ANALIZA SPOSOBÓW MODELOWANIA KRZYWIZNY – KRZYWE BEZIER A METODA ANALITYCZNA1

Władysław Koc
prof. dr hab. inż., Politechnika Gdańska, 80-233 Gdańsk, ul. Narutowicza 11/12, tel. +48 58 347 1026, e-mail: kocwl@pg.gda.pl

Katarzyna Palikowska
dr inż., Politechnika Gdańska, 80-233 Gdańsk, ul. Narutowicza 11/12, tel. +48 58 348 6090, e-mail: katpalik@pg.gda.pl

Streszczenie. *W artykule przedstawiono analizę sposobów modelowania krzywizny krzywej przejścia łączącej dwa łuki kołowe o zgodnym przebiegu, z których jeden położony jest wewnątrz drugiego. Opisane w literaturze krzywe Bezier {2, 4} porównano z krzywymi typu K^0 i K^1 uzyskanymi na drodze analitycznej przy zastosowaniu uniwersalnej metody modelowania krzywizny. Oceną objęto właściwości dynamiczne porównywanych krzywych przejścia oraz możliwości zastosowania w przykładowych układach geometrycznych toru kolejowego.*

Słowa kluczowe: *tor kolejowy, układ geometryczny, krzywe Bezier, projektowanie, wspomaganie komputerowe*

1. Wstęp

Projektowanie układu geometrycznego toru kolejowego polega na łączeniu ze sobą określonych punktów charakterystycznych trasy za pomocą odcinków prostych oraz łuków o stałej i zmiennej krzywiźnie. W miejscach połączeń, na skutek zmian krzywizny poziomej, dochodzi do zwiększenia oddziaływań dynamicznych występujących w układzie tor-pojazd. W procesie modelowania krzywizny projektant dąży do zapewnienie płynnej zmiany krzywizny przy spełnieniu odpowiednich warunków {5}, by poprzez właściwe ukształtowanie krzywych przejścia zapewnić możliwie najkorzystniejsze właściwości dynamiczne układu.

Poszukiwanie nowych postaci krzywych przejścia i ocena istniejących są tematami wciąż aktualnymi, czego dowodem są liczne publikacje poświęcone tym zagadnieniom. W ostatnich latach w szeregu publikacji dotyczących krzywych Bezier {1, 2, 3, 4} autorzy przedstawiają nowe sposoby konstruowania tych krzywych oraz sugerują możliwość zastosowania tego rodzaju krzywych w dziedzinie projektowania dróg kołowych i kolejowych. W pracy {7} przedstawiono pozytywną ocenę możliwości zastosowania krzywych Bezier {2, 3} jako krzywych przejścia łączących dwa łuki kołowe odwrotne (*S-shaped transition*) i dwa łuki zgodne (*C-shaped transition*).

1 Wkład autorów w publikację: Koc W. 50%, Palikowska K. 50%

Ocena możliwości zastosowania krzywych Bezier w projektowaniu dróg kolejowych została dokonana na podstawie analizy oddziaływań dynamicznych w układzie tor-pojazd oraz sprawdzenia, czy spełnione zostały warunki stawiane układom geometrycznym toru [5]. Jako element porównawczy wykorzystano krzywe typu K^0 i K^1 uzyskane na drodze analitycznej przy zastosowaniu uniwersalnej metody modelowania krzywizny.

Niniejszy artykuł skupia się na porównaniu krzywych typu K^0 i K^1 z kubicznymi krzywymi C-Bezier (*cubic C-Bezier curve*) [2] oraz PH krzywymi Bezier piątego stopnia (*Pythagorean hodograph quintic Bezier curve*) [4], wykorzystanych jako krzywe przejścia łączące dwa łuki kołowe zgodne, z których jeden łuk leży wewnątrz drugiego (*C-oval transition*). Przypadek ten różni się zasadniczo od przypadku łączenia dwóch oddalonych łuków zgodnych (*C-shaped transition*), w którym warunek monotoniczności krzywizny nie jest spełniony i dąży się do uzyskania rozwiązań zapewniających pojedyncze ekstremum krzywizny.

Zastosowany model oraz sposób oceny oddziaływań dynamicznych został przedstawiony w pracach [6, 10]. Zasadniczym elementem analizy oddziaływań dynamicznych jest wyznaczenie wielkości drgań *X(t)* oraz wypadkowego przyspieszenia w ruchu drgającym *X''(t)* w rejonach, w których występują zmiany poziomej krzywizny toru. W pracy [10] przedstawiono opis metody numerycznej stosowanej do wyznaczenia wielkości drgań *X(t)* przy założeniu, że czynnikiem wymuszającym drgania poprzeczne pojazdu szynowego są zmiany krzywizny poziomej toru.

2. Uniwersalna metoda modelowania krzywizny

2.1. Założenia ogólne

Połączenie elementów trasy kolejowej o zróżnicowanej krzywiźnie powinno zapewniać ciągłą zmianę niezrównoważonego przyspieszenia bocznego, w sposób korzystny dla dynamiki oddziaływań w układzie droga – pojazd. Wiąże się to ściśle z właściwym sposobem modelowania krzywizny. Uogólniając metodę identyfikacji przyspieszeń niezrównoważonych występujących na różnych rodzajach krzywych przejściowych [9], możemy poszukiwać funkcji krzywizny k(l) wśród rozwiązań równania różniczkowego

$$k^{(m)}(l) = f\left[l, k, k', \ldots, k^{(m-1)}\right] \tag{1}$$

z warunkami na początku (dla $l = 0$) i na końcu (dla $l = l_k$) krzywej przejścia:

$$k^{(i)}(0^+) = \begin{cases} k_1 & \text{dla} \quad i = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n_1 \end{cases} \tag{2}$$

$$k^{(j)}(l_k^-) = \begin{cases} k_2 & \text{dla} \quad j = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad j = 1, 2, ..., n_2 \end{cases} \tag{3}$$

przy czym parametrem l jest położenie danego punktu na długości krzywej. Rząd równania różniczkowego (1) wynosi $m = n_1 + n_2 + 2$, a otrzymana funkcja $k(l)$ jest funkcją klasy C^n w przedziale $\langle 0, l_k \rangle$, gdzie $n = min(n_1, n_2)$.

Zastosowanie przedstawionej metody stwarza możliwość łączenia różnorodnych elementów geometrycznych, np. prostej z łukiem kołowym czy też dwóch łuków kołowych o przebiegu zgodnym lub odwrotnych. Metoda ta pozwala na generowanie rozwiązań o liniowej lub nieliniowej zmianie krzywizny.

Po wyznaczeniu krzywizny $k(l)$ zadaniem podstawowym staje się określenie współrzędnych krzywej w układzie x, y. Zakładamy, że początek tego układu znajduje się w punkcie końcowym krzywej wejściowej o krzywiźnie k_1, a oś odciętych jest styczna do tej krzywej w tymże punkcie. Równanie szukanego połączenia możemy zapisać w postaci parametrycznej:

$$x(l) = \int \cos \Theta(l) dl \tag{4}$$

$$y(l) = \int \sin \Theta(l) dl \tag{5}$$

Funkcję określamy na podstawie wzoru

$$\Theta(l) = \int k(l) dl \tag{6}$$

2.2. *Przypadek liniowej zmiany krzywizny (krzywa typu $K^{0)}$*

Jak powszechnie wiadomo, liniowa zmiana krzywizny występuje na krzywej przejściowej zwanej klotoidą, łączącą prostą ($k_1 = 0$) z łukiem kołowym ($k_2 = \frac{1}{R}$). Spróbujmy teraz ten przypadek uogólnić. Liniową zmianę krzywizny na określonej długości l_k uzyskuje się przez przyjęcie dwóch elementarnych warunków:

$$\begin{cases} k(0^+) = k_1 \\ k(l_k^-) = k_2 \end{cases} \tag{7}$$

oraz równania różniczkowego rzędu drugiego dającego rozwiązanie wielomianowe

$$k''(l) = 0 \tag{8}$$

Po wyznaczeniu stałych rozwiązanie problemu różniczkowego (9), (10) jest następujące:

$$k(l) = k_1 + \frac{1}{l_k}(k_2 - k_1)l \tag{9}$$

Ponieważ otrzymane rozwiązanie stanowi funkcja klasy C^0, zaliczymy je do kategorii określonej przez nas jako krzywe typu K^0. Wyznaczenie funkcji $\Theta(l)$

$$\Theta(l) = k_1 l + \frac{1}{2\, l_k}(k_2 - k_1)l^2 \tag{10}$$

umożliwia określenie współrzędnych $x(l)$ i $y(l)$ za pomocą wzorów (4) i (5) i rozwinięciu funkcji podcałkowych w szereg Maclaurina [8] (w przypadku łączenia krzywizn odwrotnych również w szereg Taylora [8]).

2.3. Przypadek nieliniowej zmiany krzywizny (krzywa typu K^1)

O ile przedstawione w punkcie 2.2 rozwiązanie dla liniowej zmiany krzywizny ma charakter jednoznaczny, to rozwiązań nieliniowych można uzyskać wiele, przyjmując różne warunki brzegowe oraz postaci równań różniczkowych. Spróbujmy zająć się teraz przypadkiem, który w odniesieniu do klasycznych krzywych przejściowych, łączących prostą z łukiem kołowym, identyfikuje krzywą Blossa [5].

Przyjmijmy warunki brzegowe

$$\begin{cases} k(0^+) = k_1 & k(l_k^-) = k_2 \\ k'(0^+) = 0 & k'(l_k^-) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

oraz następujące równie różniczkowe:

$$k^{(4)}(l) = 0 \tag{12}$$

Po rozwiązaniu problemu różniczkowego (11), (12) otrzymujemy następujący wzór na krzywiznę $k(l)$:

$$k(l) = k_1 + \frac{3}{l_k^2}(k_2 - k_1)l^2 - \frac{2}{l_k^3}(k_2 - k_1)l^3 \tag{13}$$

Uzyskane rozwiązanie, będące funkcją klasy C^1, kwalifikuje się do kategorii określonej, jako krzywe typu K^1. Postać funkcji $\Theta(l)$ jest następująca:

$$\Theta(l) = k_1 l + \frac{1}{l_k^2}(k_2 - k_1)l^3 - \frac{1}{2\, l_k^3}(k_2 - k_1)l^4 \tag{14}$$

Tak jak w przypadku liniowej zmiany krzywizny, określenie współrzędnych *x(l)* i *y(l)* za pomocą wzorów (4) i (5) wymaga rozwinięcia funkcji podcałkowych w szereg Maclaurina i ewentualnie Taylora [8].

3. Krzywe Bezier

Spośród omawianych w literaturze krzywych Bezier [1, 2, 3 , 4] analizie poddano kubiczne krzywe C-Bezier (*cubic C-Bezier curves*) [2] i PH krzywe Bezier piątego stopnia (*Pythagorean hodograph quintic Bezier curves*) [4].

3.1. Kubiczne krzywe C-Bezier

Kubiczna krzywa C-Bezier opisana jest następującym równaniem parametrycznym:

$$\boldsymbol{P}(t) = \frac{2}{\pi-2}\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\\ t\\ 1\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{2-\pi}{4-\pi} & \frac{2}{4-\pi} & -1\\ -1 & \frac{2}{4-\pi} & \frac{2-\pi}{4-\pi} & 0\\ -1 & \frac{2}{4-\pi} & \frac{-2}{4-\pi} & 1\\ \frac{\pi}{2} & \frac{-2}{4-\pi} & \frac{\pi-2}{4-\pi} & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P_0}\\ \boldsymbol{P_1}\\ \boldsymbol{P_2}\\ \boldsymbol{P_3}\end{pmatrix} \tag{15}$$

zdefiniowanym dla parametru t spełniającego zależność $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Spośród punktów kontrolnych $\{P_i\}_{i=0}^{3}$ punkty $\boldsymbol{P_0}$ i $\boldsymbol{P_3}$ będące węzłami krzywej Bezier stanowią punkty styczności krzywej z łukiem odpowiednio większym i mniejszym.

Pierwsza pochodna krzywej (15) wyrażona jest następującą formułą:

$$\boldsymbol{P}'(t) = \frac{2}{\pi-2}[(1-\sin t)(\boldsymbol{P_1}-\boldsymbol{P_0}) + (1-\cos t)(\boldsymbol{P_3}-\boldsymbol{P_2})] + \frac{2}{4-\pi}(\cos t + \sin t - 1)(\boldsymbol{P_2}-\boldsymbol{P_1}) \tag{16}$$

Druga pochodna krzywej (15) przedstawia się następująco:

$$\boldsymbol{P}''(t) = \frac{2}{\pi-2}\left[\left(\frac{\pi-2}{4-\pi}(\boldsymbol{P_2}-\boldsymbol{P_1}) - (\boldsymbol{P_1}-\boldsymbol{P_0})\right)\cos t + \left(\boldsymbol{P_3}-\boldsymbol{P_2} - \frac{\pi-2}{4-\pi}(\boldsymbol{P_2}-\boldsymbol{P_1})\sin t\right)\right] \tag{17}$$

W pracy [2] podano algorytm wyznaczania punktów kontrolnych $\{P_i\}_{i=0}^{3}$ z uwzględnieniem parametrów geometrycznych układu oraz parametru kształtu m. Na szczególne podkreślenie zasługuje fakt dokładnego uwzględnienia położenia środków łuków i zaprojektowanie krzywej przejścia niewymagającej zmiany położenia tychże łuków.

3.2. PH krzywe Bezier piątego stopnia

W pracy [4] przedstawiono zastosowanie krzywej Bezier piątego stopnia (*Pythagorean hodograph quintic Bezier curve*) opisanej formułą:

$$\boldsymbol{P}(t)(= x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}\boldsymbol{P_i}(1-t)^{5-i}t^i \tag{18}$$

zdefiniowanej dla parametru t, spełniającego zależność $0 \leq t \leq 1$.

Spośród punktów kontrolnych $\{P_i\}_{i=1}^{5}$ punkty $\boldsymbol{P}_0$ i $\boldsymbol{P}_5$ styczności krzywej z łukiem odpowiednio większym i mniejszym stanowią węzły krzywej Bezier.

Zastosowana krzywa spełnia warunek stawiany Pitagorejskim hodografom (*Pythagorean hodograph*), polegający na możliwości przedstawienia wyrażenia $x'(t)^2 + y'(t)^2$ jako wielomianu kwadratowego zmiennej t. Pochodna krzywej wyrażona jest następującą formułą:

$$\boldsymbol{P}'(t)(= \left(x'(t), y'(t)\right) = \left(u^2(t) - v^2(t), 2u(t)v(t)\right), 0 \leq t \leq 1 \tag{19}$$

gdzie:

$$u(t) = u_0(1-t)^2 + 2u_1t(1-t) + u_2t^2$$
$$v(t) = v_0(1-t)^2 + 2v_1t(1-t) + v_2t^2$$

W pracy [4] podano sposób wyznaczenia współczynników $u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2$ w odniesieniu do konkretnego układu geometrycznego łuków z uwzględnieniem parametru kształtu m.

Algorytm konstruowania PH krzywych Bezier piątego stopnia w przypadku układu łuków zgodnych, w którym jeden łuk leży wewnątrz drugiego [4], różni się od algorytmu stosowanego w przypadku łuków zgodnych oddalonych od siebie [3]. W pracy [4] podano możliwość uzyskania połączenia G^3 krzywej z łukiem większym lub połączenia G^3 z łukiem mniejszym. W projektowaniu dróg kolejowych rozważany może być jedynie wariant połączenia G^3 krzywej z łukiem większym z uwagi na fakt, iż w proponowanym połączeniu G^3 krzywej z łukiem mniejszym nie jest spełniony warunek monotoniczności krzywizny.

4. Analiza możliwości zastosowana

Analiza możliwości zastosowania zostanie przeprowadzona poprzez rozpatrzenie przykładowych układów geometrycznych toru kolejowego, obejmujących zadanie łączenia krzywą przejściową dwóch zgodnych łuków kołowych, z których jeden zawarty jest wewnątrz drugiego (*C-oval transition*). Wymagane jest tutaj spełnienie warunku monotoniczności krzywizny [5].

Rozważmy układ geometryczny dwóch zgodnych łuków kołowych Ω_0 i Ω_1 opisany w tabeli 1, w którym łuk Ω_1 położony jest wewnątrz łuku Ω_0.

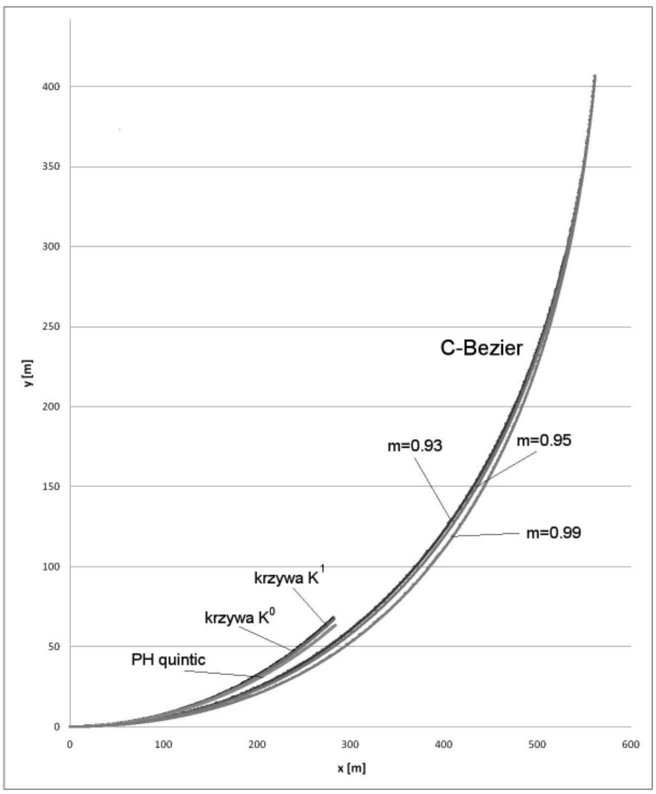
Tabela 1. Parametry geometryczne układu łuków kołowych zgodnych

Położenie środka łuku		Promień łuku$\boldsymbol{R}$ [m]	
C_0	(0;700)	R_0	700
C_1	ustalane w toku algorytmu konstruowania krzywej	R_1	500

W układ opisany w tabeli 1 wpisujemy PH krzywą Bezier piątego stopnia przyjmując $\Theta = 0{,}2332$ w, wyniku czego otrzymujemy położenie środka $C_1 = (58{,}79;\ 510{,}11)$ łuku Ω_1 oraz odległość pomiędzy środkami łuków $r = \|C_1 - C_0\| = 198{,}78$ m. Algorytm konstruowania PH krzywej Bezier piątego stopnia przedstawiony w pracy [4] wykazuje się znacznie mniejszą elastycznością od algorytmu stosowanego w opracowaniu [3], dotyczącego łączenia oddalonych łuków zgodnych.

W celu porównania tej krzywej z krzywymi uzyskanymi metodą analityczną skonstruowano krzywe typu K^0 i K^1 o założonej długości $l_k = 293$ m. Następnie skonstruowano rodzinę kubicznych krzywych C-Bezier dla różnych wartości parametru kształtu m $\in \{0{,}93;\ 0{,}95;\ 0{,}99\}$, zachowując położenie środków łuków C_0 i C_1 uzyskane w trakcie konstruowania krzywej K^0. Parametr kształtu m kubicznych krzywych C-Bezier został dobrane tak, by spełnić wymagania niezbędne do uzyskania monotoniczności krzywizny określone przez algorytm [2], który w tym przypadku okazał się dużo mniej elastyczny niż w przypadku łączenia łuków zgodnych oddalonych od siebie.

W rezultacie opisanego toku postępowania otrzymano połączenie łuków zgodnych przestawione na rysunku 1.



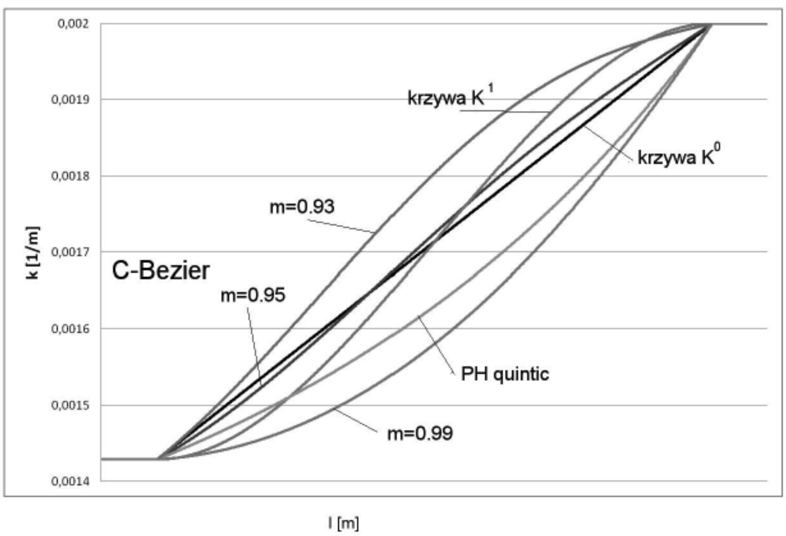
Rys. 1. Połączenie łuków zgodnych porównywanymi krzywymi przejścia

Krzywe pokazane na rysunku 1 różnią się długością, krzywizną (rys. 2), a także punktami styczności krzywej z łukiem Ω_1. Położenie środka C_1 łuku Ω_1 uległo przesunięciu jedynie w przypadku krzywej K^1 oraz PH krzywej Bezier piątego stopnia. Uzyskano kubiczne krzywe C-Bezier znacznie długości w stosunku do pozostałych krzywych. Nie istniało rozwiązanie o krótszej długości krzywej, zachowujące jednocześnie położenie środka C_1 łuku Ω_1.

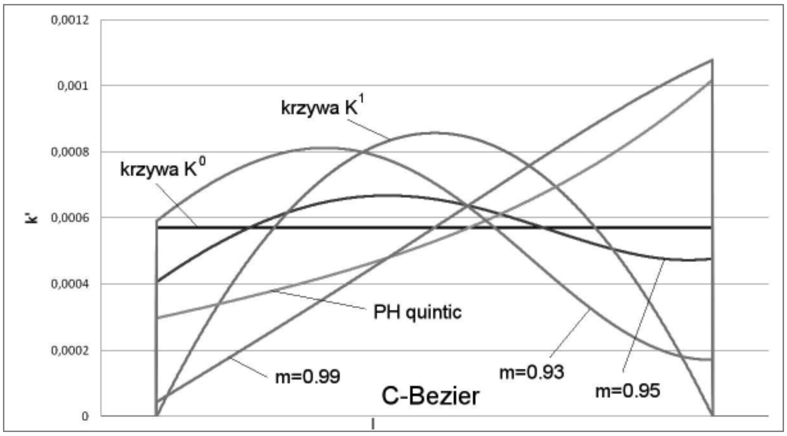
Tabela 2. Długości, położenia środka C_1 łuku Ω_1 oraz punkty styczności krzywych K^0 i K^1, rodziny kubicznych krzywych C-Bezier oraz PH krzywej Bezier piątego stopnia

Krzywa	Krzywa K^0	Krzywa K^1	PH quintic	C-Bezier m=0,93	C-Bezier m=0,95	C-Bezier m=0,99
Długość krzywej l[m]	293,00	293,00	293,23	734,14	736,47	741,21
Punkt styczności z łukiem Ω_1	(281,81; 68,11)	(282,25; 67,36)	(283,63; 63,52)	(534,84; 394,98)	(534,84; 394,98)	(534,84; 394,98)
Położenie środka C_1	(41,22; 506,42)	(42,73; 506,26)	(58,79; 510,11)	(41,22; 506,42)	(41,22; 506,42)	(41,22; 506,42)

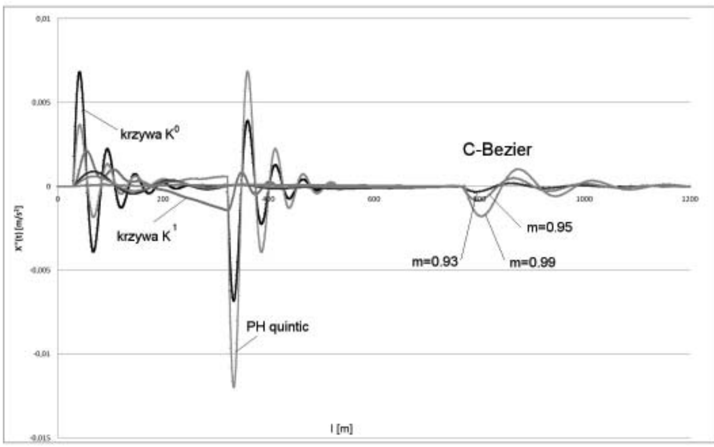
Na rysunku 2 zaprezentowano krzywizny porównywanych krzywych, na rysunku 3 pochodne krzywizny, a na rysunku 4 przyspieszenie w ruchu drgającym X''.



Rys. 2. Krzywizny porównywanych krzywych przejścia



Rys. 3. Pochodne krzywizny porównywanych krzywych przejścia



Rys.4. Przyspieszenie w ruchu drgającym X”

Spośród krzywych o długości $l_k = 293$ m zdecydowanie najlepsze właściwości dynamiczne ma krzywa typu K^1. PH krzywa Bezier piątego stopnia ma lepsze właściwości dynamiczne od krzywej typu K^0 w początkowym rejonie, a gorsze w rejonie końcowym. Wynika to z zastosowania wariantu algorytmu konstruowania krzywej gwarantującego połączenie G^3 z łukiem większym. Dobre właściwości rodziny kubicznych krzywych C-Bezier wynikają z ich znacznej długości w stosunku do pozostałych krzywych.

W celu porównania właściwości tej rodziny krzywych rozważmy układ geometryczny dwóch zgodnych łuków kołowych Ω_0 i Ω_1 opisany w tabeli 3, w którym łuk Ω_1 położony jest wewnątrz łuku Ω_0. W algorytmie konstruowania rezygnujemy z zachowania wspólnego położenia środka C_1 łuku Ω_1 dążąc do osiągnięcia zbliżonych długości wszystkich porównywanych krzywych.

Tabela 3. Parametry geometryczne układu zgodnych łuków kołowych

Położenie środka łuku		Promień łuku R [m]	
C_0	(0;1000)	R_0	1000
C_1	ustalany w toku algorytmu konstruowania krzywej	R_1	500

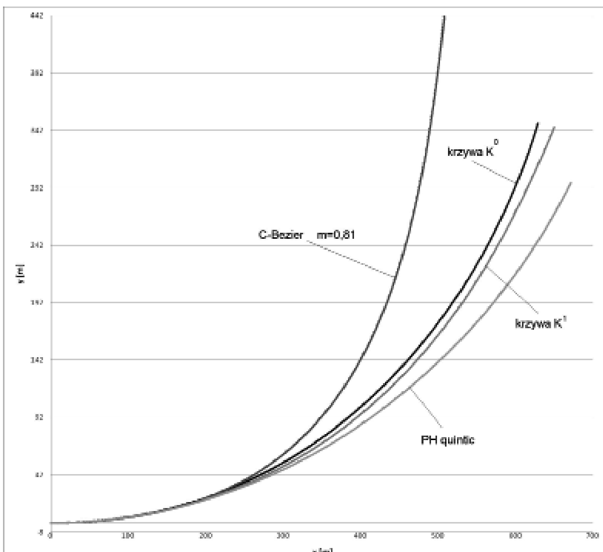
W układ opisany w tabeli 3 wpisano krzywą typu K^0 o założonej długości $l_k = 600$ m, w wyniku czego otrzymano położenie środka $C_1 = (175{,}48;\ 557{,}68)$ łuku Ω_1 oraz odległość pomiędzy środkami łuków r $= \|C_1 - C_0\| = 475{,}86$ m. Następnie skonstruowano krzywą typu K^1 oraz krzywe Bezier: PH krzywą Bezier piątego stopnia i kubiczną krzywą C-Bezier o założonej długości $l_k = 600$ m.

W wyniku tej operacji otrzymano połączenie łuków zgodnych przestawione na rysunku 5. Krzywe na rysunku 5 różnią się krzywizną (rys. 6), punktami styczności krzywych z łukiem Ω_1 oraz położeniem środka C_1 łuku Ω_1. Długość otrzymanych krzywych różni się nieznacznie (tab. 4).

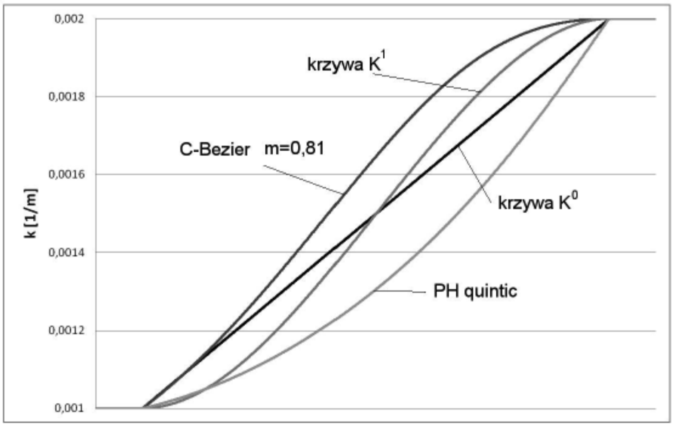
Tabela 4. Długości, położenia środka C_1 łuku Ω_1 oraz punkty styczności porównywanych krzywych

Krzywa	Krzywa K^0	C-Bezier m=0,81	PH quintic	Krzywa K^1
Długość krzywej l[m]	760	760,96	759,98	760
Punkt styczności z łukiem Ω_1	(629,43; 348,01)	(508,62; 440,79)	(671,83; 296,59)	(650,19; 344,16)
Położenie środka C_1	(175,48; 557,68)	(15,00; 600,00)	(268,97; 592,75)	(229,21; 613,94)

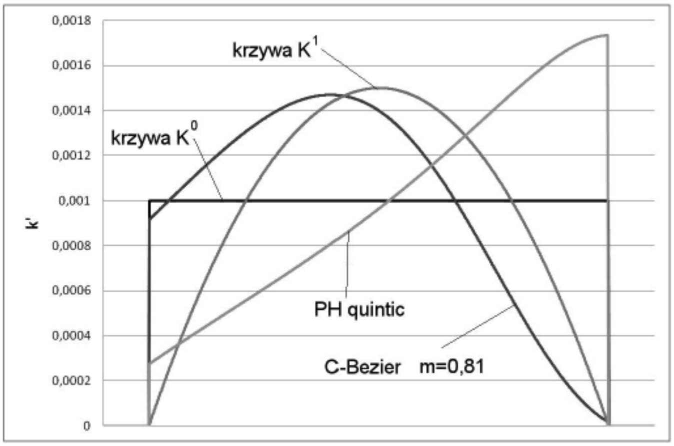
Na rysunku 6 pokazano krzywizny porównywanych krzywych, na rysunku 7 odpowiadające pochodne krzywizny, a na rysunku 8 przyspieszenie w ruchu drgającym X''.



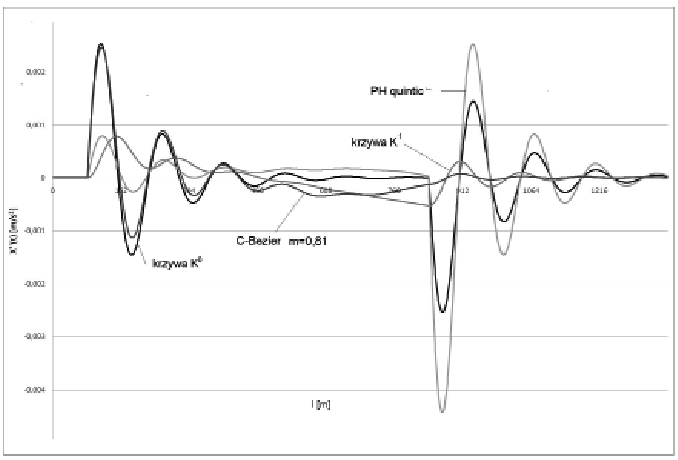
Rys. 5. Połączenie łuków zgodnych porównywanymi krzywymi przejścia



Rys. 6. Krzywizny porównywanych krzywych przejścia



Rys. 7. Pochodne krzywizny porównywanych krzywych przejścia



Rys. 8. Przyspieszenie w ruchu drgającym X''

Jak widać, najkorzystniejsze właściwości dynamiczne posiada krzywa typu K^1. Kubiczna krzywa C-Bezier z parametrem kształtu $m = 0{,}81$ ma lepsze właściwości dynamiczne niż krzywa K^0 w końcowym rejonie i podobne w rejonie początkowym. PH krzywa Bezier piątego stopnia z uwagi na połączenie G^3 z łukiem większym ma bardzo korzystne właściwości dynamiczne w początkowym rejonie i najgorsze w rejonie końcowym.

5. Podsumowanie

Przypadek łączenia dwóch łuków kołowych zgodnych, z których jeden zawiera się w drugim, jest przypadkiem znacznie utrudniającym konstrukcję krzywych Bezier w porównaniu z przypadkiem łuków zgodnych oddalonych od siebie. Możliwości operowania parametrem kształtu m i uzyskiwania szerokiego wachlarza krzywych są ograniczone wąskim zakresem dopuszczalnych wartości m, gwarantującym uzyskanie rozwiązania spełniającego warunek monotoniczności krzywizny.

Porównanie właściwości dynamicznych krzywych Bezier i krzywych typu K^0 i K^1 uzyskanych metodą analityczną w wyniku zastosowania uniwersalnej metody kształtowania krzywizny wykazało przewagę krzywych o nieliniowej krzywiźnie, wśród których najkorzystniejsze właściwości posiada krzywa typu K^1. Zastosowanie połączenia G^3 krzywej z łukiem o większym promieniu spowodowało znaczne pogorszenie właściwości dynamicznych PH krzywej Bezier piątego stopnia w końcowym rejonie przy połączeniu z łukiem o mniejszym promieniu.

Artykuł nie wyczerpuje tematu oceny możliwości zastosowania krzywych Bezier w dziedzinie projektowania dróg kolejowych. Pominięto bowiem wiele występujących przypadków, w tym analizę możliwości zastosowania krzywych Bezier do łączenia dwóch przecinających się prostych [1].

Literatura

[1] Ahmad A., Md.Ali J., G^3 transition curve between two straight lines., 5th International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualisation, Penang 2008.

[2] Cai H., Wang G., A new method in highway route design: joining circular arcs by a single C-Bezier curve with shape parameter. Journal of Zhejiang University SCIENCE A 2009, 10(4).

[3] Habib Z., Sakai M., G^2 Pythagorean hodograph quintic transition between two circles with shape control. Computer Aided Geometric Design 2007, nr 24.

[4] Habib Z., Sakai M., On PH quantic spirals joining two circles with one circle inside the other. Computer-Aided Design 2007, nr 39.

[5] Koc W., Elementy teorii projektowania układów torowych. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2004.
[6] Koc W., Mieloszyk E., Analiza porównawcza wybranych krzywych przejściowych z wykorzystaniem modelu dynamicznego. Archiwum Inżynierii Lądowej 1987, t. 33, z. 2.
[7] Koc W., Palikowska K., Ocena dynamiki wybranych sposobów łączenia elementów trasy o zróżnicowanej krzywiźnie. XVI Międzynarodowa Konferencja Naukowa „Komputerowe Systemy Wspomagania Nauki, Przemysłu i Transportu – TransComp", Zakopane 2012.
[8] Korn G.A., Korn T.M., Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów. Warszawa, PWN 1983.
[9] Mieloszyk E., Koc W., General dynamic method for determining transition curve equations. Rail International - Schienen der Welt1991, nr 10.
[10] Palikowska K., Projektowanie układów geometrycznych toru kolejowego z zastosowaniem programowania ewolucyjnego. Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska 2002.