MINUT 2020 (2), s. 163–170
ISSN 2719-3063

Dariusz Rafał AUGUSTYN[1]

[1]Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki, Katedra Informatyki Stosowanej, Politechnika Śląska, ul. Akademicka 16, 44-100 Gliwice

Metody rozwiązywania równań różnicowych oparte na analogii do równań różniczkowych

Streszczenie. Artykuł prezentuje mało znane metody rozwiązywania liniowych równań różnicowych (rekurencyjnych), opisujących klasę dynamicznych układów dyskretnych. Metody te nie wykorzystują pojęcia transformaty Z czy Laplace'a–Carsona. Oparte są natomiast na pewnych analogiach do dobrze znanych metod rozwiązywania równań różniczkowych, opisujących dynamiczne układy ciągłe. W artykule zaprezentowano m.in. metody przewidywania i uzmienniania stałych, zastosowane do rozwiązywania równań różnicowych.

Słowa kluczowe: liniowe równania różnicowe, równania różnicowe i różniczkowe — analogie, metoda przewidywań, metoda uzmienniania stałych.

1. Metody rozwiązywania równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach

Równanie postaci

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \ldots + a_k x_n = f(n) \tag{1}$$

jest ze względu na x_n równaniem różnicowym liniowym rzędu k, o stałych, rzeczywistych współczynnikach a_i, gdzie n jest dyskretną zmienną niezależną. Jego rozwiązaniem jest funkcja $x_n = x(n)$. W uproszczeniu, równanie (1) jest więc rekurencyjną definicją pewnego ciągu, a rozwiązanie równania sprowadza się do znalezienia tzw. jawnego wyrażenia na n-ty wyraz ciągu.

Powszechnie stosowaną i wykładaną na uczelniach [1, 3] metodą rozwiązywania takich równań różnicowych klasy (1) jest metoda polegającą na wykorzystaniu transformaty schodkowej Laplace'a–Carsona z funkcji schodkowej lub transformaty Z, określonych dla $f_n = f(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Pierwsza z nich jest zdefiniowana jako $\mathcal{L}_C\left[\int f(x)\right] = F_{\int}(p) = (1 - e^{-p}) \sum_{i=0}^{\infty} f(i) e^{-pi}$, a druga jako $Z\left[f(x)\right] = F^*(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) z^{-i}$.

W prezentowanym opracowaniu pokazane zostaną metody rozwiązywania równań różnicowych (częściowo omawiane również w [2]) wzorowane na metodach rozwiązania równań różniczkowych [4]. Metody te pozwalają rozwiązywać równania klasy (1) bez wykorzystania pojęcia transformaty.

Autor korespondencyjny: D.R. Augustyn (draugustyn@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 30.09.2020.

2. Rozwiązywanie liniowych jednorodnych równań różnicowych o stałych współczynnikach

Równanie postaci

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \ldots + a_k x_n = 0 \tag{2}$$

jest równaniem liniowym różnicowym jednorodnym rzędu k, o stałych współczynnikach, a n jest dyskretną zmienną niezależną.

Rozwiązanie równania (2) jest postaci (tzw. przewidywana postać rozwiązania)

$$x_n = C_1 q_1^n + \ldots + C_k q_k^n, \tag{3}$$

gdzie C_i są pewnymi stałymi, których wartość można wyznaczyć uwzględniając pewne uwarunkowania brzegowe (np. określone w postaci zadanych, początkowych wartości $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$), natomiast q_i^n są pojedynczymi pierwiastkami tzw. równania charakterystycznego. Każdy ze składników występujących w wyrażeniu (3) określającym x_n spełnia równanie (2) [2]. W celu wyznaczenia wartości każdego z q_i wprowadźmy symbol Q. Przyjmując $x_n = CQ^n$ w równaniu (2), otrzymujemy równanie charakterystyczne dla równania różnicowego (2):

$$Q^k + a_1 Q^{k-1} + \ldots + a_k = 0. \tag{4}$$

Jeżeli wielomian (4) ze względu na Q ma k pierwiastków pojedynczych, to rozwiązanie równania różnicowego (2) jest postaci (3), gdzie wartości q_i w (3) są wartościami pierwiastków równania charakterystycznego.

Funkcja (3) nazywana będzie sumą ogólną równania jednorodnego — SORJ, przez analogię do nazewnictwa w dziedzinie równań różniczkowych (CORJ — całka ogólna równania jednorodnego). Jeżeli określone zostaną warunki brzegowe określające konkretne wartości C_i w (3), to wówczas takie rozwiązanie będzie nazywane sumą szczególną równania jednorodnego — SSRJ (przez analogię do CSRJ — całki szczególnej równania jednorodnego).

Przykład 1. Przedstawiona metoda, opierająca się na wzorach (3) i (4), zostanie zastosowana do znalezienia rozwiązania następującego równania różnicowego:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \tag{5}$$

przy $x_0 = 0, x_1 = 1$.
Równanie to opisuje ciąg Fibonacciego.

Równanie charakterystyczne dla (5) jest postaci $Q^2 - Q - 1 = 0$. Pierwiastki tego równania charakterystycznego wynoszą $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. SORJ ma więc postać

$$x_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{6}$$

Przyjmując warunki początkowe $x_0 = 0, x_1 = 1$, można z (6) znaleźć wartości stałych $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Stąd rozwiązanie równania (5) — SSRJ — to ciąg o wyrazie ogólnym

$$x_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Przykład 2. Rozwiążmy równanie różnicowe

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} + 5y_n = 0 \tag{7}$$

z warunkami początkowymi $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.

Równanie charakterystyczne dla (7) ma postać $Q^2 + 4Q + 5 = 0$. Pierwiastki tego równania charakterystycznego wynoszą $q_1 = -2 - i$, $q_2 = -2 + i$. Rozwiązanie — SORJ — jest więc postaci:

$$y_n = C_1(-2-i)^n + C_2(-2+i)^n. \tag{8}$$

Po wyznaczeniu C_1 i C_2 na podstawie $y_0 = 0, y_1 = 1$, końcowe rozwiązanie — SSRJ — ma postać:

$$y_n = \frac{i}{2}(-2-i)^n - \frac{i}{2}(-2+i)^n.$$

2.1. Postać trygonometryczna rozwiązania

Jeśli w rozwiązaniu (3) występują pierwiastki zespolone, wygodne jest zastosowanie trygonometrycznej postaci SORJ, w której nie występują liczby zespolone.

Rozważmy pewne równanie jednorodne:

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0,$$

o równaniu charakterystycznym $aQ^2+bQ+c = 0$, posiadające dwa pierwiastki zespolone, tzn. $Q \in \{q_1, q_2\}$, gdzie $q_1 = A-Bi$, $q_2 = A+Bi$, A i $B \neq 0$ są liczbami rzeczywistymi, natomiast i jest jednostką urojoną, spełniającą równanie $i^2 = -1$. Na podstawie (3) rozwiązanie można zapisać w postaci:

$$x_n = C_1(A-Bi)^n + C_2(A+Bi)^n.$$

Oznaczmy $|q| = \sqrt{A^2+B^2}$, $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{B}{A}$. Wówczas

$$x_n = C_1|q|^n e^{-i\alpha n} + C_2|q|^n e^{i\alpha n} = |q|^n(C_1\cos(\alpha n) - iC_1\sin(\alpha n) + C_2\cos(\alpha n) + iC_2\sin(\alpha n)),$$

czyli

$$x_n = |q|^n((C_1 + C_2)\cos(\alpha n) + i(C_2 - C_1)\sin(\alpha n)). \tag{9}$$

Stałe C_1 i C_2 są dowolnymi i niezależnymi stałymi, więc ich suma i różnica (a także różnica pomnożona przez stałą, np. i) są również niezależne. Pozwala to na uproszenie postaci (9) poprzez przyjęcie nowych stałych: $\hat{C}_1 = C_1 + C_2$, $\hat{C}_2 = i(C_2 - C_1)$. Wstawiając $\hat{C}_1$ i $\hat{C}_2$ do (9), można uzyskać trygonometryczną postać rozwiązania:

$$x_n = |q|^n(\hat{C}_1\cos(\alpha n) + \hat{C}_2\sin(\alpha n)). \tag{10}$$

W przykładzie 2, przyjmując $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$, postać SORJ dla (8) w wersji trygonometrycznej jest następująca:

$$x_n = (\sqrt{5})^n(C_1\cos(\alpha n) + C_2\sin(\alpha n)).$$

2.2. Przypadek pierwiastków wielokrotnych

Rozwiązanie równania jednorodnego (2) jest postaci (3) tylko wtedy, gdy pierwiastki równania charakterystycznego są jednokrotne. Łatwo sprawdzić, np. poprzez wstawienie do (2), że jeśli jakiś pierwiastek q_j jest k-krotny, to do rozwiązania (SORJ) wnosi on k składników:

$$C_j q_j^n + nC_{j+1} q_j^n \ldots + n^{k-1} C_{j+k-1} q_j^n,$$

co po uproszczeniu przyjmuje postać

$$q_j^n (C_j + nC_{j+1} + \ldots + n^{k-1} C_{j+k-1}).$$

W przypadku, gdy równanie charakterystycznego ma k-krotne parami sprzężone pierwiastki zespolone $q_j = A - Bi$ i $q_{j+1} = A + Bi$, to do rozwiązania (SORJ) wnoszą one $2k$ składników:

$$\begin{aligned}&C_j|q_j|^n \cos(\alpha n) + nC_{j+1}|q_j|^n \cos(\alpha n) + \ldots + n^{k-1} C_{j+k-1}|q_j|^n \cos(\alpha n) + \\ &+ C_{j+k}|q_j|^n \sin(\alpha n) + nC_{j+k+1}|q_j|^n \sin(\alpha n) + \ldots + n^{k-1} C_{j+2k-1}|q_j|^n \sin(\alpha n),\end{aligned}$$

co można zapisać w prostszej postaci jako:

$$\begin{aligned}&|q_j|^n (C_j \cos(\alpha n) + nC_{j+1} \cos(\alpha n) + \ldots + n^{k-1} C_{j+k-1} \cos(\alpha n) + \\ &+ C_{j+k} \sin(\alpha n) + nC_{j+k+1} \sin(\alpha n) + \ldots + n^{k-1} C_{j+2k-1} \sin(\alpha n)).\end{aligned}$$

3. Rozwiązywanie równań niejednorodnych metodą nieoznaczonych współczynników

Rozwiązaniem równania niejednorodnego (1), czyli sumą ogólną równania niejednorodnego jest

$$\text{SORN} = \text{SORJ} + \text{SSRN},$$

gdzie SORJ jest sumą ogólną odpowiadającego równania jednorodnego (2), a SSRN jest dowolną sumą szczególną równania niejednorodnego (1). Podobnie dla równań różniczkowych liniowych mamy

$$\text{CORN} = \text{CORJ} + \text{CSRN},$$

czyli analogia dotyczy nie tylko nazw, ale i samej formuły rozwiązania.

Jeżeli funkcja $f(n)$ z (1) należy do pewnej klasy (funkcja wykładnicza, wielomianowa lub ich iloczyn), możliwe jest łatwe znalezienie SSRN o postaci zbliżonej do f, przy pomocy metody nieoznaczonych współczynników. Nazwa metody wprowadzona została przez analogię do podobnej metody w dziedzinie rozwiązywania równań różniczkowych [4].

Dla ilustracji tej metody znaleziona zostanie SORN dla następującego równania rzędu pierwszego:

$$x_{n+1} - qx_n = d^n. \tag{11}$$

SORJ dla (11) wynosi $\hat{x}_n = Cq^n$.

W omawianej metodzie zakłada się, że pewna SSRN dla równania (11) jest postaci $\check{x}_n = Ad^n$ (dla $q \neq d$). Wartość A należy wyznaczyć. Podstawiając $\check{x}_n$ do (11) i przy założeniu, że w ten sposób uzyskane równanie $Ad^{n+1} - qAd^n = d^n$ ma być spełnione dla każdego n, otrzymujemy $A = \frac{1}{d-q}$.

Stąd szukana SORN wynosi

$$x_n = \hat{x}_n + \check{x}_n = Cq^n + \frac{d^n}{d-q}.$$

Opisywaną metodę można uogólnić dla równań dowolnego rzędu, określonych wzorem (1). Załóżmy, że funkcja f w (1) jest postaci $f(n) = d^n \sum\limits_{j=0}^{m} B_j n^j$, czyli iloczynu pewnej funkcji wykładniczej i potęgowej.

Przyjmijmy, że równanie charakterystyczne dla (1) jest postaci

$$(Q - q_1)^{s_1} \dots (Q - q_r)^{s_r} = 0.$$

W równaniu występuje r pierwiastków q_i, przy czym s_i oznacza krotność i-tego pierwiastka. Suma wszystkich krotności równa jest rzędowi równania, tzn. $\sum\limits_{i=1}^{r} s_i = k$.

Podstawiając do (1), można sprawdzić, że:

- jeśli d nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (tzn. $d \neq q_i$ dla każdego i), to SSRN wynosi $\check{x} = d^n \sum\limits_{j=0}^{m} A_j n^j$,
- jeśli d jest pierwiastkiem równania charakterystycznego o krotności s_i (czyli istnieje takie i, że $d = q_i$), to SSRN wynosi $\check{x} = n^{s_i} d^n \sum\limits_{j=0}^{m} A_j n^j$.

Znalezienie SSRN sprowadza się do wyznaczenia współczynników A_j (po podstawieniu $\check{x}_n$ do równania (1)), zakładając spełnialność tego równania dla każdego n.

4. Rozwiązywanie równań niejednorodnych metodą uzmienniania stałych

W niniejszym opracowaniu zaproponowano metodę uzmienniania stałych do rozwiązywania niejednorodnych liniowych równań różnicowych opisanych wzorem (1). Nazwa metody została wprowadzona przez analogię do odpowiedniej metody znanej z rozwiązywania równań różniczkowych. Metoda ta może być zastosowana dla dowolnej postaci funkcji $f(n)$. W szczególności można ją zastosować wtedy, gdy $f(n)$ nie będzie należeć do klasy funkcji wymaganych w metodzie nieoznaczonych współczynników.

4.1. Przypadek równań pierwszego rzędu

Metoda zostanie zilustrowana na przykładzie dowolnego liniowego równania różnicowego niejednorodnego pierwszego rzędu (znalezienie SORN):

$$x_{n+1} - qx_n = f(n). \tag{12}$$

Rozwiązanie odpowiadającego (12) równania jednorodnego — SORJ — jest następujące: $x_n = Cq^n$.

Metoda uzmienniania stałej polega na przyjęciu założenia o zależności C od n:

$$x_n = C_n q^n \tag{13}$$

i znalezieniu postaci tej zależności. Postać $x_n = C_n q^n$ jest szukaną SORN.

Wprowadźmy definicję operacji przyrostu Δ taką, że dla dowolnego y_n obowiązuje

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n.$$

Jeśli $x_n = C_n q^n$, to $x_{n+1} = C_{n+1} q^{n+1} = (C_{n+1} - C_n) q^{n+1} + C_n q^{n+1}$, czyli

$$x_{n+1} = \Delta C_n q^{n+1} + C_n q^{n+1}. \tag{14}$$

Po wstawieniu (13) i (14) do równania (12) otrzymujemy $\Delta C_n q^{n+1} = f(n)$. Stąd

$$C_{n+1} = C_n + \frac{f(n)}{q^{n+1}}, \text{ czyli } C_{n+1} = C_{n-1} + \frac{f(n-1)}{q^n}.$$

Ostatecznie

$$C_n = C + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(i)}{q^{i+1}},$$

gdzie C jest pewną stałą, którą można wyznaczyć z warunków brzegowych, np. zadając wartość x_0 i tym samym znajdując rozwiązanie szczególne dla (12).
Szukana SORN dla równania wynosi

$$x_n = \left(C + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(i)}{q^{i+1}} \right) q^n.$$

Znalezienie SORN wymaga znalezienia wyrażenia określającego szereg $C + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{f(i)}{q^{i+1}}$, co w ogólnym wypadku może stanowić trudność. Trudność ta jest podobnej natury co w metodzie uzmienniania stałej dla równań różniczkowych, gdzie dla znalezienia wyrażenia określającego $C(t)$ (gdzie t jest ciągłą zmienną niezależną) należy wyznaczyć pewną całkę nieoznaczoną.

Przykład 3. Zastosujmy metodę uzmienniania stałych do wyznaczenia SORN a równania

$$x_{n+1} - 2x_n = n.$$

Równanie charakterystyczne to $q - 2 = 0$. Zatem SORJ wynosi $x_n = Cq^n = C2^n$. Stąd SORN wynosi

$$x_n = C_n 2^n, \text{ gdzie } C_n = C + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{2^{i+1}}.$$

Znalezienie sumy szeregu może przebiegać następująco:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{2^{i+1}} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} i x^{i-1} \Bigg|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i \right) \Bigg|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x^n}{1-x} \right) \Bigg|_{x=\frac{1}{2}} = 1 - \frac{n+1}{2^n}.$$

Stąd

$$x_n = 2^n (C+1) - (n+1).$$

Jeśli oznaczymy $C+1=C'$, to rozwiązaniem — SORN — jest ciąg o wyrazie ogólnym

$$x_n = 2^n C' - (n+1).$$

4.2. Przypadek równań wyższego rzędu

Metoda uzmienniania stałych może być wykorzystana do rozwiązywania równań różnicowych wyższych rzędów. Dla ilustracji takiego zastosowania, metoda ta użyta zostanie do znalezienia SORN dla równania różnicowego rzędu drugiego o następującej postaci:

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n). \tag{15}$$

Dla uproszczenia przykładu wykorzystania metody przyjęto założenie o występowaniu pierwiastków pojedynczych q_1, q_2 równania charakterystycznego dla (15). Stąd SORJ wynosi $x_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$, a SORN wynosi

$$x_n = C_{1,n} q_1^n + C_{2,n} q_2^n, \tag{16}$$

zakładając uzmiennienie $C_{1,n}, C_{2,n}$.

Wyznaczmy wyrażenie określające x_{n+1}:

$$x_{n+1} = C_{1,n+1} q_1^{n+1} + C_{2,n+1} q_2^{n+1} = (C_{1,n+1} - C_{1,n}) q_1^{n+1} + (C_{2,n+1} - C_{2,n}) q_2^{n+1} + C_{1,n} q_1^{n+1} + C_{2,n} q_2^{n+1},$$
$$x_{n+1} = \Delta C_{1,n} q_1^{n+1} + \Delta C_{2,n} q_2^{n+1} + C_{1,n} q_1^{n+1} + C_{2,n} q_2^{n+1}.$$

Przyjmując

$$\Delta C_{1,n} q_1^{n+1} + \Delta C_{2,n} q_2^{n+1} = 0, \tag{17}$$

otrzymujemy

$$x_{n+1} = C_{1,n} q_1^{n+1} + C_{2,n} q_2^{n+1}. \tag{18}$$

Wyznaczmy wyrażenie określające x_{n+2}:

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= C_{1,n+2} q_1^{n+2} + C_{2,n+2} q_2^{n+2} = (C_{1,n+2} - C_{1,n}) q_1^{n+2} + (C_{2,n+2} - C_{2,n}) q_2^{n+2} + C_{1,n} q_1^{n+2} + C_{2,n} q_2^{n+2},\\
x_{n+2} &= (C_{1,n+2} - C_{1,n+1} + C_{1,n+1} - C_{1,n}) q_1^{n+2} + (C_{2,n+2} - C_{2,n+1} + C_{2,n+1} - C_{2,n}) q_2^{n+2} + C_{1,n} q_1^{n+2} + C_{2,n} q_2^{n+2},\\
x_{n+2} &= (\Delta C_{1,n+1} + \Delta C_{1,n}) q_1^{n+2} + (\Delta C_{2,n+1} + \Delta C_{2,n}) q_2^{n+2} + C_{1,n} q_1^{n+2} + C_{2,n} q_2^{n+2},\\
x_{n+2} &= (\Delta C_{1,n+1} q_1^{n+2} + \Delta C_{1,n} q_1^{n+2}) + (\Delta C_{2,n+1} q_2^{n+2} + \Delta C_{2,n} q_2^{n+2}) + C_{1,n} q_1^{n+2} + C_{2,n} q_2^{n+2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Z warunku (17), poprzez indukcję matematyczną (podstawiając $n+1 \to n$), otrzymujemy

$$\Delta C_{1,n+1} q_1^{n+2} + \Delta C_{2,n+1} q_2^{n+2} = 0. \tag{20}$$

Wykorzystując (19) i (20), uzyskujemy

$$x_{n+2} = (\Delta C_{1,n} q_1^{n+2} + \Delta C_{2,n} q_2^{n+2}) + (C_{1,n} q_1^{n+2} + C_{2,n} q_2^{n+2}). \tag{21}$$

Wstawiając (18) i (21) do równania (15), uzyskujemy

$$\Delta C_{1,n} q_1^{n+2} + \Delta C_{2,n} q_2^{n+2} = f(n). \tag{22}$$

Uwzględniając warunki (17) i (22), otrzymujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} q_1^{n+2} & q_2^{n+2} \\ q_1^{n+1} & q_2^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_{1,n} \\ \Delta C_{2,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(n) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Stąd $\Delta C_{1,n} = \frac{f(n)}{q_1^{n+1}(q_1-q_2)}$ i $\Delta C_{2,n} = \frac{f(n)}{q_2^{n+1}(q_2-q_1)}$.

Ostateczna postać uzmiennionych stałych w szukanej SORN w (16) jest następująca:

$$C_{1,n} = C_1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(i)}{q_1^{i+1}(q_1-q_2)} \text{ i } C_{2,n} = C_2 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(i)}{q_2^{i+1}(q_2-q_1)}.$$

Dla równania rzędu k analogiczny do (23) układ równań ma postać:

$$\begin{bmatrix} q_1^{n+k} & \dots & q_k^{n+k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{n+2} & \dots & q_k^{n+2} \\ q_1^{n+1} & \dots & q_k^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_{1,n} \\ \Delta C_{2,n} \\ \vdots \\ \Delta C_{k,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(n) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Rozwiązanie (24) pozwala na znalezienie szukanych przyrostów uzmiennionych stałych, a przez to prowadzi ostatecznie do wyznaczenie SORN równania dowolnie wysokiego rzędu k.

5. Podsumowanie

Prezentowane w opracowaniu mało znane metody pozwalają efektywnie rozwiązywać pewne różnicowe równania liniowe niejednorodne o stałych współczynnikach. Nie wykorzystują one pojęcia transformaty (przez co są pod tym względem prostsze — nie wymagają dodatkowego aparatu matematycznego). Przedstawione metody przewidywań (nieoznaczonych współczynników) i uzmienniania stałych zostały częściowo omówione w pozycji [2] i są pewnymi analogami do swoich odpowiedników w zakresie rozwiązywania równań różniczkowych.

Autor tego opracowania wyraża nadzieję, że przedstawione metody w pewnym zakresie (w części dotyczącej metody uzmienniania stałych) stanowią wkład do metod rozwiązywania równań różnicowych i mogą ułatwić proces ich rozwiązywania.

Literatura

1. D.R. Augustyn, H. Josiński, M. Skowronek, E. Starzewska-Karwan, R. Tutajewicz, Ł. Wyciślik, M. Wyciślik, *Modelowanie cyfrowe. Zadania*, praca zbiorowa pod red. M. Skowronka, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2016.
2. H. Levy, F. Lessman, *Równania różnicowe skończone*, PWN, Warszawa 1966.
3. M. Skowronek, *Modelowanie cyfrowe*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.
4. G.I. Zaporożec, *Metody rozwiązywania zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa 1970.