MINUT 2021 (3), s. 255–257
ISSN 2719-3063

Piotr GAWRON[1]

[1]Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Uwagi o ewolucji pojęcia ciągłości

Streszczenie. Pojęcie funkcji ciągłej a ogólniej ciągłości leży u podstaw analizy matematycznej. W tym artykule przestawimy krótko kilka uwag natury historycznej o ewolucji definicji ciągłości funkcji. Czytelników bardziej zainteresowanych tym zagadnieniem zachęcamy do zapoznania się z załączoną literaturą a w szczególności pozycjami [2], [4], [7], [12] mimo, że nie we wszystkich pracach autorzy mają podobne poglądy.

Słowa kluczowe: funkcje ciągłe, ciągłość

1. Wstęp

Pojęcia granicy i ciągłości funkcji są podstawowymi narzędziami analizy matematycznej, służącymi do badania funkcji. W artykule będziemy rozpatrywali tylko funkcje rzeczywiste jednej zmiennej tj. funkcje $f\colon D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$. Student pierwszego roku matematyki poznaje dwie definicje ciągłości Cauchy'ego — nazywaną otoczeniową lub inaczej ze względu na powszechnie używane oznaczenia ε, δ oraz definicję Heinego — tzw. ciągową. Są one sobie równoważne przy założeniu pewnej słabej wersji aksjomatu wyboru.

Idee prowadzące do pojęcia granicy i ciągłości były znane już w starożytności, z tamtej epoki zachowały się prace Arystotelesa [1], [9] w których używał pojęcia nieskończenie małej zmiany i analizował skutki jej przetwarzania. Metoda nieskończenie małych legła u podstaw rozwoju matematyki w XVII i XVIII stuleciu, gdzie chociaż formalnie niewypowiedziana była używana intuicyjnie przez Fermata, Newtona, Bernoulliego i innych, będąc narzędziem do stworzenia rachunku różniczkowego i całkowego. D'Alembert widział jednak brak ścisłości w tych rozumowaniach i przy pracach nad *Encyklopedią* [10] postulował o bardziej rygorystyczne podejście do podstaw mechaniki [3], [7], a co się z tym wiąże matematyki. Formalne definicje ciągłości były dane dopiero w XIX wieku, gdy popularne stało się pojęcie funkcji, jej dziedziny i powiązanie zapisu symbolicznego funkcji z jej wykresem. W pracy nie omawiany oddzielnie pojęcia granicy funkcji ale czytelnik bez wątpienia dostrzeże miejsca gdzie definicja ciągłości jest powiązana z faktem, że funkcja jest ciągła w danym punkcie gdy jej wartość i granica w tym punkcie są sobie równe.

Autor korespondencyjny: P. Gawron (pgawron@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 30.10.2021.

2. Definicje ciągłości

Najłatwiejsza do zrozumienia jest definicja intuicyjna.

Definicja 1 (Intuicyjna, niepoprawna). *Funkcja jest ciągła, gdy jej wykres można narysować bez odrywania ołówka od papieru.*

Niestety taka definicja mimo, że obrazowa nie jest użyteczna, a tak naprawdę jest niezgodna z właściwą ideą matematyczną opisaną przez późniejsze definicje formalne.

W 1817 roku B. Bolzano w pracy *Rein analytischer Beweis* sformułował definicję będącą prekursorem współczesnej definicji otoczeniowej.

Definicja 2 (Bolzano). *Funkcja f jest ciągła dla wszystkich wartości x z pewnego przedziału, gdy dla dowolnego x możemy uczynić różnicę $f(x+\omega)-f(x)$ dowolnie małą, dobierając odpowiednio małą wartość ω.*

Dosłowne cytowanie tej oraz następnej definicji znajduje się w [2], 3.2. Obie definicje sformułowaliśmy współczesnym językiem. Definicja Bolzano nie została powszechnie przyjętą, co wiązało sie z ograniczonym zasięgiem jego pracy.

W 1821 roku A. Cauchy w podręczniku *Cours d'Analyse* przedstawia dwie definicje ciągłości, pierwszą zbliżoną do definicji Bolzano (podobną już sformułował w swoich notatkach w 1817 roku, choć współcześnie jest posądzany o plagiat z notatek Bolzano) i drugą, która używała języka nieskończenie małych i w pewnym sensie precyzowała intuicje poprzedników.

Definicja 3 (Cauchy'ego, wersja z nieskończenie małymi). *Funkcja f jest ciągła dla wszystkich wartości w pewnym przedziale, gdy w dowolnym punkcie nieskończenie mała zmiana argumentu powoduje nieskończenie małą zmianę wartości funkcji.*

Powyższa definicja używa niedookreślonego pojęcia nieskończenie małej, ale przez kilkadziesiąt lat była użytecznym narzędziem matematyków, a znacznie dłużej fizyków i inżynierów. Wiązało się to z ogromną popularnością podręcznika *Cours d'Analyse*, w którym Cauchy zawarł w sposób usystematyzowany prawie całość ówczesnej wiedzy z przedmiotu.

W latach 50' XIX wieku K. Weierstrass pracował na Uniwersytecie Berlińskim i tam w czasie wykładów wprowadził notację ε, δ jednocześnie precyzyjnie definiując ciągłość, bez odwołań do nieskończenie małych. Nie opublikował on swoich notatek, ale w 1861 jego student H. A. Schwarz zapisał starannie cykl jego wykładów. Zapiski Schwarza zostały odnalezione 1972 r. [12] i opublikowane przez P. Dugaca [5].

Definicja 4 (Weierstrassa, współczesna notacja, w literaturze zwyczajowo nazywana definicją Cauchy'ego). *Funkcja f jest ciągła w przedziale (a,b), gdy*

$$\bigwedge_{x_0\in(a,b)}\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0}\bigwedge_{x\in(a,b)} |x_0-x|<\delta \implies |f(x_0)-f(x)|<\varepsilon.$$

Zgoła inne podejście do granicy funkcji i zarazem jej ciągłości zaprezentował H. E. Heine w 1872 roku w pracy [8] w której odmienne sformułowanie definicji granicy było tylko uzupełnieniem innych badań. Nowa definicja mimo, że sformułowana w języku ciągów i ich zbieżności jest równoważna definicji

Weierstrassa (przy założeniu pewnej słabej wersji aksjomatu wyboru). W wielu wypadkach posłużenie się definicją Heinego znacząco upraszcza rozumowanie.

Definicja 5 (Heinego). *Funkcja f jest ciągła w przedziale (a,b), gdy dla dowolnego punktu x tego przedziału mamy: dla dowolnego ciągu x_n zbieżnego do x, ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x)$.*

Współczesny matematyk w swojej pracy może swobodnie wybierać między obiema definicjami, nie obawiając się o brak precyzji w swojej pracy.

Nasuwa się jednak pytanie a co z nieskończenie małymi? Czy jest to już tylko historia? W roku 1966 A. Robinson w [11] przedstawił teorię analizy niestandardowej na zbiorze liczb hiperrzeczywistych, zawierającym realnie nieskończenie małe i nieskończenie wielkie w sensie podobnym jak u klasyków matematyki, jednak starannie skonstruowane w oparciu o teorię mnogości. Analiza niestandardowa nie znalazła się jednak w głównym nurcie badań matematycznych.

Powstała na początku XX wieku topologia ogólna uogólniła wiele pojęć analizy klasycznej często zaskakując precyzyjnymi i lapidarnymi definicjami i twierdzeniami. Podstawowym pojęciem topologii jest pojęcie zbioru otwartego ([6]) (znane oczywiście także z badania podzbiorów na prostej $\mathbb{R}$) i w tych terminach można podać sformułowaną przez Hausdorffa najbardziej uniwersalną definicję ciągłości funkcji.

Definicja 6 (Topologiczna). *Funkcja $f\colon X \to Y$ gdzie X, Y są przestrzeniami topologicznymi jest ciągła, gdy przeciwobraz każdego zbioru otwartego w Y jest podzbiorem otwartym w X.*

Literatura

1. Arystoteles, *Zachęta do filozofii. Fizyka,* PWN, Warszawa 2010.
2. J. Bair, P. Błaszczyk, E. F. Guillén, P. Heinig, V. Kanovei, M. G. Katz, *Continuity between Cauchy and Bolzano: issues of antecedents and priority,* British Journal for the History of Mathematics 35 (3) (2020), p. 207-224.
3. Biografia D'Alemberta, `https://prabook.com/web/jean-baptiste.d_alembert/3753560` [widziane: wrzesień 2021]
4. A. Borovik, M. Katz, *Who Gave You the Cauchy–Weierstrass Tale? The Dual History of Rigorous Calculus,* Foundations of Science (arXiv), 17 (3), 2011.
5. P. Dugac, *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass,* Arch. Hist. Exact Sci. 10 (1973), 41–174.
6. R. Engelking, *Topologia ogólna,* PWN, Warszawa 2012.
7. W. Felscher, *Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta,* The American Mathematical Monthly, 107 (9) (2000), 844–862.
8. H. E. Heine, *Die Elemente der Functionenlehre,* J. reine angew. Math. 74, 172-188, 1872.
9. M., Lubański, *Arystotelesowskie i bolzanowskie pojęcie nieskończoności,* Roczniki Filozoficzne 19 (3) (1971), 77–90.
10. Praca zbiorowa pod red. J. Le Rond d'Alemberta i D. Diderota, *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers,* Wyd. A. Le Breton i inn., Paris (lata 1751–1772).
11. A. Robinson, *Non–standard analysis,* Princeton University Press, 1996.
12. G. Sinkiewicz, *On History of Epsilontics*, Antiquitates Mathematicae, 10 (2016), 183-204.