

Skalowanie czujnika tensometrycznego za pomocą funkcji nieliniowej z wymuszeniem w wybranym punkcie jego charakterystyki

RYSZARD FILIPOWSKI, ANNA ARASIMOWICZ, ZBIGNIEW LECHNIAK, JÓZEF ZAWORA *

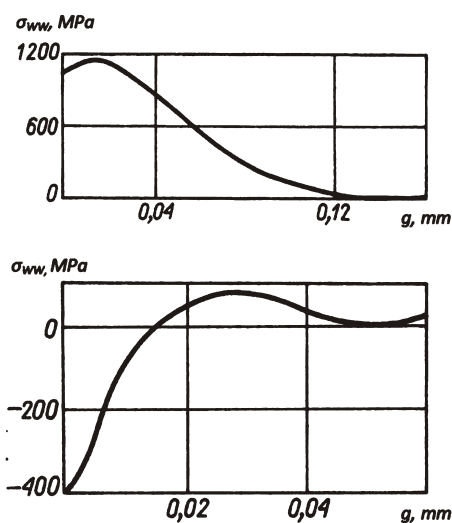
Do oceny jakości obróbki zrealizowanej w procesach wytwórczych niezbędne są pomiary wielkości, które mogą stanowić kryteria oceny. Dokładność tych pomiarów zależy, m.in. od dokładności skalowania. W artykule przedstawiono nową, oryginalną procedurę skalowania czujnika tensometrycznego umożliwiającą precyzyjne określenie wartości naprężeń jakie zostają w warstwie wierzchniej po obróbce. Przeprowadzona weryfikacja doświadczalna wykazała poprawność procedury oraz pełną jej przydatność w badaniach technologicznych.

Wprowadzenie

Dokładność wszelkiego rodzaju przyrządów pomiarowych zależy, m.in. od rodzaju zastosowanego czujnika, a także od dokładności jego wyskalowania. Dotyczy to pomiarów pośrednich, tzn. takich w których mierzona jest wartość innej wielkości i następnie – na podstawie znajomości jej relacji z wielkością poszukiwaną, wyznacza się wartość tej ostatniej.

Obróbka skrawaniem realizowana jest w celu nadania obrabianemu elementowi przede wszystkim cech geometrycznych, zarówno w skali makro (kształt opisany układem wymiarów) jak i mikro (struktura geometryczna powierzchni). Z tego powodu metrologia warsztatowa zajmuje się pomiarami wielkości dotyczących tych cech. Ze względu na cechy użytkowe istotna jest także znajomość innych wielkości, np. naprężeń jakie po obróbce występują w warstwie wierzchniej (WW). Ich znak (rozciągające lub ściskające) i wartość zależy od licznych czynników, m.in. od rodzaju obróbki, jej parametrów i warunków, a także rodzaju narzędzia. Ta ostatnia zależność widoczna jest na rys. 1, na którym pokazano jak zmieniają się naprężenia w WW w zależności od materiału ściernego, z którego wykonana jest ściernica.

Przy takich samych parametrach obróbki inne są zarówno wartości naprężeń w WW jak również obraz ich zmian w głąb warstwy. Stan naprężeń w WW elementu determinuje odporność na zużywanie tribologiczne, dlatego też kształtując w procesie wytwarzania cechy warstwy wierzchniej należy dążyć do tego, aby występowały w niej naprężenia ściskające. Przykładową zależność wytrzymałości zmęczeniowej od naprężeń w WW przedstawiono na rys. 2.

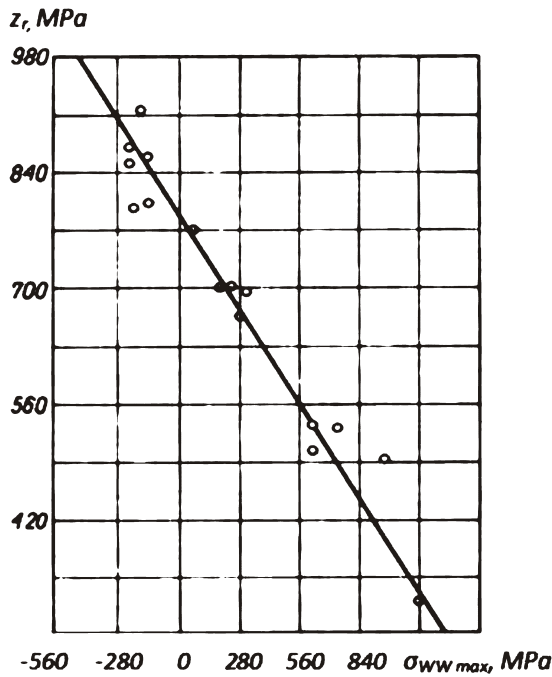


Rys. 1. Wpływ rodzaju narzędzia ściernego na naprężenia własne w warstwie wierzchniej σ_{ww} : a) ściernica elektrokorundowa, b) ściernica z regularnego azotku boru [2]

Jak z wykresu na rys. 2 wynika, zmiana znaku naprężeń σ_{wwmax} o wartości 560 MPa wywołuje zmianę (zwiększenie lub zmniejszenie) wytrzymałości zmęczeniowej o ok. 30% w stosunku do zerowej wartości tych naprężeń. Oprócz zwiększenia wytrzymałości zmęczeniowej, naprężenia ściskające powodują także zwiększenie twardości, a także odporności na korozję [2].

Istotność tego parametru warstwy wierzchniej stanowiła powód, aby zająć się pomiarem naprężeń, a ściślej dokład-

* Dr inż. A. Arasimowicz, ERGO POS Kraków, dr inż. R. Filipowski, rfilipowski@meil.pw.edu.pl, dr inż. Z. Lechniak, dr hab. inż. J. Zawora, Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Produkcji, Instytut Techniki Wytwarzania, Warszawa.



Rys. 2. Wpływ naprężeń własnych σ_{wvmax} w warstwie wierzchniej na wytrzymałość zmęczeniową Z_r [3]

nością jego pomiaru. Dokładność pomiaru postanowiono zwiększyć poprzez opracowanie nowej, oryginalnej procedury skalowania [1,8].

Podstawy matematyczne programu funkcji regresji z uwarunkowaniem w wybranym punkcie skalowania

Do wyznaczenia charakterystyki czujnika wykorzystano program REG6WIL, który tworzy funkcje regresji od stopnia 1-go do stopnia 5-go przechodzące przez uwarunkowany punkt skalowania. Uwarunkowanie polega na określeniu punktu skalowania, oznaczonego indeksem i , przez który ma przebiegać przyjęta funkcja skalowania siłomierza.

Zastosowano metodę mnożników Lagrange'a [5, 6] do wyznaczenia ekstremum warunkowego funkcji regresji w wybranym punkcie skalowania siłomierza. Dla uproszczenia rozważań przyjęto, funkcję regresji 1-go stopnia z uwarunkowaniem w punkcie skalowania o indeksie k o postaci:

$$F(p_1, p_2, p_3) = \left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (p_1 + p_2 \cdot x_i - y_i)^2 + p_3 \cdot (p_1 + p_2 \cdot x_k - y_k) = \min \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gdzie:

p_1, p_2 – nieznanne współczynniki funkcji regresji,

p_3 – nieznanany współczynnik Lagrange'a,

(x_i, y_i) – wartości współrzędnych w punktach skalowania,

(x_k, y_k) – wartości współrzędnych uwarunkowanego punktu skalowania o indeksie k .

Korzystając z warunku koniecznego istnienia ekstremum dla funkcji Lagrange'a (1), tj. zerowanie się pochodnych

cząstkowych względem zmiennych p_1, p_2, p_3 w funkcji (1), otrzymano:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p_1} &= \sum_{i=1}^n (p_1 + p_2 \cdot x_i - y_i) \cdot 1 + p_3 \cdot 1 = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p_2} &= \sum_{i=1}^n (p_1 + p_2 \cdot x_i - y_i) \cdot x_i + p_3 \cdot x_k = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p_3} &= \sum_{i=1}^n (p_1 + p_2 \cdot x_i - y_i) \cdot 0 + 1 \cdot (p_1 + p_2 \cdot x_k - y_k) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Analogicznie, w programie REG6WIL zostały utworzone funkcje Lagrange'a dla wielomianów regresji wyższych stopni.

Po rozpisaniu, układ równań (2) dla funkcji liniowej Lagrange'a przyjmuje postać:

$$\left. \begin{aligned} p_1 \cdot n + p_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + p_3 &= \sum_{i=1}^n y_i \\ p_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + p_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + p_3 \cdot x_k &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ p_1 + p_2 \cdot x_k + 0 &= y_k \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Układ równań (3) zawiera trzy niewiadome parametry (p_1, p_2, p_3), oraz współrzędne punktu skalowania (x_k, y_k).

Rozwiązanie zadania wykonuje się w dwu etapach. W pierwszym rozwiązywany jest układ równań normalnych z niewiadomymi parametrami p_1, p_2 . W tym celu, wprowadzono macierze zawierające układ równań normalnych:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- X – macierz wejść obiektu (n wierszowa, 2 kolumnowa);
- X^T – macierz wejść obiektu transponowana (2 wierszowa, n kolumnowa);
- Y – macierz wyjść obiektu (n wierszowa, 1 kolumnowa);
- P – macierz współczynników regresji (2 wierszowa, 1 kolumnowa).

Przy wprowadzonych oznaczeniach macierzowych układ równań normalnych (bez warunku Lagrange'a) można zapisać w postaci:

$$(X^T \cdot X) \cdot P = (X^T \cdot Y) \quad (5)$$

Iloczyn macierzowe $(X^T \cdot X)$, $(X^T \cdot Y)$ układu równań normalnych przyjmują postać:

$$(X^T \cdot X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}, (X^T \cdot Y) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

W drugim etapie tworzony jest układ równań Lagrange'a (3) w zapisie macierzowym, który umożliwia obliczenie współrzędnych punktu skalowania (X_k, Y_k).

W tym celu wystarczy nieznacznie zmodyfikować zapisy macierzy układu równań normalnych $(X^T \cdot X)$, $(X^T \cdot Y)$ oraz wektora współczynników regresji P . Dla odróżnienia, macierze modyfikowane w równaniu Lagrange'a oznaczono indeksem L , mianowicie $(X^T \cdot X)_L$, $(X^T \cdot Y)_L$, P_L . Te modyfikowane macierze przyjmują postać:

$$(X^T \cdot Y)_L = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & x_k \\ 1 & x_k & 0 \end{bmatrix}, (X^T \cdot Y)_L = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ y_k \end{bmatrix}, P_L = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Przy takich wprowadzonych macierzach, układ równań Lagrange'a (3) można zapisać równaniem macierzowym macierzy modyfikowanych:

$$(X^T \cdot X)_L \cdot P_L = (X^T \cdot Y)_L \quad (8)$$

Nieznany wektor współczynników regresji P_L będący rozwiązaniem układu równań Lagrange'a otrzymuje się przez lewostronne mnożenie macierzowe równania macierzowego (8) przez macierz odwrotną $(X^T \cdot X)_L^{-1}$. Rozwiązanie przyjmuje postać:

$$P_L = (X^T \cdot X)_L^{-1} \cdot (X^T \cdot Y)_L \quad (9)$$

Do wykonania operacji macierzowych: tj. transpozycji, odwracania i mnożenia macierzy posłużono się standardowymi podprogramami IBM [6]. Są to podprogramy: GMTRA (transpozycja macierzy), GMPRD (mnożenie macierzy), MINV (odwracanie macierzy). Plik wykonawczy REG6WIL.EXE uzyskano za pomocą programu DIGITAL Visual Fortran Version 6.0, w systemie operacyjnym Windows XP.

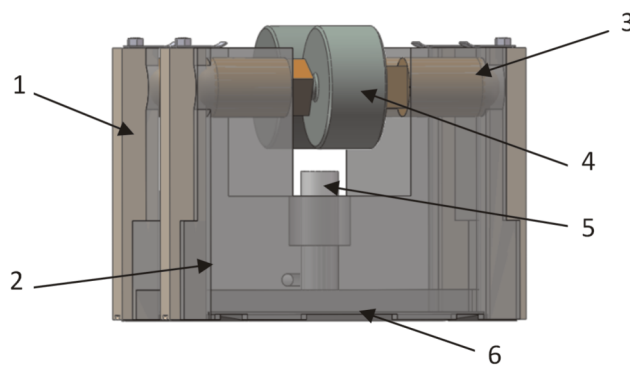
Parametry wiarygodności funkcji skalowania siłomierza z wymuszeniem w wybranym punkcie jego skali

Do oceny istotności funkcji skalowania czujnika, za pomocą programu REG6WIL oblicza się współczynnik korelacji wielowymiarowej R^2 . Istotność współczynnika korelacji wielowymiarowej R^2 określa się testem F Snedecora opartym na analizie wariancji w równaniu regresji.

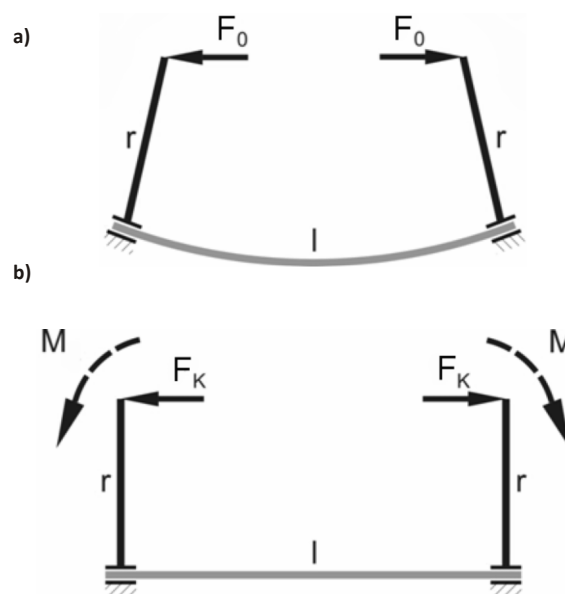
W praktyce, spośród wybranych k członów funkcji regresji, najmniej istotne usuwa się wykorzystując test t Studenta. Do oceny istotności współczynników funkcji regresji oznaczonych przez p_i , za pomocą programu REG6WIL dla każdego współczynnika obliczano wartość testu t_i Studenta. Ostateczną decyzję odnośnie poprawności funkcji regresji podejmuje się na podstawie analizy reszt będących różnicą między wartościami funkcji regresji, a uzyskanymi podczas skalowania czujnika.

Skalowanie czujnika i wyniki przykładowych obliczeń programu REG6WIL

Do skalowania czujnika tensometrycznego firmy FUTEK, model LCM300 użyto dynamometru wzorcowego o zakresie pomiarowym 0 ÷ 600 N (R.S.Z. i Z. MECHANIKÓW Poznań)



Rys. 3. Uchwyt do pomiaru sił ściskających i rozciągających w warstwie wierzchniej [8]: 1 – dźwignia, 2 – uchwyt do mocowania próbek, 3 – końcówki rozporowe, 4 – siłomierz Futek, 5 – czujnik pomiaru ubytku grubości płytki Tr8, 6 – badane próbki



Rys. 4. Odształcenie próbek jako rezultat oddziaływania wymuszeń siłowych

oraz multimetru do pomiaru napięcia prądu stałego DCV o zakresie 200 μV ÷ 1000 V. W celu weryfikacji rezultatów działań, wyskalowany siłomierz montowano w specjalnym uchwycie i mierzono zmiany naprężeń rozciągających i ściskających w warstwie wierzchniej próbek po różnych obróbkach. Czujnik oraz próbka z wprowadzonym stanem naprężeń w warstwie wierzchniej mocowano w uchwycie specjalnym przedstawionym na rys. 3.

W badaniach weryfikujących użyto próbek z materiału Almen (AMS-2432) o nominalnych wymiarach gabarytowych 19 × 1,3 × 76 mm ($b \cdot h \cdot l$), o twardości 45 ÷ 48 HRC.

Naprężenia w warstwie wierzchniej spowodowały odkształcenia próbki – rys. 4a. Jest ona prostowana przez przyłożenie sił F do ramion uchwytu o długości r , mierzonych czujnikami tensometrycznymi. Schemat prostowania próbki przez przyłożenie sił F przedstawiono na rys. 4b.

Uchwyt – rys. 3, z dwoma zamocowanymi próbkami był umieszczony na docierarce stołowej typ Montasupal, wyposażonej

w tarczę z żeliwa sferoidalnego. Próbkę docierano ziarnem diamentowym spojonym o wymiarze 25 μm; czas docierania: 60 minut. Uchwyt umożliwił wykonanie pomiaru zużycia próbek, za pomocą czujnika odległości Tr 8 (rys. 3). Do zbierania sygnałów z czujników zastosowano kartę pomiarową USB-6009 firmy National Instrument.

W Tabeli 1 zamieszczono ważniejsze elementy wydruku uzyskanego dla przeprowadzonego skalowania czujnika, z uwarunkowaniem w punkcie o indeksie $i = 11$, co odpowiada parametrom (0,2 V, 0,0 N), a także wyniki obliczeń wykonanych z użyciem programu.

W Tabeli 1 zamieszczono także współczynniki liniowej funkcji regresji; zestawienie wartości liczbowych skalowania (XI, YP), wartości funkcji Lagrange'a (YPROG) oraz reszty (EPY), a poniżej: kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej, wartości testu F Snedecora oraz testu t Studenta dla współczynników funkcji regresji. Liniowa funkcja regresji zgodnie z danymi z tabeli ma postać:

$$F = -4,91498 - 24,5749 V \quad (10)$$

Dla przyjętego poziomu istotności $\alpha = 0,05$, liczby stopni swobody $r_1 = 2$ oraz $r_2 = 18$, krytyczna wartość testu F [7] wynosi: $F_{kr} = 3,55$.

Ponieważ

$$F/F_{kr} = 213972,10991/3,55 \gg 1$$

zatem hipoteza o nieistotności funkcji regresji zostaje odrzucona.

Również, dla przyjętego poziomu istotności $\alpha = 0,05$ oraz $n = 18$ stopni swobody, wartość krytyczna testu wynosi: $t_{kr} = 2,101$ [9].

Ponieważ

$$t_1/t_{kr} = 41,983600/2,101 \gg 1$$

$$\text{oraz } t_2/t_{kr} = 497,734094/2,101 \gg 1$$

to hipoteza o nieistotności obydwóch członów funkcji regresji także zostaje odrzucona.

Przybliżony wykres funkcji regresji z naniesionymi punktami skalowania można uzyskać za pomocą programu REG6WIL, przy czym zaleca się wykonać go w jednym z profesjonalnych programów do sporządzania wykresów. Na rys. 5 przedstawiono taki wykres funkcji (10) wykonany w programie STATISTICA.

Program REG6WIL funkcjonuje w trybie konwersacyjnym. Po uruchomieniu programu należy wykonywać kolejne polecenia wskazywane przez program na ekranie monitora. Użytkownik podaje: nazwę pliku, w którym umieszczone są dane skalowania czujnika, nazwę pliku z wynikami obliczeń, stopień wielomianu funkcji regresji jako liczbę rzeczywistą od 1 do 5, oraz deklarację wykonania wykresu przez program. Plik z wynikami jest zapisywany w katalogu, w którym jest umieszczony program REG6WIL.EXE. Poprawnie wykonany program kończy komunikat pokazany na ekranie monitora o treści <Program zakończony poprawnie>.

Tabela 1. Wyniki obliczeń programu regresji z uwarunkowaniem w punkcie 11 o współrzędnych (0,2 N; 0,0 V)

Krzywa stopnia = 1				
Postać uzyskanej krzywej:				
y=p0+p1*x				
Skalowanie czujnika Futek ściskanie-rozciąganie				
Anna Arasimowicz, U [V], F [N]				
Funkcja regresji z wymuszeniem przez punkt (XI11,YP11)				
Współczynniki B(1),B(2) liniowej funkcji regresji Lagrange'a				
-0,491498E+01, -0,245749E+02				
Funkcja z ustalonymi współczynnikami regresji:				
F = 4,91498 - 24,5749 N				
Zestawienie wartości liczbowych dla funkcji Lagrange'a				
LP	XI	YP	YPROG	EPY
1	3.89000	-100.00000	-100.51134	0.51134
2	3.47000	-90.00000	-90.18988	0.18988
3	3.02000	-80.00000	-79.13118	-0.86882
4	2.61000	-70.00000	-69.05547	-0.94453
5	2.22000	-60.00000	-59.47126	-0.52874
6	1.82000	-50.00000	-49.64130	-0.35870
7	1.42000	-40.00000	-39.81134	-0.18866
8	1.00000	-30.00000	-29.48988	-0.51012
9	0.58000	-20.00000	-19.16842	-0.83158
10	0.19000	-10.00000	-9.58421	-0.41579
11	-0.20000	0.00000	0.00000	0.00000
12	-0.58000	10.00000	9.33846	0.66154
13	-0.98000	20.00000	19.16842	0.83158
14	-1.42000	30.00000	29.98138	0.01862
15	-1.84000	40.00000	40.30284	-0.30284
16	-2.24000	50.00000	50.13280	-0.13280
17	-2.64000	60.00000	59.96276	0.03724
18	-3.04000	70.00000	69.79272	0.20728
19	-3.45000	80.00000	79.86843	0.13157
20	-3.89000	90.00000	90.68138	-0.68138
21	-4.32000	100.00000	101.24859	-1.24859
Kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej R**2				
R**2= 0,99991				
Test F Snedecora				
F=213972,10991				
Test T Studenta dla współczynników funkcji regresji:				
41,983600,				
497,734094				



Rys. 5. Wykres funkcji regresji z uwarunkowaniem w punkcie $i = 11$ wykonany w programie STATISTICA

W przypadku wystąpienia błędów, na ekranie monitora ukaże się komunikat o przyczynie przerwania programu. W takim przypadku należy usunąć błędy i ponownie uruchomić program.

Rodzaje błędów najczęściej wykrywanych przez program:

<1> – błąd w danych: wiersz I , kolumna J : należy w pliku z danymi wprowadzić poprawki, a następnie uruchomić program ponownie;

<2> – macierz nieosobliwa – nie ma rozwiązania dla tego rodzaju danych: dane liniowo zależne;

<3> – zbyt duża liczba danych wprowadzanych do programu: liczba punktów nie może przekroczyć 100.

Podsumowanie

Program REG6WIL opracowano w języku Fortran [4]. Obliczenia przy użyciu programu parametry statystyczne: R^2 , F Snedecora, t , Studenta umożliwiają przyjęcie odpowiedniego stopnia funkcji regresji skalowania czujnika. W programie REG6WIL może być utworzony przybliżony wykres funkcji. Zaleca się jednak wykorzystywać do tego celu programy profesjonalne tworzenia dokładnego wykresu funkcji, np. STATISTICA jak na rys. 5. Plik wykonawczy REG6WIL.EXE uzyskano za pomocą programu DIGITAL Visual Fortran Version 6.0.

Dzięki opracowanej procedurze skalowania uzyskane wyniki pomiarów będą dokładniejsze, co w miernictwie wszelkich wielkości jest zawsze cechą pożądaną.

Literatura

1. Arasimowicz A.: Badania nad nową metodą pomiaru naprężeń własnych w technologicznych warstwach wierzchnich. Rozprawa doktorska. Politechnika Warszawska, Warszawa, 2012.
2. Burakowski T.: Areologia. Podstawy teoretyczne. Wydawnictwo Naukowe ITE-PIB Radom, 2013.
3. Kocańda S.: Podstawy konstrukcji maszyn. WNT Warszawa, 1983.
4. Kott R., Walczak K.: Programowanie w języku Fortran 77, WNT Warszawa, 1991.
5. Legras J.: Praktyczne metody analizy numerycznej. WNT Warszawa, 1974.
6. Leitner R.: Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych, cz. I. WNT Warszawa, 1990.
7. Mańczak K.: Technika planowania eksperymentu. WNT Warszawa, 1976.
8. Nowicki B., Arasimowicz A.: Sposób pomiaru naprężeń własnych w technologicznych warstwach wierzchnich i przyrząd do pomiaru naprężeń własnych w technologicznych warstwach wierzchnich. Patent RP 219841.
9. System/360 Scientific, Subroutine Package (360 A-CM03X), Version III, IBM Technical Publication Department, Fifth Edition 1970. ■