elementy równań ruchu postępowego i obrotowego. Pojazdy wykonują ruch płaski;
- przypadek przyłożenia impulsów sił odśrodkowych w określonej odległości od środka masy każdego pojazdu, przy czym pojazdy wykonują ruch złożony.

### Przypadek a)

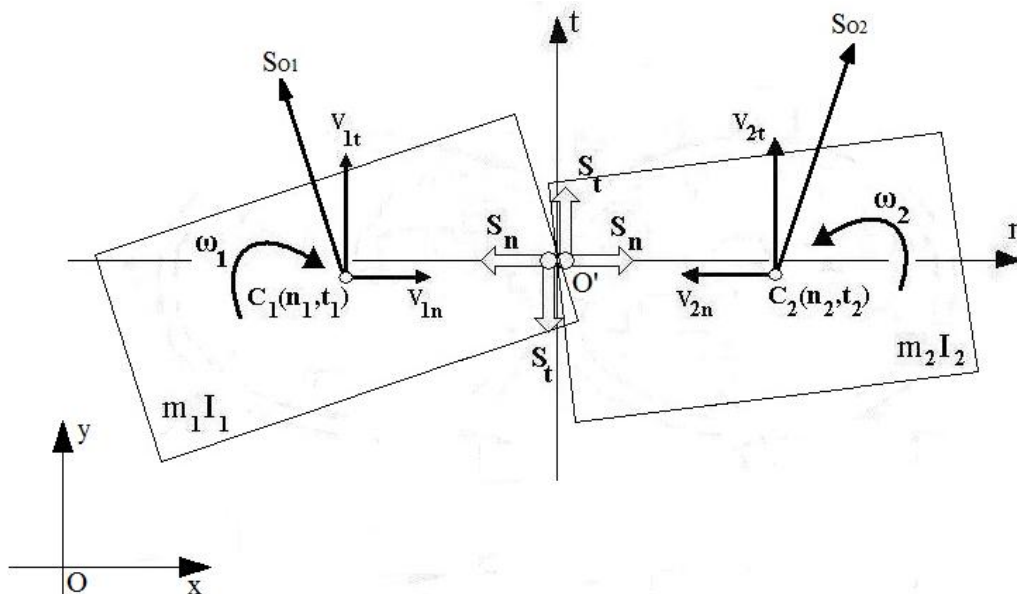
Na rys. 5 pokazano fizyczny model zderzenia czołowego skośnego podczas jazdy po łuku dla przypadku a), który opisano równaniami (2). Równania rozpisano tak, aby były słuszne dla omawianego zagadnienia zderzenia czołowego (rys. 4). Jako że pojazdy wykonują ruch płaski, posłużono się rzutami współrzędnych położenia środków mas względem środka zderzenia.



$$\begin{aligned}
m_1(v'_{1n} - v_{1n}) &= -S_n - S_{O1n} \\
-m_2(v'_{2n} - v_{2n}) &= S_n + S_{O2n} \\
m_1(v'_{1t} - v_{1t}) &= S_t + S_{O1t} \\
m_2(v'_{2t} - v_{2t}) &= -S_t + S_{O2t} \\
-I_1(\omega'_1 - \omega_1) &= S_t n_1 + S_n t_1 \\
I_2(\omega'_2 - \omega_2) &= S_t n_2 - S_n t_2
\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

- $m_1, m_2$  – odpowiednio masa pojazdu 1 i 2 biorącego udział w zderzeniu;
- $v_{1t}, v_{2t}$  – składowe prędkości postępowych obu pojazdów styczne do płaszczyzny zderzenia;
- $v_{1n}, v_{2n}$  – składowe prędkości postępowych obu pojazdów normalne do płaszczyzny zderzenia;
- $\omega_1, \omega_2$  – prędkości kątowe pojazdów biorących udział w zderzeniu;
- $I_1, I_2$  – masowe momenty bezwładności pojazdów względem osi pionowych przechodzących przez ich środki mas;
- $S_n, S_t$  – składowe impulsu wypadkowej siły uderzenia w kierunku normalnym i stycznym;
- $S_{O1t}, S_{O1n}, S_{O2t}, S_{O2n}$  – składowe impulsu siły odśrodkowej pojazdu 1 i 2 w kierunku stycznym i normalnym;
- $n_1, t_1, n_2, t_2$  – współrzędne położenia środków mas pojazdów biorących udział w zderzeniu względem geometrycznego środka zderzenia  $O'$ .



**Rys. 5.** Fizyczny model zderzenia czołowego skośnego pojazdów. Impulsy sił odśrodkowych zaczepione w środku masy każdego pojazdu.

W równaniach (2), w części dotyczącej ruchu obrotowego (dwa ostatnie równania), nie występują momenty pochodzące od impulsów sił odśrodkowych, ponieważ siły te są przyłożone w środkach mas obu pojazdów (punkty A i B), zaś momenty liczone są względem osi pionowych przechodzących przez te punkty. W części dotyczącej ruchu postępowego prócz dwóch składowych nieznanego impulsu (normalna  $S_n$  i styczna  $S_t$ ) pochodzącego od wypadkowej siły uderzenia, występują cztery składowe impulsu siły odśrodkowej, po dwie

dla każdego pojazdu ( $S_{O1r}, S_{O1n}, S_{O2r}, S_{O2n}$ ). Do rozwiązania takiego układu sześciu równań z dwunastoma niewiadomymi należy wykorzystać zależność wynikającą z hipotezy Newtona dla współczynnika restytucji normalnych prędkości względnych oraz z metody Routha [2] definiującej tzw. współczynnik restytucji prędkości stycznych.

Oba współczynniki opisano wzorami (3) przy założeniu, że zderzenie jest bezpoślizgowe. W przypadku zderzenia z poślizgiem należy, zamiast współczynnika restytucji prędkości stycznych, uwzględnić dynamiczny współczynnik tarcia między powierzchniami samochodów  $f$  [2].

$$R = -\frac{w'_n}{w_n}, \quad \theta = \frac{w'_t}{w_t}, \quad (3)$$

gdzie:

- $R$  – współczynnik restytucji dla kierunku normalnego;
- $\theta$  – współczynnik restytucji dla kierunku stycznego;
- $w_n, w'_n$  – składowe normalne prędkości względnej przed i po zderzeniu;
- $w_t, w'_t$  – składowe styczne prędkości względnej przed i po zderzeniu.

Współczynnik restytucji, wg hipotezy Newtona definiowany jest również jako stosunek impulsu siły po zderzeniu do impulsu siły przed zderzeniem w kierunku normalnym (4). Jednak wzór (4) nie jest tożsamy z wzorem (3), mimo, że dzięki obydwu przedstawiono sposób wyznaczania tej samej wielkości. Należy jednak pamiętać, że współczynnik restytucji jest wielkością niemianowaną, natomiast po prawej stronie obydwu wzorów [(3) i (4)] występują różne wielkości. Ponadto wzór (3) pozwala wykorzystać prędkości postępowe i kątowe obu zderzających się pojazdów (ciał), zaś wzór (4) – tylko jednego.

$$R = \frac{S'_n}{S_n} \quad (4)$$

Wyznaczenie wartości składowych stycznych i normalnych impulsów po zderzeniu nie jest na tym etapie możliwe, ponieważ nieznane są wartości prędkości po zderzeniowych. Zatem po wprowadzeniu tzw. względnej prędkości poślizgu i ściskania (5) dla początkowej chwili zderzenia otrzymano

$$\begin{aligned} w_t &= (v_{1t} - n_1 \omega_1) - (v_{2t} - n_2 \omega_2), \\ w_n &= (v_{1n} + t_1 \omega_1) - (-v_{2n} - t_2 \omega_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Stąd przy wykorzystaniu wzorów (3) można uzyskać dodatkowe równania (6), o które względem niewiadomych uzupełniona jest liczba równań (1). Równania te definiują prędkość poślizgu i ściskania dla końcowej chwili zderzenia. Należy przy tym uwzględnić znajomość współczynników  $R$  i  $\theta$ , które zwykle wyznaczane są doświadczalnie [1].

$$\begin{aligned} w'_t &= (v'_{1t} - n_1 \omega'_1) - (v'_{2t} - n_2 \omega'_2) = w_t \theta, \\ w'_n &= (v'_{1n} + t_1 \omega'_1) - (-v'_{2n} - t_2 \omega'_2) = -w_n R. \end{aligned} \quad (6)$$

Przy obliczaniu prędkości końcowych wymagana jest znajomość nieznanych składowych impulsu siły uderzenia. Jak widać, równania (6) nie służą do ich wyznaczenia, zatem należy przyjąć dodatkowe założenia co do natury zderzenia. Przyjęto, że omawiany jest model zderzenia bezpoślizgowego, charakteryzujący się tym, że pojazdy pozostają w kontakcie przez całą długość zderzenia a ich powierzchnie nie ślizgają się wzajemnie po sobie. Zachodzą więc odkształcenia postaciowe (w kierunku stycznym do płaszczyzny zderzenia) oraz objętościowe (w kierunku normalnym), przeto za [2] dokonano następujących przekształceń:



$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{n_1^2}{I_1} + \frac{n_2^2}{I_2} \\
B &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{t_1^2}{I_1} + \frac{t_2^2}{I_2} \\
C &= \frac{n_1 t_1}{I_1} - \frac{n_2 t_2}{I_2}
\end{aligned} \tag{7}$$

Względna prędkość poślizgu (styczna) w zderzeniu bezpoślizgowym została opisana wzorem

$$w'_t = w_t - AS_t - CS_n = \theta w_t, \tag{8}$$

natomiast względna prędkość ściskania (normalna)

$$w'_n = w_n - CS_t - BS_n = -Rw_n, \tag{9}$$

Po rozwiązaniu równań (8) i (9) wyznaczono za [2] wartości impulsów stycznego i normalnego (10), gdzie występują wielkości z początkowej chwili zderzenia.

$$\begin{aligned}
S_t &= \frac{-(1+R)Cw_n + (1-\theta)Bw_t}{BA - C^2}, \\
S_n &= \frac{(1+R)Aw_n - (1-\theta)Cw_t}{BA - C^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Z równań (1) można otrzymać wyrażenia pozwalające na obliczenie wartości prędkości na końcu zderzenia:

$$\begin{aligned}
v'_{1t} &= v_{1t} + \frac{S_t}{m_1} + \frac{S_{O1t}}{m_1}, & v'_{2t} &= v_{2t} - \frac{S_t}{m_2} + \frac{S_{O2t}}{m_2}, \\
v'_{1n} &= v_{1n} - \frac{S_n}{m_1} - \frac{S_{O1n}}{m_1}, & v'_{2n} &= v_{2n} - \frac{S_n}{m_2} - \frac{S_{O2n}}{m_2}, \\
\omega'_1 &= \omega_1 - \frac{S_t n_1}{I_1} - \frac{S_n t_1}{I_1}, & \omega'_2 &= \omega_2 + \frac{S_t n_2}{I_2} - \frac{S_n t_2}{I_2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Dysponując równaniami (1) oraz (10) można wyznaczyć wartości końcowe prędkości postępowej i kątowej każdego z pojazdów biorących udział w zderzeniu. Rozwiązanie zagadnienia zderzenia z uwzględnieniem szorstkości powierzchni samochodów wymaga znajomości dwóch współczynników: współczynnika restytucji dla prędkości normalnych  $R$  oraz stycznych  $\theta$ , oraz impulsów pochodzących od siły odśrodkowej każdego z pojazdów. Jeżeli wielkości te nie są znane, zadanie pozostaje nieoznaczone, ponieważ w ośmiu równaniach wystąpi dwanaście niewiadomych. Dodatkowymi niewiadomymi będą w tym przypadku impulsy sił odśrodkowych oraz współczynniki restytucji prędkości normalnych i stycznych.

### Przypadek b)

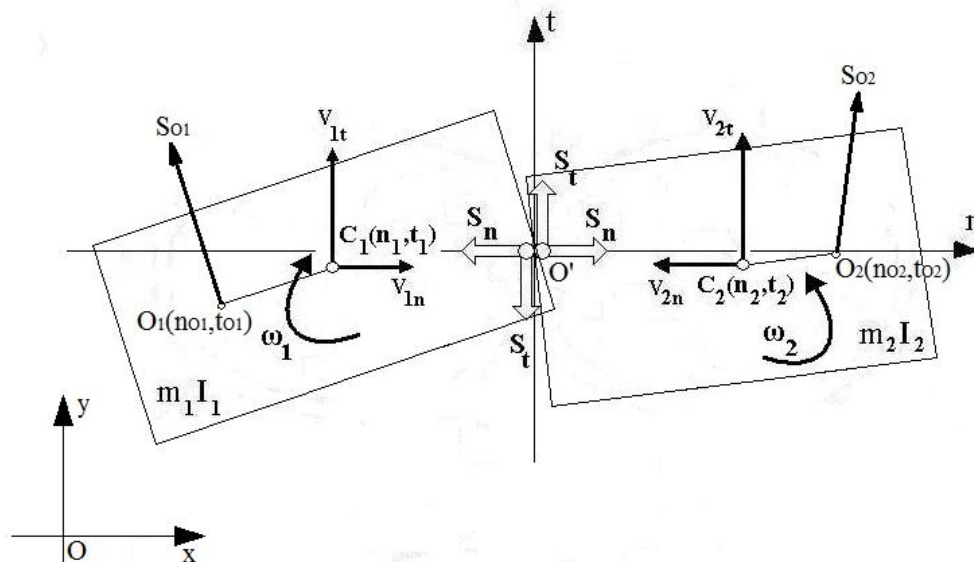
W ramach analizy rozpatrzono zderzenie czołowe skośne mimośrodkowe, przy czym w przeciwieństwie do przypadku a) przyjęto, że impulsy sił odśrodkowych nie są przyłożone w środku masy pojazdu w wyniku np. zarzucania kół jednej z osi lub chwilowej nadsterowności. Na rys. 6 pokazano fizyczny model zderzenia który za [1] i [2] opisano równaniami (12). Apostrofem oznaczono składowe prędkości po zderzeniu. Równania rozpisano tak, aby były słuszne dla omawianego zagadnienia zderzenia czołowego (rys. 6). Tak jak w przypadku a)

pojazdy wykonują ruch płaski, zatem posłużono się składowymi współrzędnymi położenia ich środków mas względem geometrycznego środka zderzenia.

$$\begin{aligned}
 m_1(v'_{1n} - v_{1n}) &= -S_n - S_{O1n} \\
 -m_2(v'_{2n} - v_{2n}) &= S_n + S_{O2n} \\
 m_1(v'_{1t} - v_{1t}) &= S_t + S_{O1t} \\
 m_2(v'_{2t} - v_{2t}) &= -S_t + S_{O2t} \\
 -I_1(\omega'_1 - \omega_1) &= S_t n_1 + S_n t_1 - S_{O1t} n_{O1} - S_{O1n} t_{O1} \\
 I_2(\omega'_2 - \omega_2) &= S_t n_2 - S_n t_2 + S_{O2t} n_{O2} + S_{O2n} t_{O2}
 \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie:

- $m_1, m_2$  – odpowiednio masa pojazdu 1 i 2 biorącego udział w zderzeniu;
- $v_{1t}, v_{2t}$  – składowe prędkości postępowych obu pojazdów styczne do płaszczyzny zderzenia;
- $v_{1n}, v_{2n}$  – składowe prędkości postępowych obu pojazdów normalne do płaszczyzny zderzenia;
- $\omega_1, \omega_2$  – prędkości kątowe pojazdów biorących udział w zderzeniu;
- $I_1, I_2$  – masowe momenty bezwładności pojazdów względem osi pionowych przechodzących przez ich środki mas;
- $S_n, S_t$  – składowe impulsu wypadkowej siły uderzenia w kierunku normalnym i stycznym;
- $S_{O1t}, S_{O1n}, S_{O2t}, S_{O2n}$  – składowe impulsu siły odśrodkowej pojazdu 1 i 2 w kierunku stycznym i normalnym;
- $n_{O1}, t_{O1}, n_{O2}, t_{O2}$  – współrzędne punktu przyłożenia siły odśrodkowej i-tego samochodu względem jego środka masy;
- $n_1, t_1, n_2, t_2$  – współrzędne położenia środków mas pojazdów biorących udział w zderzeniu względem geometrycznego środka zderzenia  $O'$ .



**Rys. 6.** Fizyczny model zderzenia czołowego skośnego pojazdów. Impulsy sił odśrodkowych nie zaczepione w środku masy.

W równaniach (12) dotyczących ruchu obrotowego występują momenty pochodzące od impulsów sił odśrodkowych, ponieważ siły te nie są przyłożone w środkach mas obu pojazdów (punkty  $C_1$  i  $C_2$ ). W części dotyczącej ruchu postępowego składowe występują jak w równaniach (2). Do rozwiązania wykorzystano również zależności wynikające z hipotezy

Newtona dla współczynnika restytucji normalnych prędkości względnych oraz metody Routha [2] (współczynnik restytucji prędkości stycznych).

Oba współczynniki opisano wzorami (3) również zakładając zderzenie bezpoślizgowe.

Wykorzystano także pojęcie względnej prędkości poślizgu i ściskania dla początkowej chwili zderzenia jak w przypadku a).

Przy wykorzystaniu wzorów (3) uzyskano dodatkowe równania, o które, jak w przypadku a) uzupełniono równania (12).

$$\begin{aligned}w'_t &= (v'_{1t} - n_1 \omega'_1) - (v'_{2t} - n_2 \omega'_2) = w_t \theta, \\w'_n &= (v'_{1n} + t_1 \omega'_1) - (-v'_{2n} - t_2 \omega'_2) = -w_n R.\end{aligned}\quad (13)$$

Również w tym przypadku niemożliwe jest uzyskanie pełnego rozwiązania bez znajomości impulsu stycznego i normalnego oraz obu współczynników restytucji. Należy zatem dokonać przekształceń jak w przypadku a) (wzór 7) i posługując się zależnościami opisującymi prędkości poślizgu i ściskania wyznaczyć wzory opisujące impulsy siły uderzenia (10).

Z równań (12) otrzymano wyrażenia pozwalające na obliczenie wartości prędkości końcowych zderzenia:

$$\begin{aligned}v'_{1t} &= v_{1t} + \frac{S_t}{m_1} + \frac{S_{O1t}}{m_1}, & v'_{2t} &= v_{2t} - \frac{S_t}{m_2} + \frac{S_{O2t}}{m_2}, \\v'_{1n} &= v_{1n} - \frac{S_n}{m_1} - \frac{S_{O1n}}{m_1}, & v'_{2n} &= v_{2n} - \frac{S_n}{m_2} - \frac{S_{O2n}}{m_2}, \\ \omega'_1 &= \omega_1 - \frac{S_t n_1}{I_1} - \frac{S_n t_1}{I_1} + \frac{S_{O1t} n_{O1}}{I_1} + \frac{S_{O1n} t_{O1}}{I_1}, \\ \omega'_2 &= \omega_2 + \frac{S_t n_2}{I_2} - \frac{S_n t_2}{I_2} + \frac{S_{O2t} n_{O2}}{I_2} + \frac{S_{O2n} t_{O2}}{I_2}.\end{aligned}\quad (14)$$

Dysponując równaniami (10) i (12) można wyznaczyć wartości końcowe prędkości postępowej i kątowej każdego z pojazdów biorących udział w zderzeniu przy uwzględnieniu wpływu impulsów sił odśrodkowych na ruch obrotowy pojazdów w trakcie zderzenia. Jeżeli wartości tych impulsów te nie są znane, zadanie pozostaje nieoznaczone.

### Przypadek c)

W kolejnym kroku analizy rozważono przypadek, kiedy w wyniku uderzenia pojazdy nie poruszają się w płaszczyźnie drogi, ale wykonują ruch złożony unosząc się nad jej powierzchnię. Równania opisujące ruch pojazdów w trakcie zderzenia (20) uzupełniono o impuls siły bezwładności w ruchu względnym, impuls siły unoszenia i Coriolisa oraz impuls siły uderzenia w kierunku binormalnym. Ułożenie takich równań z rzutowaniem każdego impulsu na oś styczną, normalną i binormalną nastęrczyłoby problem ich złożoności. Dlatego postanowiono posłużyć się promieniami wodzącymi zamiast ich rzutami na wszystkie trzy osie.

Przyjęto, że w wyniku oddziaływania pojazdów na siebie siły te doznały dużych przyrostów w skończenie małym przedziale czasu (połowa długości zderzenia). Wszystkie trzy siły zostały przyłożone w środkach mas obu pojazdów, zatem występują jedynie w równaniach ruchu postępowego.

$$\begin{aligned}
m_i(v'_{ik} - v_{ik}) &= S_k + S_{O_i} + S_{U_i} + S_{C_i} + S_{B_i} \\
I_{ai}(\omega'_{ai} - \omega_{ai}) &= S_t r_i + S_n r_i + S_{bt} r_i + S_{O_i} r_{O_i} \\
i &= 1, 2 \\
k &= n, t, b \\
a &= x_s, y_s, z_s
\end{aligned} \tag{20}$$

gdzie:

- $m_i$  – masa i-tego pojazdu biorącego udział w zderzeniu;
- $v_{ik}$  – składowe prędkości postępowych i-tego pojazdu normalne ( $n$ ), styczne ( $t$ ) i binormalne ( $b$ ) do płaszczyzny zderzenia;
- $x_s, y_s, z_s$  – współrzędne wzdłuż podłużnej, poprzecznej i pionowej osi symetrii i-tego pojazdu licząc od środka jego masy;
- $\omega_{ai}$  – prędkości kątowe i-tego pojazdu biorącego udział w zderzeniu wokół jego podłużnej, poprzecznej i pionowej osi symetrii;
- $I_{ai}$  – masowy moment bezwładności i-tego pojazdu względem osi podłużnej, poziomej i pionowej przechodzącej przez jego środek masy;
- $S_k$  – składowe impulsu wypadkowej siły uderzenia w kierunku normalnym ( $n$ ), stycznym ( $t$ ) i binormalnym ( $b$ );
- $S_{O_i}$  – impuls siły odśrodkowej i-tego pojazdu;
- $S_{U_i}$  – impuls siły unoszenia i-tego pojazdu;
- $S_{C_i}$  – impuls siły Coriolisa i-tego pojazdu;
- $S_{B_i}$  – impuls siły bezwładności w ruchu względem nieinercyjnego układu odniesienia  $O_n t b$  i-tego pojazdu (względna siła bezwładności);
- $r_{O_i}$  – promień (odległość) punktu przyłożenia siły odśrodkowej i-tego samochodu względem jego środka masy;
- $r_i$  – promień (odległość) położenia środka masy i-tego pojazdu względem geometrycznego środka zderzenia  $O'$ .

Wg twierdzenia Coriolisa [12] przyspieszenie bezwzględne punktu względem ruchomego układu odniesienia jest sumą przyspieszenia względnego, unoszenia i Coriolisa.

Za [12] opisano siły składające się na ruch złożony pojazdów. Siły te zaczepiono w środku masy każdego z pojazdów biorących udział w zderzeniu. Siłę bezwładności (względną) dla każdego z pojazdów można opisać zależnością (21). Wektor tej siły jest zwrócony przeciwnie do składowej normalnej wektora prędkości postępowej danego pojazdu.

$$P_{B_i} = m_i a_{wi}, \quad i = 1, 2, \tag{21}$$

gdzie:

$a_{wi}$  – przyspieszenie względne i-tego pojazdu.

Siłę unoszenia dla każdego z dwóch pojazdów można za [12] opisać zależnością (22). Wektor przyspieszenia unoszenia prostopadły do wektora siły bezwładności w ruchu względnym danego pojazdu.

$$P_{U_i} = m_i a_{ui}, \quad i = 1, 2, \tag{22}$$

gdzie:

$a_{ui}$  – przyspieszenie unoszenia i-tego pojazdu.

Siłę Coriolisa dla każdego samochodu można za [12] opisać zależnością (23). Wektor przyspieszenia Coriolisa jest nachylony jest pod kątem prostym do wektora prędkości kątowej danego pojazdu oraz do rzutu wektora prędkości unoszenia na płaszczyznę, w której działa.

$$P_{Ci} = m_i a_{Ci} = 2m_i \omega_i v_{wi} \sin \varphi_i, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

gdzie:

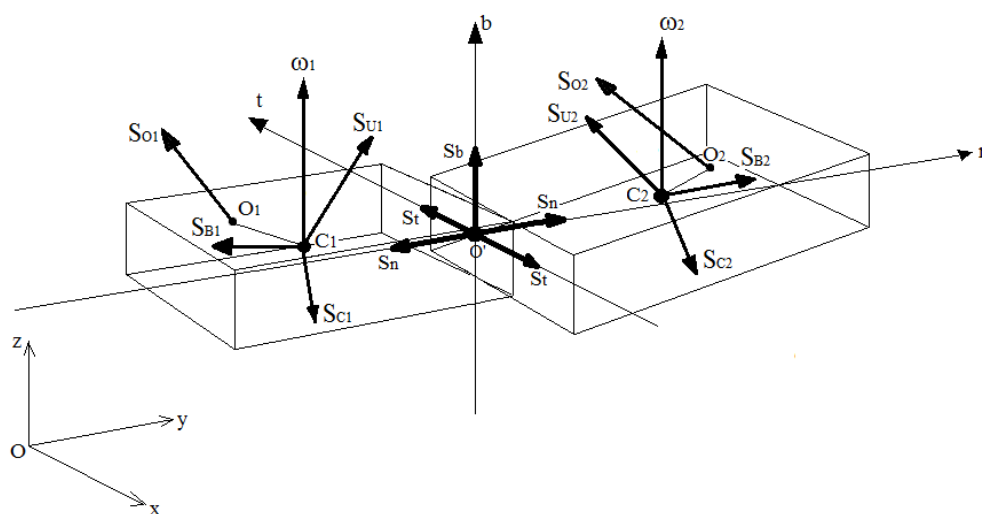
$a_{Ci}$  – przyspieszenie Coriolisa;

$v_{wi}$  – prędkość względna i-tego pojazdu;

$\omega_i$  – prędkość kątowa i-tego pojazdu;

$\varphi_i$  – kąt zawarty między wektorem prędkości względnej a wektorem prędkości kątowej danego pojazdu [12];

Na rys. 7 przedstawiono rozkład impulsów sił odśrodkowych oraz sił składowych ruchu złożonego.



**Rys. 7.** Rozłożenie składowych impulsów sił odśrodkowych oraz sił składających się na ruch złożony względem ruchomego układu współrzędnych.

Do rozwiązania tego układu wykorzystano zależności jak w punktach a) i b), przy czym należy uwzględnić również rzuty prędkości na oś binormalną układu współrzędnych o początku w geometrycznym środku zderzenia. Wynika to stąd, że prędkość postępowe pojazdów zostałyby rozłożone na trzy składowe. Zatem równania (5) należy uzupełnić o równanie zawierające składowe binormalne prędkości, które mogą spowodować rozłożenie względnej prędkości poślizgu na kierunek styczny i binormalny dla w chwili początkowej zderzenia.

W związku z tym można przyjąć, że wzajemny poślizg pojazdów (dla zderzenia poślizgowego) mógłby mieć dwa kierunki. Ponieważ jednak przyjęto zderzenie bezpoślizgowe, zatem współczynnik restytucji  $\theta$  może obowiązywać zarówno dla prędkości stycznych, jak i binormalnych.

Dodatkowe równania (24) definiujące prędkość poślizgu i ściskania dla końcowej chwili zderzenia, zależne od współczynników  $R$  i  $\theta$ , mogłyby być uzupełnione o równanie dla prędkości binormalnych. Ogólna postać równań ze współczynnikami restytucji:

$$\begin{aligned} w'_t &= w_t \theta, \\ w'_n &= -w_n R, \\ w'_b &= w_b \theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Następnie, biorąc pod uwagę odkształcenia postaciowe i objętościowe oraz prędkości w kierunku binormalnym, należy dokonać przekształceń pozwalających na obliczanie impulsów sił zderzenia w trzech kierunkach, a następnie wyznaczyć stan kinematyczny pojazdów po zderzeniu (25), jak w przypadkach a) i b).

$$v'_{ik} = v_{ik} + \frac{S_k + S_{O_i} + S_{U_i} + S_{C_i} + S_{B_i}}{m_i}$$

$$\omega'_{ai} = \omega_{ai} + \frac{S_t r_i + S_n r_i + S_{b_i} r_i + S_{O_i} r_{O_i}}{I_{ai}} \quad (25)$$

$$i = 1, 2; \quad k = n, t, b; \quad a = x_s, y_s, z_s$$

Podobnie jak w poprzednich punktach należy znać wartości impulsów sił składowych ruchu względnego, które można wyznaczyć np. z [12], impulsów pochodzących od sił odśrodkowych oraz współczynników restytucji w kierunku normalnym i stycznym do płaszczyzny zderzenia. Istotnym jest możliwość wyznaczenia siły odśrodkowej pojazdu, np. z zależności występujących w dynamice ruchu poprzecznego samochodu. W pracy [1] zostały one przedstawione jako kryteria tzw. stateczności poprzecznej samochodu. W pracy [15] zjawiska ruchu krzywoliniowego samochodu zostały omówione szerzej.

## WNIOSKI

Modelowanie zderzeń może stanowić mechanizm umożliwiający wykazanie wpływu rodzaju zderzenia na zmiany parametrów ruchu pojazdu biorącego w nim udział. Stopień skomplikowania modelu zderzenia może być podstawą do analizy tego zjawiska w szerszym aspekcie, niż dotychczas. Ponadto wprowadzenie do modelu zderzenia nowych wielkości umożliwi pełniejsze odzwierciedlenie rzeczywistości oraz przebiegu wypadków, jakie miały miejsce w rzeczywistości. Dzięki przeprowadzeniu symulacji zderzenia można, dysponując wystarczająco skomplikowanym jego modelem matematycznym, dokonać oceny skuteczności i błędów programu, w którym symulacja została przeprowadzona. Parametry zderzenia samochodów dla rzeczywistego wypadku drogowego mogą być wykorzystane do analizy tego samego przypadku analitycznie.

## LITERATURA

1. Wicher J., Bezpieczeństwo samochodów i ruchu drogowego, WKŁ, Warszawa 2003.
2. Gryboś R., Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych, PWN, Warszawa 1969.
3. Huang M., Vehicle crash mechanics, Hardbound, 2002.
4. Wicher J., Zagadnienia bezpieczeństwa samochodu, OWPW, Warszawa 1997.
5. Wicher J., Sztenke M., Oddziaływanie przyczepy i nachylenia drogi na parametry ruchu podczas zderzenia samochodów, Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów, 3(29)/98.
6. Wicher J., Stawicki R., Modelowanie zderzenia samochodów, Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów, 1(31)/99.
7. Wicher J., Analiza zderzeń samochodów i współczesne metody zabezpieczeń, Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów, 2(20)/96.
8. Wicher J., Sztenke M., Oddziaływanie przyczepy i nachylenia drogi na parametry ruchu podczas zderzenia samochodów, Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów, 3(29)/98.
9. Kończykowski W., Odtwarzanie i analiza wypadku drogowego, Info-Ekspert, Warszawa 1994.
10. Wicher J., Rekonstrukcja zderzenia samochodu z drogową barierą betonową, Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów, 2(57)/2005.

11. Prochowski L., Unarski J., Wach W., Wicher J., Podstawy rekonstrukcji wypadków drogowych, WKŁ, Warszawa 2008.
12. Osiński Z., Mechanika ogólna, PWN, Warszawa 2000.
13. Kaźmierczak R., Wicher J., Wpływ obciążenia na ruch pojazdu podczas zderzenia, Zeszyty Naukowe Instytutu Pojazdów, 4/94.
14. Karami G., A Boundary Element Method for Two-Dimensional Contact Problems, Springer Verlag, 1989.
15. Siłka W., Teoria ruchu samochodu, WNT, Warszawa, 2002.

## **SELECTED ASPECTS OF ANALYSIS AND MODELLING OF A COLLISION BETWEEN TWO VEHICLES**

### *Abstract*

*In the paper analysis of certain aspects of collision between motor vehicles modelling is presented including selected factors influencing its course. The classic approach towards the crash of mechanical bodies was adapted to the problem of the collision between vehicles, as the general analysis of complexity of this issue was conducted.*

*Apart from taking the roughness of the surface of crashing vehicles into account, the occurrence of additional, external impulse forces acting on the set of vehicles being in contact was also assumed. Moreover, apart from the plane motion, also a resultant motion of each vehicle during the crash was included (forces of inertia and transportation as well as Coriolis force).*

*Analysis was made concerning the possibility and necessity to take the selected parameters into account in modelling of collisions between vehicles.*

### **Autorzy:**

**KISIŁOWSKI Jerzy** - prof. dr hab. inż., profesor, Uniwersytet Technologiczno – Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Wydział Transportu i Elektrotechniki.

**ZALEWSKI Jarosław** - dr inż., adiunkt, Politechnika Warszawska, Wydział Administracji i Nauk Społecznych.