

MAJKUT Leszek

## ZASTOSOWANIE FUNKCJI RADIALNYCH W ANALIZIE DRGAŃ WŁASNYCH KONSTRUKCJI POJAZDÓW<sup>1</sup>

### Streszczenie

*W pracy opisano bezsiarkową metodę kolokacyjną Kansy i jej wykorzystanie w analizie drgań własnych belek i płyt. W analizie wykorzystano funkcję wielokwadratową, opisano metodę doboru wartości parametru kształtu. Wszystkie wyniki porównano z wynikami analitycznymi lub symulacji Metodą Elementów Skończonych.*

### WSTĘP

Modelowanie matematyczne układów mechanicznych prowadzi zazwyczaj do układu równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych, który łącznie z warunkami brzegowymi stanowi problem początkowo-brzegowy. Tradycyjne metody numeryczne rozwiązania takiego problemu wymagają podziału na elementy: całego analizowanego obszaru, w metodach takich jak Metoda Różnic Skończonych (MRS), Metoda Elementów Skończonych (MES) czy Metoda Objętości Skończonych (MOS), lub jedynie brzegu obszaru w metodach takich jak Metoda Elementów Brzegowych (MEB). Olbrzymi nakład pracy włożony w rozwój MES uczynił z niej najbardziej popularną, a nawet podstawową, metodę przybliżonego rozwiązania problemów początkowo-brzegowych.

Metody przybliżonego rozwiązania problemu początkowo-brzegowego niewymagające siatki elementów to tzw. metody bezsiarkowe. Metody te podzielić można na dwa typy: metody obszarowe m.in. bezelementowa metoda Galerkin'a [1], metoda interpolacji punktowej [9], metoda funkcji Rvacheva [10] i metody brzegowe, do których należy m.in. metoda węzłów brzegowych [6]. W obu typach metodach punkty kolokacyjne umieszczone są w całym analizowanym obszarze lub jedynie na jego brzegu. Większość wymienionych metod jest bezsiarkowa jedynie w sensie interpolacji rozwiązania, niezbędne są natomiast „komórki” wykorzystywane do całkowania słabego sformułowania wariacyjnego problemu.

Innym podejściem poszukiwania przybliżonego rozwiązania problemu początkowo-brzegowego jest metoda Kansy [5] bazująca na sformułowaniu silnym i Radialnych Funkcjach Bazowych (RFB). Metoda ta nie wymaga zastosowania jakichkolwiek elementów czy komórek, dlatego też zwana jest metodą „prawdziwie” bezsiarkową.

W ciągu ostatnich 20 lat kolokacyjna metoda Kansy znalazła zastosowanie do rozwiązania wielu różnych problemów mechaniki m. in. analiza dwu i trójfazowych modeli tkanki [4], problemów wymiany ciepła [12], analizy równań Naviera-Stokesa [2], analizy pola elektromagnetycznego [8] i wielu innych.

<sup>1</sup>Praca powstała w ramach prac statutowych nr 11.11.130.885

Sukces metod związanych z wykorzystaniem RFB wiąże się z ich podstawową własnością polegającą na transformacji problemów wielowymiarowych do problemów jednowymiarowych. W niniejszej pracy wykorzystano kolokacyjną metodę Kansa wraz z wielokwadratową (ang. multiquadric) radialną funkcją bazową do analizy drgań własnych belki prostoliniowej i płyty. W celu wykazania poprawności i dokładności proponowanej metody obliczeń wszystkie wyniki analizy przybliżonej porównano z wynikami uzyskanymi metodą analityczną (w przypadku belki) i metodą elementów skończonych (dla płyty).

Przy wykorzystaniu funkcji wielokwadratowej bardzo istotnym jest wyznaczenie tzw. parametru kształtu, od którego zależy kształt funkcji bazowej. W pracy zaproponowano strategię wyboru „optymalnego” parametru kształtu.

## 1. RADIALNE FUNKCJE BAZOWE

Funkcja radialna to każda funkcja jednej zmiennej postaci:

$$\varphi_j(r) = \varphi(\|x - x_j\|) \quad (1)$$

gdzie:  $\|x - x_j\|$  jest Euklidesową odległością pomiędzy punktami  $x$  i  $x_j$ . Punkt  $x_j$  jest nazwany centrum funkcji radialnej (1). Zmieniając położenia centrów otrzymuje się rodzinę funkcji, która tworzy bazę wykorzystywaną do interpolacji lub aproksymacji dowolnej funkcji.

Każdą z funkcji bazowych postaci (1) zaliczyć można do jednej z dwóch kategorii: funkcje o zwartym nośniku, tj. funkcje, które są różne od zera jedynie w sferze o promieniu  $r$  (najczęściej  $r = 1$ ) lub funkcje o nośniku nieograniczonym ( $r \rightarrow \infty$ ). Najczęściej wykorzystywanymi funkcjami z pierwszej kategorii są zamieszczone w tabeli 1, funkcje Wendlanda [11]. W tabeli 2 zawarto przykłady funkcji o nośniku nieograniczonym.

**Tab. 1.** Bazowe funkcje radialne o zwartym nośniku

wymiar przestrzeni	definicja funkcji	definicja funkcji	definicja funkcji
$d = 1$	$\varphi(r) = (1-r)_+$	$\varphi(r) = (1-r)_+^3(3r+1)$	$\varphi(r) = (1-r)_+^5(8r^2 + 5r + 1)$
$d = 2,3$	$\varphi(r) = (1-r)_+^2$	$\varphi(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$	$\varphi(r) = (1-r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$

gdzie:

$$\varphi(r) = (1-r)_+^n = \begin{cases} (1-r)^n, & \text{dla } r \in \langle 0,1 \rangle \\ 0, & \text{dla } r > 1 \end{cases}$$

**Tab. 2.** Bazowe funkcje radialne o nośniku nieograniczonym

definicja funkcji	$\phi(r) = r$	$\phi(r) = r^3$	$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$	$\phi(r) = r^2 \ln r$	$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$	$\phi(r) = e^{-cr^2}$
nazwa funkcji	liniowa	sześcienne	wielokwadratowa	cienkiej płyty	wielokwadratowa odwrotna	Gausa

Ze względu na dużą popularność w zastosowaniach oraz dobre własności aproksymujące w pracy wykorzystano funkcję wielokwadratową, która w przypadku 1D (rów. 2a) i 2D (rów. 2b) ma postać:

$$\varphi_j(r) = \sqrt{(x - x_j)^2 + c^2} \quad (2a)$$

$$\varphi_j(r) = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c^2} \quad (2b)$$

Jak wspomniano wcześniej, kształt funkcji (2) zależy od parametru kształtu  $c$ . Wraz ze wzrostem jego wartości funkcja (2) staje się coraz bardziej płaska, przez to mało wrażliwa na zmiany odległości pomiędzy punktem  $x(x, y)$  i centrum funkcji radialnej  $x_j(x_j, y_j)$ . Problem doboru wartości parametru  $c$  jest jak dotąd nierozwiązany.

## 2. METODA KOŁOKACYJNA KANSY

Analizowany problem początkowo brzegowy opisany jest równaniem postaci:

$$Lu = f(x), \quad x \in \Omega \quad (3)$$

wraz z warunkami brzegowymi postaci:

$$Bu = g(x), \quad x \in \Gamma \quad (4)$$

gdzie:  $L$  jest liniowym operatorem różniczkowym,  $B$  jest operatorem opisującym warunki brzegowe,  $\Omega$  to analizowany obszar,  $\Gamma$  to brzeg tego obszaru.

Idea metody Kansy polega na aproksymacji rozwiązania problemu początkowo-brzegowego (3) i (4) za pomocą sumy szeregu rodziny funkcji radialnych tj.:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(r) \quad (5)$$

Współczynniki  $\alpha_j$  wyznacza się w procedurze kolokacji. W tym celu należy wybrać zbiór  $N_o$  punktów  $\{x_1, x_2, \dots, x_{N_o}\}$  należących do obszaru  $\Omega$ , w których żąda się by przybliżone rozwiązanie (5) spełniało równanie (3):

$$L\hat{u} = f(x_i) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N \alpha_j L \varphi_j(r_i) \quad (6)$$

Podobnie należy wybrać zbiór  $N_b$  punktów  $\{x_{N_o+1}, x_{N_o+2}, \dots, x_{N_o+N_b}\}$  na brzegu  $\Gamma$  analizowanego obszaru. W tych punktach muszą zostać spełnione równania warunków brzegowych (4):

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j B \varphi_j(r_i) \quad (7)$$

Równania (6) i (7) stanowią liniowy układ równań, który zapisać można w postaci macierzowej:

$$A \alpha = f \quad (8)$$

Z układu (8) wyznaczyć można poszukiwane współczynniki  $\alpha_j$ . W przypadku, gdy suma ilości wybranych punktów obszaru  $\Omega$  tj.  $N_o$  i ilości punktów brzegowych  $N_b$  jest równa ilości punktów centralnych  $N$  ( $N_o + N_b = N$ ) układ (8) rozwiązać można stosując eliminację Gaussa,

w przypadku gdy  $N_o + N_b > N$  układ (8) jest układem nadokreślonym i należy poszukiwać rozwiązania metodą najmniejszych kwadratów np. stosując rozkład SVD.

### 3. ANALIZA DYNAMICZNA BELKI

W pracy przez analizę dynamiczną rozumiane jest wyznaczenie częstości i wektorów drgań własnych.

Równanie drgań własnych prostoliniowej belki ma postać:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \lambda^4 w(x) = 0 \quad (9)$$

gdzie:  $\lambda^4 = \omega^2 \cdot \frac{\rho A}{EI}$ ,  $\omega$  to częstość drgań belki,  $\rho A$  to masa jednostki długości belki,  $EI$  sztywność na zginanie.

Funkcja  $w(x)$  z równania (9) musi dodatkowo spełniać warunki brzegowe. W pracy analizowano typowe warunki brzegowe belki tj. utwierdzenie ( $w = 0$  i  $w' = 0$ ), swobodne podparcie ( $w = 0$  i  $w'' = 0$ ) i wolny koniec ( $w'' = 0$  i  $w''' = 0$ ).

Zgodnie z metodą Kansy równanie linii ugięcia belki (9) może być zapisane w postaci:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{d^4}{dx^4} \sqrt{(x-x_j)^2 + c^2} \Big|_{x=x_i} - \lambda^4 \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{(x_i-x_j)^2 + c^2} = 0 \quad (10)$$

gdzie:  $x_i$  to współrzędne punktów kolokacyjnych  $i = 1, 2, \dots, N_o$ ,  $x_j$  to współrzędne centrów wielokwadratowych funkcji radialnych  $x_j = 1, 2, \dots, N$ .

We wszystkich analizowanych w pracy przypadkach przyjęto jedną wartość parametru kształtu dla wszystkich funkcji bazowych tj.  $c_j = c$ .

Dla każdego  $i$  równanie (10) opisuje  $i$ -ty wiersz macierzy  $A$  z równania (8), 4 ostatnie wiersze tej macierzy zależą od równań opisujących warunki brzegowe.

#### 3.1. Wybór parametru kształtu

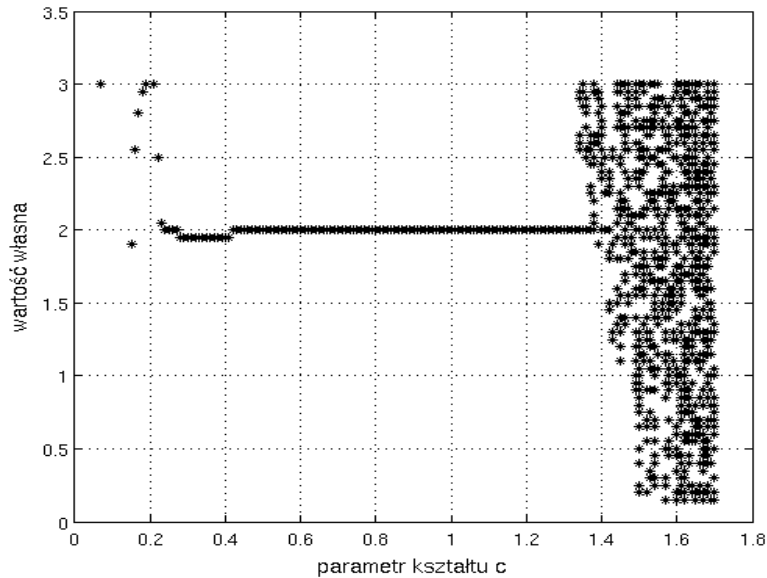
Dobór „optymalnej” wartości parametru kształtu jest, jak dotąd, nierozwiązanym problemem. Szczegółowy przegląd różnych strategii pozwalających na wyznaczenie tego parametru znaleźć można w pracy [3].

W niniejszej pracy autor proponuje inną strategię opartą na następującym algorytmie:

1. należy określić zakres zmienności parametru  $c$
2. należy znaleźć wartości  $\lambda$  dla których  $\det A = 0$
3. jeżeli wartość  $\lambda$  nie ma stabilnej wartości (dla różnych  $c$ ) należy wrócić do punktu 1 (zmiana zakresy zmienności  $c$ )
4. jeżeli  $\lambda$  osiąga wartość stabilną dla parametru  $c$  z pewnego zakresu, jako wartość  $c$  do obliczeń przyjąć można dowolną wartość  $c$  z tego zakresu.

Na rys. 1 pokazano przykładowy przebieg wartości  $\lambda$  w funkcji parametru kształtu  $c$ .

Z analizy obliczeń pokazanych na rys.1. wynika, że dla każdej wartości parametru kształtu z zakresu  $c \in \langle 0.42 - 1.3 \rangle$  uzyskuje się jedną, stabilną wartość własną. Przy obliczeniach częstości drgań własnych oraz amplitud drgań wymuszonych wykorzystać można dowolną wartość  $c$  z tego zakresu.



**Rys. 1.** Przykładowy przebieg zmian wartości  $\lambda$  w funkcji parametru kształtu  $c$

### 3.2. Częstości własne belki

Wykorzystanie metody kolokacyjnej prowadzi do układu równań postaci:

$$A \alpha = 0 \quad (11)$$

gdzie elementy macierzy  $A$  dane są równaniami:

$$A_{i,j} = \frac{d^4}{dx^4} \sqrt{(x-x_j)^2 + c^2} \Big|_{x=x_i} - \lambda^4 \sqrt{(x_i-x_j)^2 + c^2} \quad (12)$$

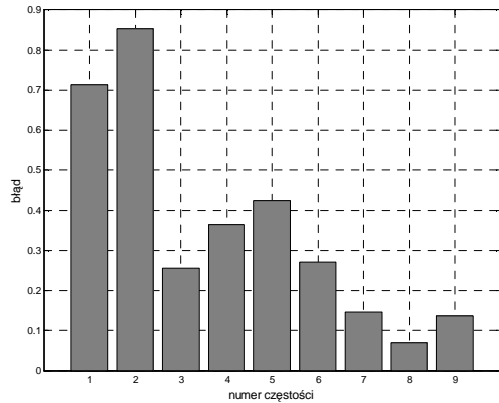
Cztery ostatnie wiersze macierzy  $A$  zależą od warunków brzegowych belki. Częstości drgań własnych belki tj. niezerowe rozwiązanie układu (11) otrzymuje się z warunku  $\det A = 0$ .

#### Porównanie wyników analizy

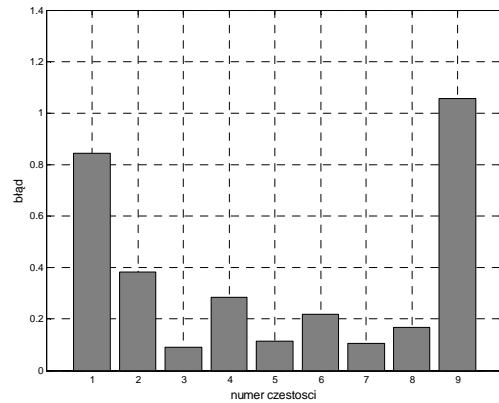
W celu oceny „jakości” wyników aproksymacji częstości drgań własnych uzyskanych z analizy przybliżonej z wynikami z metody analitycznej zdefiniowano błąd, dany zależnością (subskrypt  $a$  oznacza wyniki analizy analitycznej, subskrypt  $p$  – analizy przybliżonej):

$$\delta = \frac{(\omega_i^p - \omega_i^a)}{\omega_i^a} \cdot 100\% \quad (13)$$

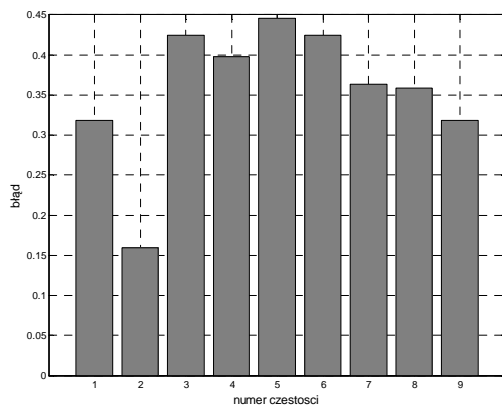
Wartości błędów wyznaczonych dla 10 pierwszych częstości własnych belek o różnych warunkach brzegowych pokazano na rys. 2.



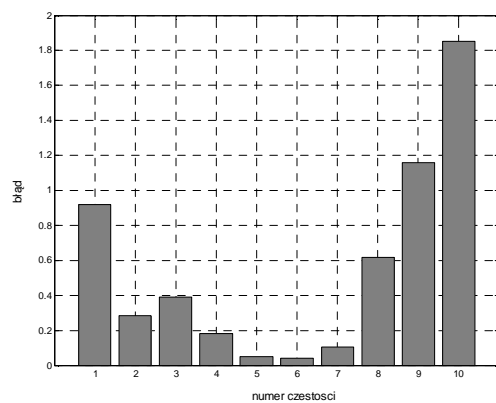
a) belka wspornikowa



b) belka obustronnie utwierdzona



c) belka swobodnie podparta



d) belka - lewy brzeg utwierdzony prawy swobodnie podparty

Rys. 2. Wartości błędów przy wyznaczaniu wartości własnych belek o różnych war. brzegowych

### 3.3. Wektory własne belki

Wyznaczenie wektora własnego proponowaną metodą polega na rekonstrukcji rozwiązania równania (10) dla wyznaczonych wcześniej częstości własnych. W celu oceny jakości wyników uzyskanych z analizy przybliżonej z wynikami z metody analitycznej. Błąd zdefiniowano zależnością (subskrypt  $a$  oznacza wyniki analizy analitycznej, subskrypt  $p$  – analizy przybliżonej):

$$E_i^{wek} = \sqrt{\frac{\int_0^l (X_i^a - X_i^p)^2 dx}{\int_0^l (X_i^a)^2 dx}} \cdot 100\% \quad (14)$$

Wyniki porównania pięciu pierwszych wektorów własnych wyznaczonych dla belki o różnych warunkach brzegowych zebrano w tab.3

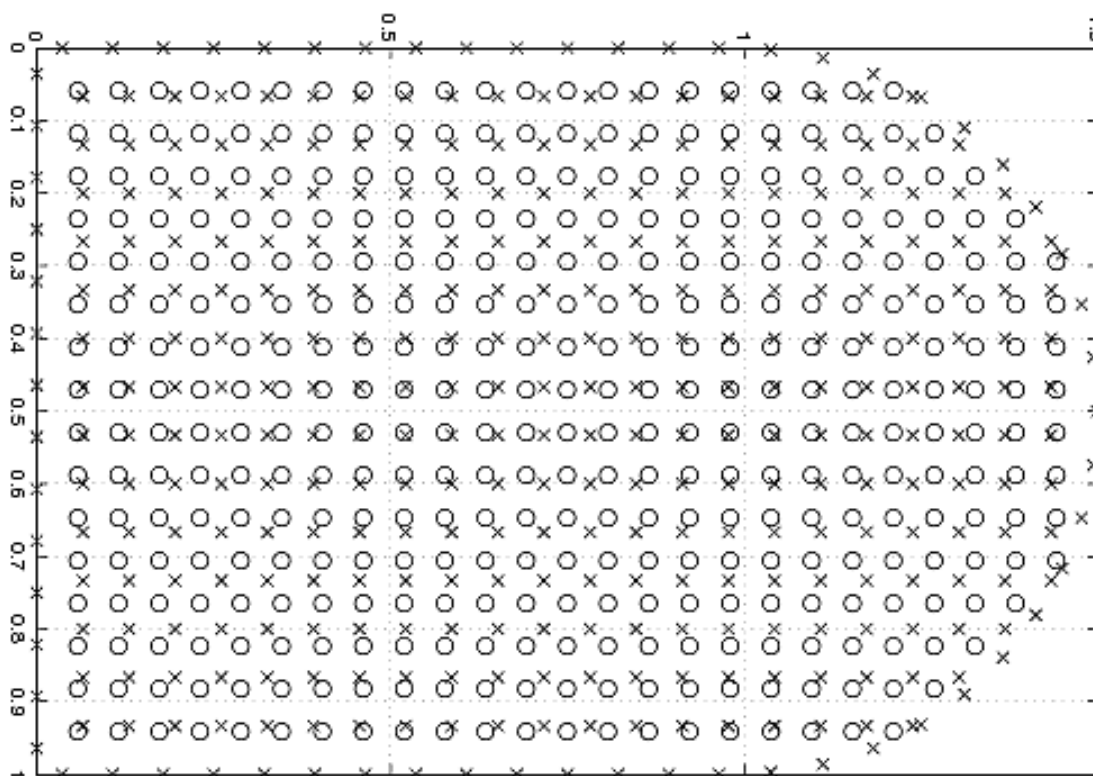
**Tab. 3.** Błędy przy wyznaczaniu wektorów własnych

warunki brzegowe	$E_1^{wek}$	$E_2^{wek}$	$E_3^{wek}$	$E_4^{wek}$	$E_5^{wek}$
utwierdzenie – wolny koniec	0.0554	0.1946	0.4313	0.9159	2.5995
utwierdzenie – utwierdzenie	0.0063	0.0675	0.0579	0.7485	0.9911
swobodne podparcie – swobodne podparcie	0.0547	0.1591	0.2285	0.4126	0.7006
utwierdzenie – swobodne podparcie	0.0799	0.1587	0.2664	0.5600	0.6203

Wyniki analizy zamieszone na rys.2 i w tab.3 wskazują jednoznacznie na bardzo dużą dokładność analizy z wykorzystaniem tej metody bezsiarkowej.

#### 4. ANALIZA DYNAMICZNA PŁYTY

W pracy przez analizę dynamiczną rozumiane jest wyznaczenie częstości drgań własnych. Metoda postępowania pozwalająca na wyznaczenie częstości drgań własnych płyty jest identyczna jak w przypadku drgań belki. Również metoda doboru parametru kształtu jest w tym przypadku identyczna. Analizowaną w pracy płytę wraz z rozkładem punktów kolokacyjnych (oznaczonych „x”) i centralnych funkcji radialnych (oznaczonych „o”) pokazano na rys. 3.

**Rys. 3.** Analizowana płyta

##### 4.1. Częstości własne płyty

Wykorzystanie metody kolokacyjnej prowadzi do układu równań postaci:

$$A \alpha = 0 \quad (15)$$

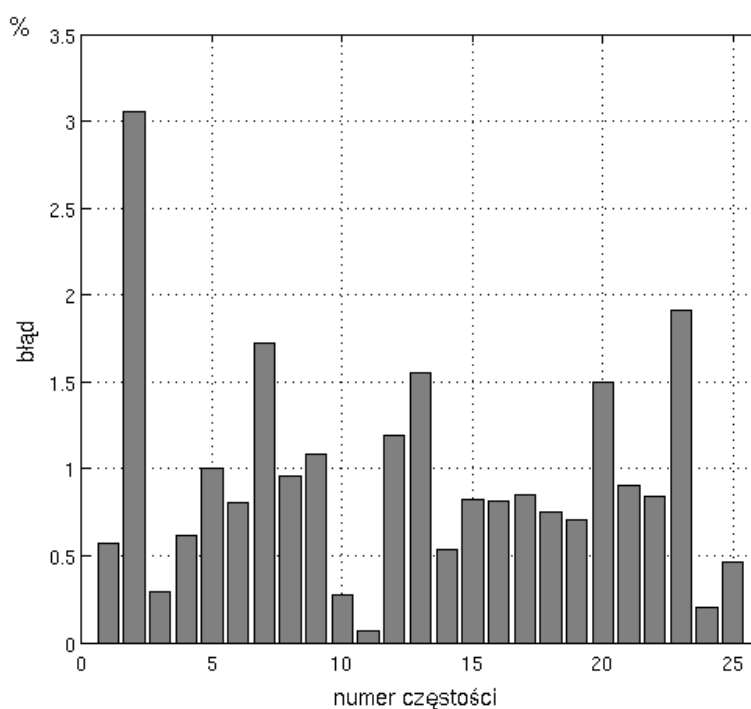
Częstości drgań własnych płyty tj. niezerowe rozwiązanie układu (15) otrzymuje się z warunku  $\det A = 0$ .

### Porównanie wyników analizy

W celu oceny „jakości” wyników aproksymacji częstości drgań własnych uzyskanych z analizy przybliżonej z wynikami z metody analitycznej zdefiniowano błąd dany zależnością (subskrypt *MES* oznacza wyniki uzyskane z metody elementów skończonych, subskrypt *p* – analizy przybliżonej):

$$\delta = \frac{(\omega_i^p - \omega_i^{MES})}{\omega_i^{MES}} \cdot 100\% \quad (16)$$

Wartości błędów wyznaczonych dla 25 pierwszych częstości własnych utwierdzonej płyty pokazano na rys. 4.



**Rys. 4.** Błąd w wartości częstości drgań własnych płyty

Wyniki analizy zamieszone na rys.4 wskazują jednoznacznie na bardzo dużą dokładność analizy z wykorzystaniem tej metody bezsiarkowej.

### PODSUMOWANIE

W pracy opisano metodę kolokacyjną Kansy oraz jej zastosowanie do analizy dynamicznej belki i płyty. W celu oceny poprawności i dokładności tej metody analizy porównano częstotliwości drgań własnych z wartościami wyznaczonymi metodą analityczną (dla belki) i z symulacji Metodą Elementów Skończonych (dla płyty).



Wyniki analizy wskazują jednoznacznie na bardzo dużą dokładność analizy z wykorzystaniem tej metody bezsiarkowej. Wyniki analizy wskazują również na poprawność zaproponowanej strategii doboru parametru kształtu funkcji radialnych.

## BIBLIOGRAFIA

1. Belystcho T., Lu Y., Gu L.: *Element free Galerkin methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 37, 1994, pp. 229-256
2. Chinchapatnam, P.P., Djidjeli, K., Nair, P.B.: *Radial basis function meshless method for the steady incompressible Navier–Stokes equations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 84, 2007, pp. 1509-1526
3. Fasshauer, G.E., Zhang, J.G.: *On choosing „optimal” shape parameter for RBF approximation*. Numerical Algorithms, 45, 2007, pp. 346-368
4. Hon Y.C., Lu M.W., Xue W.M., Zhou X.: *A new formulation and computation of the triphasic model for mechano-electrochemical mixtures*. Computational Mechanics 24, 1999, pp. 155-165
5. Kansa E.J.: *Multiquadric-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics*. Computers & Mathematics with Applications 19, 1990, pp. 147-161
6. Mukherjee Y.X., Mukherjee S.: *The boundary node method for potential problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 40, 1997, pp. 797-815
7. Tiago C.M., Leitao V.M.A.: *Application of radial basis functions to linear and nonlinear structural analysis problems*. Computers and Mathematics with Applications 51, 2006, pp. 1311-1334
8. Vu, P., Fasshauer, G.E.: *Application of two radial basis function-pseudospectral meshfree methods to three-dimensional electromagnetic problems*. IET Science, Measurement & Technology, 5, 2011 pp. 206-210
9. Wang J.G., Liu G.R.: *A point interpolation meshless method based on radial basis functions*. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering 54, 2002, pp. 1623-1648
10. Wawrzynek A., Detka M., Cichoń, Cz.: *Zastosowanie metody R-funkcji do wyznaczania współczynnika przejmowania ciepła*. Modelowanie Inżynierskie 43, Gliwice 2012, s. 255-263
11. Wendland, H.: *Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree*. Advances in Computational Mathematics, 4, 1995, pp. 389-396
12. Zerroukat M., Power H., Chen C.S.: *A numerical method for heat transfer problem using collocation and radial basis functions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 42, 1998, pp. 1263-1278
13. Zieniuk E., Sawicki D.: *Metoda Purc w analizie nieustalonego pola temperatury w obszarach płaskich*. Modelowanie Inżynierskie 44, Gliwice 2012, s. 285-292

## DYNAMIC ANALYSIS OF THE VEHICLE STRUCTURAL COMPONENTS WITH RADIAL BASED FUNCTION

### *Abstract*

*The work concerns the dynamic analysis of the beams and plates with the Radial Based Functions. The Kansa collocation method was used for determination eigenvalues of the beam and plate.*

*All results were compared with analytical (for beam) or Finite Element Analysis (for plate) results. All results indicate that using of multiquadric (MQ) RBF provide a results with very high accuracy in comparison to analytical results in dynamic analysis of beam-like and plate-like structural components.*

***Autor:***

dr hab. inż. **Leszek Majkut** – AGH-Akademia Górniczo – Hutnicza w Krakowie, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki