Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

# Rozwój podejścia dotyczącego opracowania danych pomiarowych w międzynarodowych dokumentach metrologicznych

**Paweł Fotowicz**

Główny Urząd Miar

**Streszczenie:** Przedstawiono podejście w dziedzinie opracowania danych pomiarach dla modeli wielowymiarowych. Podstawową metodą obliczeniową jest propagacja niepewności oparta na rachunku macierzowym. Alternatywnym sposobem obliczeniowym jest zastosowanie numerycznej metody Monte Carlo. Wynikiem obliczeń jest wyznaczenie obszaru rozszerzenia w postaci hiper-elipsy lub hiper-prostokąta.

**Słowa kluczowe:** niepewność pomiaru, model pomiaru

**DOI**: 10.14313/PAR_208/76

## 1. Wprowadzenie

Współczesne podejście w dziedzinie opracowania danych pomiarowych kształtuje pakiet dokumentów [1–3] wydanych pod egidą BIPM (Międzynarodowe Biuro Miar) przez JCGM (Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii). Ostatnim z nich jest Suplement 2 do Przewodnika [4], dotyczącego wyrażania niepewności pomiaru. Przedstawia wielowymiarowy model pomiaru, bazujący na rachunku macierzowym i numerycznej metodzie Monte Carlo. Rozszerza zastosowanie dokumentu [1], gdy wielkość wyjściowa zdefiniowana jest wieloma funkcjami pomiaru i nazywana menzurandem wektorowym.

## 2. Zasady postępowania

Zasady postępowania dzielą się na trzy etapy: opis wielkości, obliczenia i zapis wyniku. Opis wielkości dotyczy:

1) definicji wielkości wyjściowej $\boldsymbol{Y}$ jako menzurandu wektorowego,
2) określenia wielkości wejściowej $\boldsymbol{X}$, od której zależy wielkość wyjściowa $\boldsymbol{Y}$,
3) zbudowania modelu pomiaru lub funkcji pomiaru $\boldsymbol{f}$ określającej relacje między $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$,
4) przyjęcia rozkładów prawdopodobieństwa (na ogół normalnych lub prostokątnych) dla składowych wielkości wejściowej $\boldsymbol{X}$, a dla skorelowanych par składowych $\boldsymbol{X}$ wspólnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

Obliczenia polegają na realizacji zasady propagacji rozkładów składowych wielkości wejściowej $\boldsymbol{X}$ poprzez model pomiaru w celu otrzymania wspólnego rozkładu dla wielkości wyjściowej $\boldsymbol{Y}$. Natomiast zapis wyniku polega na przedstawieniu:

1) wartości oczekiwanej $\boldsymbol{Y}$ jako estymaty $\boldsymbol{y}$ wielkości wyjściowej,
2) macierzy kowariancji $\boldsymbol{U_y}$ wielkości $\boldsymbol{Y}$,
3) obszaru rozszerzenia dla wielkości wyjściowej $\boldsymbol{Y}$ przy określonym prawdopodobieństwie.

## 3. Propagacja niepewności

Propagacja niepewności jest uogólnieniem prawa propagacji niepewności [4] stosowanego w dziedzinie jednowymiarowych modeli pomiaru. Opiera się na rachunku macierzowym.

Propagacja niepewności dla jawnych wielowymiarowych modeli pomiaru polega na określeniu relacji pomiędzy wielkością wyjściową $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)^{\mathrm{T}}$ a wielkością wejściową $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_N)^{\mathrm{T}}$ w postaci $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$, gdzie $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)^{\mathrm{T}}$ oznacza wielowymiarową funkcję pomiaru. Dla estymaty $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)^{\mathrm{T}}$ wielkości wejściowej $\boldsymbol{X}$ estymata wielkości wyjściowej $\boldsymbol{Y}$ dana jest zależnością $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Macierz kowariancji, związana z estymatą $\boldsymbol{y}$, ma postać

$$\boldsymbol{U_y} = \begin{bmatrix} u^2(y_1) & \ldots & u(y_1, y_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(y_m, y_1) & \ldots & u^2(y_m) \end{bmatrix} \tag{1}$$

i jest obliczana na podstawie równania

$$\boldsymbol{U_y} \quad \boldsymbol{C_x U_x C_x^T} \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{U_x}$ to macierz kowariancji związaną z estymatą $\boldsymbol{x}$ zawierającą kowariancje $u(x_i, x_j)$ wielkości $x_i$, $x_j$, a $\boldsymbol{C_x}$ jest macierzą wrażliwości, dana zależnością

$$\boldsymbol{C_x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_N} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Propagacja niepewności dla niejawnych wielowymiarowych modeli pomiaru polega na określeniu relacji pomiędzy wielkością wyjściową $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)^{\mathrm{T}}$, a wielkością wejściową $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_N)^{\mathrm{T}}$ w postaci $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) = 0$, gdzie $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_m)^{\mathrm{T}}$. Estymata $\boldsymbol{x}$ wielkości $\boldsymbol{X}$ i estymata $\boldsymbol{y}$ wielkości $\boldsymbol{Y}$ spełnia równanie $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$. Macierz kowariancji o wymiarze $m \times m$, związana z estymatą $\boldsymbol{y}$, jest obliczana z równania

$$\boldsymbol{C_y U_y C_y^T} \quad \boldsymbol{C_x U_x C_x^T} \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{C}_y$ jest macierzą wrażliwości o wymiarze $m \times m$ zawierającą pochodne cząstkowe $\partial h_l / \partial Y_j$, a $\boldsymbol{C}_x$ jest macierzą wrażliwości o wymiarze $m \times N$ zawierającą pochodne cząstkowe $\partial h_l / \partial X_i$. Wszystkie pochodne będą obliczane dla $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$.

## 4. Obszar rozszerzenia

Miarą niepewności są obszary rozszerzenia:

a) hiper-elipsa lub elipsa wielowymiarowa o liczbie wymiarów $m$,
b) hiper-prostokąt lub prostokąt wielowymiarowy o liczbie wymiarów $m$, centrowany estymatą $\boldsymbol{y}$ z bokami równymi długości oddzielnie określanych przedziałów rozszerzenia dla wymiarów $Y_j$.

Istnieje wiele dowolnych obszarów rozszerzenia dla $\boldsymbol{Y}$ o określonym prawdopodobieństwie. Każdy z nich oparty jest na dystrybuancie $\boldsymbol{G}$, czyli zbiorze $M$ punktów losowanych z rozkładu dla wielkości $\boldsymbol{Y}$, które mogą być otrzymane przy zastosowaniu metody Monte Carlo:

a) hiper-elipsoidalny, który będzie najmniejszym obszarem rozszerzenia dla $\boldsymbol{Y}$, gdy dobrym przybliżeniem $\boldsymbol{Y}$ jest rozkład normalny,
b) hiper-prostokątny, który jest najprostszą interpretacją tego obszaru, ale zbyt pesymistyczny,
c) najmniejszy obszar rozszerzenia, który ogólnie nie ma szczególnej geometrycznej definicji i jest otrzymywany jako stopień przybliżenia zależny od $M$.

Postępowanie przy wyznaczaniu najmniejszego obszaru rozszerzenia polega na:

a) zbudowaniu hiper-prostokątnego obszaru w przestrzeni wielkości wyjściowej,
b) podzieleniu tego obszaru na sieć najmniejszych prostokątów,
c) przypisaniu każdej wartości wielkości wyjściowej do tych najmniejszych prostokątów,
d) użyciu części wartości wielkości wyjściowych przypisanych do każdego prostokąta jako przybliżenia prawdopodobieństwa, że $\boldsymbol{Y}$ należy do tego prostokąta,
e) wylistowaniu prostokątów w porządku malejącego prawdopodobieństwa,
f) utworzeniu skumulowanej sumy prawdopodobieństw dla tych wylistowanych prostokątów, gdy suma ich nie jest mniejsza od prawdopodobieństwa $p$,
g) przyjęciu zbioru odpowiednich prostokątów do zdefiniowania najmniejszego obszaru rozszerzenia.

## 5. Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo może być realizowana podobnie, jak w przypadku wielkości jednowymiarowych [1], przez:

a) wybór liczby próbkowań $M$,
b) wygenerowanie $M$ wektorów poprzez losowanie z funkcji gęstości prawdopodobieństwa przypisanych wielkościom wejściowym $X_i$,
c) dla każdego takiego wektora utworzenie odpowiadającego mu wartości $\boldsymbol{Y}$, uzyskując $M$ wartości wektorowej wielkości wyjściowej,
d) przyjęcie reprezentacji dystrybuanty $\boldsymbol{G}$ jako zbioru $M$ wartości wektorowych $\boldsymbol{Y}$,
e) użycie $\boldsymbol{G}$ do utworzenia estymaty $\boldsymbol{y}$ wielkości $\boldsymbol{Y}$ i macierzy kowariancji $\boldsymbol{U}_y$ związanej z $\boldsymbol{y}$,
f) użycie $\boldsymbol{G}$ do utworzenia odpowiedniego obszaru rozszerzenia dla $\boldsymbol{Y}$ z określonym prawdopodobieństwem.

## 6. Podsumowanie

Przedstawione rozwiązania wyznaczają nowy standard postępowania przy opracowaniu danych pomiarowych dla wielowymiarowych modeli pomiaru. Są twórczym i logicznym rozwinięciem podejścia, opracowanego dla jednowymiarowych (klasycznych) modeli pomiaru, omówionego już w międzynarodowych dokumentach metrologicznych.

### Bibliografia


1. *Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement – Propagation of distributions using a Monte Carlo method.* JCGM 101:2008.
2. *An introduction to the Guide and related documents.* JCGM 104:2009.
3. *Supplement 2 to the Guide – Extension to any number of output quantities.* JCGM 102:2011.
4. *Guide to the expression of uncertainty in measurement.* JCGM 100:2008.


### Development of the approach to evaluation of measurement data in international metrology documents


**Abstract:** The approach considering the evaluation of measurement data for multivariate measurement model is presented. The basis method is a propagation of uncertainty basis on a matrix calculus. The alternative calculation manner is the use of a Monte Carlo method. The result of calculation is a coverage region presented in the form of hyper-ellipsoidal or hyper-rectangular.



**Keywords:** measurement uncertainty, measurement model

Artykuł recenzowany, nadesłany 21.11.2014 r., przyjęty do druku 05.03.2014 r.



**dr inż. Paweł Fotowicz**

Absolwent Politechniki Warszawskiej. Studia ukończył na Wydziale Mechaniki Precyzyjnej w 1981 roku. Do 1999 roku pracował w Instytucie Metrologii i Systemów Pomiarowych PW, specjalizując się w problematyce laserowych technik pomiarowych, będąc współautorem sześciu patentów. Od 1999 roku pracuje w Głównym Urzędzie Miar, zajmując się zagadnieniami teoretycznymi metrologii, głównie teorią niepewności pomiaru. Jest autorem ponad stu publikacji – referatów i artykułów w czasopismach krajowych i zagranicznych.

*e-mail: uncert@gum.gov.pl*