

**Mykhaylo DOROZHOVETS, Zygmunt Lech WARSZA**  
POLITECHNIKA RZESZOWSKA

## Wpływ nieadekwatnego wyboru parametrów rozkładu prawdopodobieństwa na niepewność typu A

### Prof. dr hab. inż. M. DOROZHOVETS

Jest absolwentem (1975) Katedry Techniki Informatycznej-Pomiarowej Politechniki Lwowskiej. Doktorat nauk technicznych uzyskał w 1986 r., a w 2001 r. obronił habilitację. Obecnie jest profesorem w Politechnice Lwowskiej i w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Rzeszowskiej. Prowadzi prace naukowo-badawcze z dziedziny pomiarów tomograficznych, przetwarzania sygnałów pomiarowych oraz analizy i oceny niepewności wyników pomiarów.



e-mail: michdor@prz.edu.pl

### Streszczenie

Zaproponowano rozszerzenie wyznaczania niepewności pomiarów metodą statystyczną typu A zalecaną przez międzynarodowy przewodnik GUM. Po wyeliminowaniu trendu z obserwacji pomiarowych i uwzględnieniu wpływu autokorelacji wybiera się właściwy rozkład prawdopodobieństwa stosując kryterium  $\chi^2$  i najbardziej wiarygodny statystycznie jego parametr. Podano przykład procedury wyznaczania środka rozstępu jego odchylenia standardowego dla rozkładu jednostajnego oraz mediany dla rozkładu dwuwkładniczego Laplace'a, jako najdokładniejszych parametrów tych rozkładów. Porównano je z parametrami zalecanymi przez GUM. Zamieszczono wnioski i literaturę.

**Słowa kluczowe:** pomiar, niepewność typu A, rozkład prawdopodobieństwa

## Influence of the inadequate choice of distribution parameters on the uncertainty evaluated by method type A

### Abstract

Proposal of the development of the method type A evaluation of the measurement uncertainty recommended by ISO international guide is given. It contains of choosing the adequate probability distribution using the  $\chi^2$  criterion and its the most likelihood parameter. The numerical example of the midrange and its standard deviation calculations of the rectangular distribution and median (MED) of Laplace double-exponential one is presented. They are compared to parameters recommended by GUM. Summary and literature is included.

**Keywords:** measurement, type A uncertainty, random distribution

## 1. Wprowadzenie

Przyjęte w Przewodniku ISO GUM [1, 2] metody oceny niedokładności wyniku pomiarów oparte są na wprowadzonym w nim nowym pojęciu - **niepewność (uncertainty)**, zdefiniowanym ogólnie bez korzystania z *wartości rzeczywistej*, tj.:

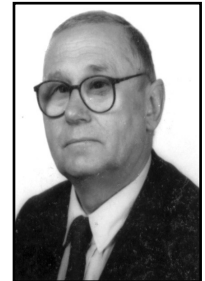
„**Niepewność – parametr**, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, który można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.”

Podstawą do oceny niepewności pomiarów są dwie jej składowe oznaczone jako  $u_A(x)$  i  $u_B(x)$ . Pierwszą wyznacza się metodą A ściśle statystyczną, drugą szacuje się w inny sposób, tj. wg metody B. Niepewność  $u_A(x)$  wyznacza się następująco:

- z „surowych” sygnałów lub odczytów, po wprowadzeniu znanych poprawek otrzymuje się próbkę skorygowanych  $n$  obserwacji pomiarowych  $q_i$  traktowanych dalej jako losowe, – następnie wyznacza się ich wartość średnią  $\bar{q}$  jej i jej odchylenie standardowe jako niepewność standardową  $u_A(x)$ .

### Doc. dr inż. Zygmunt Lech WARSZA

Ukończył Miernictwo Elektryczne w Politechnice Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docentura 1970 - za dorobek równoważny habilitacji. Zorganizował i prowadził: Wydział Transportu w Radomiu (dziekan 1970-76), Ośrodek Aparatury IMGW 1978-81, Zakład Techniki Pomiarowej Instytutu Chemii Przemysłowej 1983-91. Doradca Ministra Edukacji 1992-94. Wykładał metrologię do 2002r w Politechnice Radomskiej. Opracował ok. 100 publikacji, 2 monografie, kilkanaście patentów i wiele prac badawczo-konstrukcyjnych. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego.



e-mail: zlw@op.pl

Parametry wyznaczone z próbki metodą A są estymatami parametrów populacji możliwych wyników obserwacji. Zakres stosowania tej metody dotyczy wartości obserwacji pomiarowych, które można traktować jako niezależne realizacje zmiennej losowej abstrahując od ich powiązań czasowych i przestrzennych. Procedura jest taka jak dla pozornych błędów przypadkowych o rozkładzie normalnym. Zalecenia Przewodnika GUM nie podają jak poprawnie szacować niepewność pomiarów, gdy zmiany parametrów obiektu mierzonego i toru pomiarowego podlegają innym rozkładom niż normalny. Przepisy metrologiczne nie nadążają za bieżącymi potrzebami praktyki pomiarowej. Dlatego też ukazuje się szereg prac poświęconych doskonaleniu i rozszerzeniu metod podanych w Przewodniku GUM, w tym [5-8].

W publikacji [7] autorzy omówili usuwanie trendu liniowego z „surowych” wyników równomiernie próbkowanych obserwacji pomiarowych i sposób uwzględniania wpływu autokorelacji w obliczeniach niepewności typu A [5]. Wykazano, że skorelowanie obserwacji skutkuje zmniejszeniem się efektywnej ich liczby, co pogarsza wyznaczaną statystycznie dokładność pomiarów. Nieprawidłowości pojawiają się w praktyce, gdy wg kryterium  $\chi^2$  najbliższy rzeczywistemu rozkład prawdopodobieństwa obserwacji różni się znacznie od normalnego. Wówczas to wartość średnia próbki i standardowe jej odchylenie mogą nie stanowić najlepszej oceny wartości i niepewności wyniku pomiaru mierzonego parametru. Należy posłużyć się innymi parametrami [M5, M6]. Zilustruje się to dla rozkładu jednostajnego obserwacji pomiarowych wraz z przykładem próbki oraz omówi się rozkład dwuwkładniczy (Laplace'a). Poda się najbardziej efektywne ich parametry wraz z odchyleniami standardowymi jako podstawę oceny niepewności pomiaru. Wyniki porówna się z wartością średnią i niepewnością typu A.

## 2. Oszacowanie niepewności obserwacji o rozkładzie jednostajnym

Ze statystyki matematycznej wynika, że dla próbki z populacji o **rozkładzie jednostajnym** (używa się też nazw: rozkład równomierny lub prostokątny) najbardziej efektywną oceną wyniku pomiaru jest **środek rozpięcia**  $q_{s,r}$ . Wyznacza się go z wartości średniej najmniejszego oraz największego elementów  $q_{s,i}$  próbki po uporządkowaniu [M5] s. 407, [M6] s. 125, tj.:

$$q_{s,r} = \frac{q_{s,1} + q_{s,n}}{2} \quad (1)$$

Wg [M6] wartość oczekiwana  $M(V)$  rozpięcia próbki  $V = q_{s,n} - q_{s,1}$  i wariancja środka tego rozpięcia  $D(q_{s,r})$  wynoszą:

$$M(V) = \frac{n+1}{n-1} R$$

$$D(q_{s,r}) = \frac{R^2}{2(n+1)(n+2)}$$

gdzie:  $R$  jest rozpięciem całej populacji o rozkładzie jednostajnym, z którego została pobrana próbka o  $n$  obserwacjach.

Standardowe odchylenie środka rozpięcia jest następujące:

$$s(q_{s,r}) \equiv s_{s,r} = \frac{V}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)\sqrt{n+2}} \quad (2)$$

Opis rozkładu jednostajnego przez wartość średnią  $\bar{x}$  i jej odchylenie średnie standardowe  $u_A(x)$ , czyli niepewność typu A wg zaleceń GUM daje gorsze wyniki, gdyż przy dużej liczbie obserwacji  $n$  w próbce odchylenie standardowe  $s(q_{s,r})$  środka rozpięcia zmniejsza się proporcjonalnie o ok.  $n$  razy, a niepewność  $u_A(x)$  tylko o  $\sqrt{n}$ . Środek rozpięcia jest więc korzystniejszym parametrem do opisu rozkładu jednostajnego. Zostanie to poparte przykładem liczbowym.

**Przykład 1**

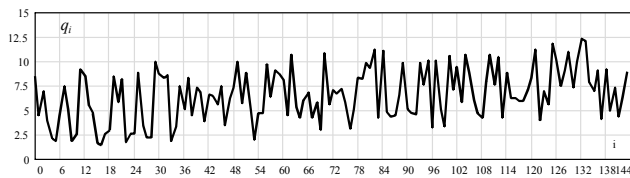
Otrzymano próbkę zawierającą  $n=144$  „surowych” obserwacji pomiarowych o wartościach liczbowych  $q_i$  pozyskanych kolejno przy równomiernym próbkowaniu:

8.483	4.527	7.032	3.956	2.121	1.869	4.473	7.531	5.170	1.902
2.621	9.252	8.494	5.556	4.757	1.647	1.480	2.652	2.965	8.508
5.908	8.202	1.703	2.652	2.635	8.858	3.498	2.300	2.270	10.034
8.712	8.325	8.666	1.843	3.391	7.531	5.159	8.385	4.501	7.328
6.830	3.884	6.638	6.541	5.600	7.441	3.453	6.266	7.342	10.003
5.811	8.824	5.120	1.996	4.750	4.798	9.807	6.380	9.132	8.798
8.170	4.527	10.768	5.367	4.310	6.074	6.910	4.218	5.893	2.959
10.842	5.636	7.136	6.796	7.263	5.912	3.181	5.066	8.332	8.217
9.890	9.325	11.223	4.222	11.102	4.899	4.378	4.448	6.566	9.918
5.159	4.735	4.675	9.855	7.649	10.101	3.280	10.065	5.154	3.374
10.564	7.123	9.443	5.853	10.704	8.898	6.136	4.812	4.230	8.056
10.752	7.652	10.496	4.287	8.934	6.225	6.279	5.964	6.016	7.167
8.355	11.232	4.042	7.042	5.603	11.830	10.198	7.523	9.112	10.989
7.343	10.020	12.423	12.097	7.898	7.053	9.162	4.116	9.229	5.015
7.410	4.385	6.397	9.053						

Należy oszacować najbardziej efektywną statystycznie wartość wyniku pomiaru oraz jego miarę niepewności.

**Rozwiązanie**

Na rys 1 przedstawiono wartości kolejnych obserwacji. Ich rozrzuty są dość znaczne. Dalszą procedurę obliczeń podano w Tabeli 1. Omówimy ją kolejno wg wierszy tej tabeli.



Rys. 1. Wartości surowych obserwacji próbki z przykładu 1.

Fig. 1. Values of rough observations of the sample of example 1.

1. Jako odniesienie do dalszych rozważań w wierszu 1 tabeli podano wartość średnią i standardowe odchylenie surowych wyników obserwacji. Obliczono je wg wzorów z Przewodnika GUM. Standardowe odchylenie obserwacji jest duże - wynosi ponad 40 % wartości średniej.

2. W treści przykładu nie ma informacji o oddziaływaniach systematycznych i ich poprawkach. Można jednak z surowych obserwacji pomiarowych próbki usunąć progresję ich wartości w czasie. W tym celu należy zbadać występowanie trendu, w pierwszym przybliżeniu jako liniowego. Konieczna jest do tego celu znajomość względnych czasów pozyskania obserwacji. Przy

Tab. 1. Procedura estymacji wyniku pomiarów z przykładu 1  
Tab. 1. Estimation procedure of measurement result – example 1

Lp	Dane: „surowe” wyniki obserwacji $q_i$ – wykres rys 1	
	a) Wg Przewodnika GUM	b) Najlepsze statystycznie
1	Parametry surowych obserwacji	
	Wartość średnia: $\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i = 6,604$ Odchylenie standardowe: $s(q_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2} = 2,684$	
2	Wykrycie i usunięcie trendu Wykryto trend liniowy o nachyleniu $A = 0.02491$	
	Wartości obserwacji skorygowanych względem średniej $\bar{q}$ : $q_{kor,i} = q_i - A \cdot \left( i - \frac{n+1}{2} \right)$ (3)	
3	Unormowana funkcja autokorelacji $\rho_k$ bez trendu $\rho_k = \frac{1}{n-k} \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (q_{kor,i} - \bar{q})(q_{kor,i+k} - \bar{q})}{s^2(q_i)}$ (4)	
4	Rzeczywista liczba pomiarów $n$	Efektywna liczba pomiarów $n_{eff} = \frac{n}{1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\rho_k}$ (5)
	Liczba stopni swobody $\nu = n-1$	Liczba stopni swobody $\nu_{eff} = n-1$ (6)
5	Histogram skorygowanej próbki	
	Wartości krańcowe: $q_{s,1} = 2,469 \dots q_{s,144} = 11,105$ Rozpiętość próbki: $V = q_{s,144} - q_{s,1} = 8,636$ Liczba przedziałów: $m = 10$ (o szerokości 0,864)	
	Wybór rozkładu wg kryterium: $\chi^2$	
6	Poziom istotności $\alpha = 0,05$ , liczba stopni swobody $\nu = m - 2 - 1 = 7$ Wartość $\chi^2_{\nu,\alpha}$ (z tabeli $\chi^2$ ): $\chi^2_{7,0,05} = 14,11$	
	Rozkład normalny (Gausa) $\chi^2 = n \sum_{j=1}^m \frac{(w_j - p_{norm,j})^2}{P_{norm,j}}$ $\chi^2 = 18,898 > \chi^2_{7,0,05} = 14,1$ Uzyskano wynik negatywny	Rozkład jednostajny $\chi^2 = n \sum_{j=1}^m \frac{(w_j - p_{jedn,j})^2}{P_{jedn,j}}$ (7) $\chi^2 = 5,306 < \chi^2_{7,0,05} = 14,11$ Spełnia kryterium
	Parametr rozkładu	
7	Wartość średnia skorygowanej próbki $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_{kor,i} = \bar{q}_{kor} = 6,617$	Środek rozpięcia próbki $q_{s,r} = \frac{q_{s,1} + q_{s,144}}{2} = 6,8095$
	Niepewność standardowa średniej $u_A(x)$ $s(\bar{q}_{kor}) = \frac{s(q_{kor})}{\sqrt{n}} = \frac{2,475}{\sqrt{144}} = 0,207$	Odchylenie standardowe $q_{s,r}$ $s_{s,r} = \frac{V}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)\sqrt{n+2}} = 0,0424$
8	Stosunek odchyleń standardowych: $u_A(\bar{x}) / s_{s,r} \approx 4,93$	
	Dla kwantyla $k_p$ o poziomie ufności $p$ (wg rozkł. normal.)	
9	Niepewność rozszerzona średniej $\bar{x}$ $U_p(\bar{q}_{kor}) = k_p \cdot s(\bar{q}_{kor})$ przy $p=0,95$ , $k_{0,95} = 1,96$ , $U_{0,95}(\bar{q}) = 0,406$	Odchylenie graniczne środka rozpiętości $q_{s,r}$ $U_p(q_{s,r}) = k_p \cdot s(q_{s,r})$ , przy $p=0,95$ , $k_{0,95} = 1,96$ , $U_{0,95}(q_{s,r}) = 0,0831$
	Wyniki pomiaru	
10	$x_{GUM} = 6,617 \pm 0,406$	$x_{\nu/2} = 6,810 \pm 0,083$

równomiernym próbkowaniu czasy te wynikają z kolejności i częstości próbkowania.

Nachylenie trendu liniowego wyznacza się np. w sposób podany przez autorów w [5] metodą najmniejszych kwadratów. Otrzymany w ten sposób współczynnik nachylenia  $A = 0.02491$ . Korekcję obserwacji można przeprowadzić względem wartości średniej lub względem środka rozstępu próbki. Wyniki będą różniły się niewiele. Skorygowane wartości obserwacji dla drugiego z przypadków podaje wzór (3) w tabeli 1.

3. Należy następnie sprawdzić czy pochodzące z jednej populacji wyniki obserwacji w postaci sygnałów lub odczytów nie są ze sobą skorelowane. Niezbędna do tego celu jest też informacja o względnych odstępach czasu pomiędzy kolejnymi obserwacjami. Przy próbkowaniu równomiernym i ciągłości w pozyskiwaniu obserwacji próbki wzór dla wartości  $\rho_k$  funkcji autokorelacji [M1 - M3] upraszcza się do postaci (4) w tabeli 1. Występuje w nim  $k$  jako liczba okresów próbkowania (odległość) pomiędzy obserwacjami pomiarowymi. Otrzymane po eliminacji trendu wartości  $\rho_k$  funkcji autokorelacji przedstawiono na rys 2 łącząc kolejne punkty linią łamaną. Funkcja  $\rho_k$  spada gwałtownie z 1 prawie do 0 już przy drugiej obserwacji i następnie waha się wokół wartości 0. Wyniki obserwacji są więc nieskorelowane.

4. Sprawdzenie funkcji autokorelacji jest konieczne, gdyż jak wynika z publikacji [5], [6] w obliczeniach niepewności pomiarów powinno się ją uwzględnić tzw. „efektywnej liczbę obserwacji”  $n_{eff}$  – wzór (5). Jest ona mniejsza od rzeczywistej liczby  $n$  i wskutek tego niepewność wyniku pomiaru będzie większa niż  $u_A(x)$  obliczona wg GUM w rutynowy sposób. Dla  $n_{eff}$  wyznacza się też liczbę jej stopni swobody  $v_{eff}$  – wzór (6).

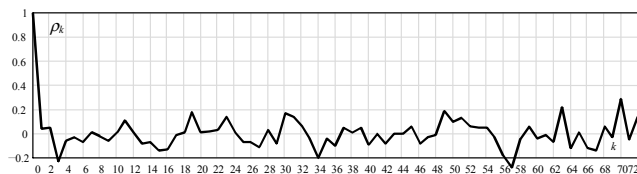


Fig. 2. Autocorrelation function of observations of the example 1.  
Rys. 2. Funkcja autokorelacji wyników obserwacji z przykładu 1.

5. Do wyboru właściwego rodzaju rozkładu obserwacji próbki sporządza się histogram ich skorygowanych wartości. Można też dodatkowo posilić wykres uporządkowanych wyników obserwacji. Nie stwierdzono w próbie istotnie odstających wartości krańcowych, które należałoby odrzucić jako zbyt mało prawdopodobne lub omyłki. Wykorzystuje się wszystkie obserwacje pomiarowe. Na osi x odkłada się kolejne numery  $j$  przedziałów wartości obserwacji ( $j=1, \dots, m$ ), a na osi y – ich częstość empiryczną  $w_j = n_j/n$  (gdzie:  $n_j$  - liczba pomiarów w przedziale  $j$ ,  $n$  - liczba pomiarów). Z rozpiętości próbki  $V = \max(q_i) - \min(q_i)$  wyznacza się szerokość przedziałów  $h$  wg zależności:

$$h = \frac{\max(q_i) - \min(q_i)}{m} \quad (7)$$

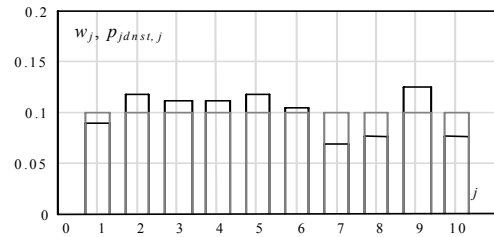
gdzie:  $m$  – przyjęta liczba jednakowych przedziałów

Wartości krańcowe skorygowanych obserwacji wynoszą:  
2,469 ... .. 11,105

Przyjmując  $m=10$  klas grupowania otrzymano histogram podany na rys.3. Szerokość przedziałów wynosi 0,864.

6. Z kształtu histogramu wywnioskowano, że należy sprawdzić, czy dla wartości obserwacji można przyjąć rozkład jednostajny jako model matematyczny. Hipotezę sprawdza się ilościowo za pomocą kryterium  $\chi^2$  [M1-M2]. Przy liczbie stopni swobody histogramu  $v = m - 2 - 1$  i przyjętym poziomie istotności  $\alpha$  wyznacza się  $\chi_{v,\alpha}^2$  z tablicy rozkładu  $\chi^2$ , np. w [M1]. Oznacza ono, że rozbieżności ze wszystkich przedziałów  $j$  pomiędzy wynikami rzeczywistymi i założonego rozkładu

teoretycznego nie powinny przekroczyć tej wartości. Dla histogramu z rys.3  $\chi^2=5,306$ . przy  $\alpha=0,05$  i  $v = 10 - 2 - 1 = 7$  otrzymuje się  $\chi_{7,0,05}^2 = 14,11$ . Sprawdzenie hipotezy o rozkładzie jednostajnym daje wynik pozytywny, gdyż  $\chi^2 < \chi_{7,0,05}^2$ . Można przyjąć ten rozkład do opisu obserwacji. Przy tych samych wartościach  $v$  i  $\alpha$  obserwacje próbki nie spełniają kryterium  $\chi^2$  dla rozkładu normalnego.



Rys. 3. Histogram obserwacji do przykładu 1:  
kolor czarny:  $w_j$  – dla próbki; czerwony - dla rozkładu jednostajnego.  
Fig. 3. Histogram of observations of the example 1.  
black -  $w_j$  of probe observations; red -  $P_{jdst,j}$  of uniform distribution.

7. W wierszu 7 tabeli 1 podano najkorzystniejsze parametry dla obu rozkładów. Środek rozpięcia próbki  $q_{s,r}$  – kolumna b obliczono na podstawie wartości krańcowych skorygowanych obserwacji wg (1). Jeżeli przyjęto by dla próbki a priori rozkład normalny, to najlepszą oceną liczbową wyniku pomiaru była by średnia  $\bar{x}$  - kolumna a). Jej wartość jest nieco mniejsza.

8. W pozycji 8b) podano standardowe odchylenie środka rozpięcia  $s_{s,r}$  wyznaczone ze wzoru (2). Stanowi ono podstawę opisu niepewności wyniku pomiaru dla rozkładu jednostajnego. W kolumnie a) umieszczono dla porównania niepewność standardową średniej  $u_A(\bar{x})$ . **Jest ona aż około 4,9 razy większa!** Ma to duże znaczenie dla pomiarów, w których dominuje niepewność typu A wynikająca z rozrzutu wartości obserwacji. Przy małej liczbie pomiarów  $n$  stosunek ten będzie inny. Niepewność  $u_A$  osiągnęłaby taką samą wartość jak wyznaczone tu odchylenie środka rozpięcia  $s_{s,r}$  przy wzroście liczby obserwacji w próbce 23,8 razy, tj. do 3430!

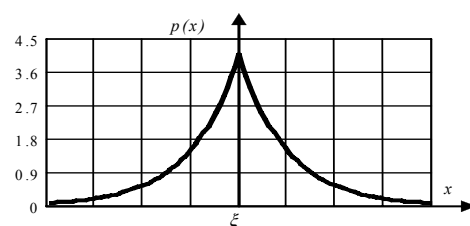
9. Wyznaczano też niepewności rozszerzone przy założeniu, że dla  $n \gg 1$  wartości obu wyników podlegają rozkładowi normalnemu, a współczynnik  $k_p$  wyznacza się dla  $p=0,95$ .

10. Zapisano oba wyniki pomiaru przy pomijalnej niepewności typu B. Są one różne. Dokładniejszy jest wynik dla środka rozpięcia jako najkorzystniejszego parametru rozkładu jednostajnego, niż dla średniej zalecanej przez GUM. Przy tym samym prawdopodobieństwie  $p$  odchylenie graniczne środka rozpięcia jest dużo mniejsze niż niepewność rozszerzona średniej, bo rozkład jest węższy.

Omówioną tu metodę obliczeń zaleca się stosować w praktyce.

### 3. Rozkład dwuwkładniczy (Laplace'a)

W pomiarach technicznych może wystąpić również rozkład dwuwkładniczy prawdopodobieństwa, nazywany też rozkładem Laplace'a. Otrzymuje się go jako różnicę dwu niezależnych zmiennych losowych o rozkładach wykładniczych [M3 –Tab. V]. Wykres tego rozkładu podano na rysunku 4.



Rys. 4. Dwuwkładniczy rozkład Laplace'a  
Fig. 4. Double-exponential Laplace distribution



Opisuje go następujący wzór:

$$p(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x-\xi|}{\lambda}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (8)$$

gdzie:  $\xi$  - jest punktem środkowym rozkładu,  $\lambda$  - jest parametrem jego szerokości.

Dla próbki  $n$  obserwacji z populacji o rozkładzie Laplace'a **najbardziej efektywną oceną wyniku pomiaru jest mediana** (skrót ang. MAD) jako wartość środkowa uporządkowanej próbki [M3]. Odchylenie mediany jest mniejsze niż dla wartości średniej. Dlatego też należy wykorzystywać ją i jej odchylenie średnie standardowe w obliczeniach niepewności pomiarów.

Proponowana procedura postępowania dla tego rozkładu jest początkowo taka sama jak poprzednio dla rozkładu jednostajnego. Po „oczyszczeniu” wyników obserwacji ze znanych lub możliwych do usunięcia (trend, oscylacje) „naleciałości” systematycznych wyznacza się funkcję autokorelacji obserwacji i zastępuje, tzw. efektywną liczbę pomiarów. Następnie uzyskane wyniki obserwacji  $q_i$  porządkuje się kolejno wg ich wartości, tj.:

$$q_{s,1} \leq q_{s,2} \leq q_{s,3} \leq \dots \leq q_{s,n}$$

Nowe oznaczenie obserwacji  $q_{s,i}$  wynika z kolejności po ich uporządkowaniu. Medianę  $q_{med}$  oblicza się następująco:

- dla nieparzystej liczby obserwacji

$$q_{med} = q_{s,(n+1)/2} \quad (9a)$$

- dla parzystej liczby obserwacji:

$$q_{med} = \frac{q_{s,n/2} + q_{s,n/2+1}}{2} \quad (9b)$$

**Standardowe eksperymentalne odchylenie mediany** próbki z populacji o rozkładzie Laplace'a, jest o  $\sqrt{2}$  razy mniejsze od standardowego odchylenia wartości średniej próbki

$$s_{med} \approx \sqrt{\frac{s^2}{2n}} = \frac{\bar{s}}{\sqrt{2}} = \frac{u_A(\bar{q})}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

Stosunek standardowych odchyżeń wynosi  $\sqrt{2}$  razy, czyli ok. 1,41. Niepewność typu A dla wartości średniej wyznaczonej wg GUM zmalałaby do wartości odchylenia standardowego mediany, gdyby liczba pomiarów  $n_{eff}$  wzrosła aż dwukrotnie.

Przy dużej liczbie pomiarów  $n$  można założyć, że mediana ma rozkład normalny i przyjąć, że dla  $p=0,95$  współczynnik  $k_p=1,96$ . Dla danej liczby pomiarów  $n$  rozkład prawdopodobieństwa odchyżeń od mediany jest węższy niż odchyżeń od średniej i wynik mediany jest dokładniejszy. Przy małej liczbie pomiarów i tym samym prawdopodobieństwie  $p$  współczynnik rozszerzenia  $k_p$  mediany będzie mniejszy niż dla średniej [M5, M6].

Rozważania te potwierdzają przykłady liczbowe dla tego rozkładu podane w innych publikacjach autorów [5], [6], [8].

## 4. Wnioski

1. Przy wyznaczaniu najlepszej oceny wyniku pomiaru oraz szacowaniu jego niepewności, jeśli brak informacji, że po skorygowaniu składowej systematycznej obserwacji podlegają określone a priori rozkładowi prawdopodobieństwa, to należy sporządzić ich histogram, przyjąć model rozkładu w stopniu jak największym odpowiadający wynikom obserwacji oraz sprawdzić hipotezę o tym rozkładzie wg kryterium  $\chi^2$ . Nieadekwatny wybór rozkładu spowoduje zmianę wartości wyniku pomiaru i znacznie pogorszy ocenę jego niepewności – patrz przykład 1.

2. Po wyznaczeniu wartości najefektywniejszego statystycznie parametru danego rozkładu, np. środka rozpięcia dla rozkładu jednostajnego lub mediany dla rozkładu dwuwykładniczego (Laplace'a) i ich odchyżeń standardowych, można je stosować dalej w obliczeniach wyniku pomiaru i jego niepewności w taki sam sposób jak średnią i niepewność  $u_A$  wg zaleceń GUM.

3. Dla uniknięcia niejednoznaczności przy opisie niepewności wyników obserwacji o innych rozkładach niż normalny można ich parametry oznaczać w odmienny sposób od niepewności typu A zdefiniowanej w przewodniku GUM. Odmienność rozkładu obserwacji i jego parametrów trzeba uwzględnić też przy splocie z innymi rozkładami w pomiarach pośrednich i z rozkładem wypadkowym niepewności typu B.

4. Przedstawiony tu wybór z dopuszczalną rozbieżnością właściwego rozkładu obserwacji pomiarowych, poprzedzony omówioną w publikacji [7] eliminacją trendu i składowych okresowych oraz wyznaczanie niepewności typu A dla skorelowanych obserwacji są nowymi propozycjami dla praktyki pomiarowej. Zapewniają one lepszą ocenę wartości i niepewności wyniku pomiarów, nieuwzględnianą w Przewodniku GUM, jego Suplementach i w monografiach o niepewnościach [3, 4].

Propozycje udoskonalenia szacowania niepewności typu B przedstawione są w innych publikacjach autorów [5], [6] i [8]

## Literatura

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO 1992, 2<sup>nd</sup> ed. (revised and corrected) 1995
2. *Wyrażanie Niepewności Pomiaru*. Przewodnik, tłumaczenie i komentarz J. Jaworskiego, Wydawnictwo Głównego Urzędu Miar Alfavero Warszawa 1999, 2002
3. Rabinovich S.G.: *Measurement Errors and Uncertainty Theory and Practice*, 3<sup>th</sup> ed. Springer 2005
4. Kirkut L. Frenkel B.: *The Introduction to Uncertainty in Measurements Using the GUM* Cambridge Univ. Press, Physics, 2006
5. Dorozhovets M.: *Wybrane problemy praktycznej oceny błędów oraz niepewności pomiaru*. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr122 Elektrotechnika z.29 2006 s.9-44.
6. Dorozhovets M., Warsza Z.: *Udoskonalenie metod wyznaczania niepewności wyników pomiaru w praktyce* Przegląd Elektrotechniki nr 1 2007 s. 1-13
7. Dorozhovets M., Warsza Z.: *Wyznaczanie niepewności typu A pomiarów o skorelowanych rezultatach obserwacji*. Pomiar Automatyka Kontrola 2/2007 s. 20-25
8. Dorozhovets M., Warsza Z.L.: *Propozycje rozszerzenia metod wyznaczania niepewności wyniku pomiarów wg Przewodnika GUM część 2, Uściślenie metod obliczeń niepewności typu B*. Pomiar Automatyka Robotyka 2/2007 s. 6-12

## Uzupełniająca literatura matematyczna

- [M1] Tylor J.R.: *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995 (tłum. z ang.: *An Introduction to error analysis. The study of uncertainties in physical measurements* Oxford University Press California 1982)
- [M2] Bendat J.S., Piersol A.G.: *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*, WNT Warszawa 1976. (tłumaczenie z wcześniejszego wydania: *Random Data. Analysis and measurement procedure* J. Wiley & Sons N.York... 1986)
- [M3] Pacut A.: *Prawdopodobieństwo Teoria Modelowanie Probabilistyczne w Technice*. WNT 1985
- [M4] Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C.: *Analiza szeregów czasowych: prognozowanie i sterowanie* PWN Warszawa 1983 (polskie tłum. z wydania 1971 r.: *Time series Analysis: Forecasting and Control*. 3<sup>rd</sup> edn Prentice Hall New Jersey 1994)
- [M5] Kramer H.: *Matematyczne metody statystyki*. pod red. A. N. Kołgomorowa (tłum. z oryginału ang.: Cramer H. *Mathematical Methods of Statistics* Sztokholm 1946) wyd. 2 Mir Moskwa 1975 (w języku ros.)
- [M6] Novickij L.W., Zograf I.A.: *Ocenka pogreshnostiej rezultatov izmerenii*. Energoatomizdat Leningrad 1985