

## PROPAGACJA BŁĘDÓW LOSOWYCH W MULTIPLIKATYWNYCH ALGORYTMACH PRZETWARZANIA DANYCH POMIAROWYCH

Jerzy JAKUBIEC, Jerzy ROJ

Politechnika Śląska w Gliwicach, Katedra Metrologii, Elektroniki i Automatyki  
e-mail: jerzy.jakubiec @polsl.pl, jerzy. roj@polsl.pl

**Streszczenie:** W artykule opisano propagację błędów losowych w multiplikatywnych algorytmach przetwarzania, cechujących się mnożeniem danych pomiarowych przez siebie. Wyznaczono równania propagacji błędów dla dwóch algorytmów służących do obliczania wartości skutecznej i mocy elektrycznej na podstawie cyfrowych reprezentacji przebiegów. Przeprowadzono analizę propagacji błędów kwantowania i błędów spowodowanych drzeniem próbek przy użyciu równań propagacji błędów oraz metodą Monte Carlo wykorzystując niepewność wyników pomiaru do porównywania ich niedokładności.

**Słowa kluczowe:** algorytm przetwarzania danych pomiarowych, błąd pomiaru, niepewność, pomiary wartości skutecznej i mocy.

### 1. OGÓLNA STRUKTURA ALGORYTMU MULTIPLIKATYWNEGO

Algorytm jest określany jako multiplikatywny, gdy przetwarzane wyniki pomiarów występują w formie iloczynów [1]. Ogólnie tego rodzaju algorytm można przedstawić w formie macierzowej jako:

$$y = (\mathbf{A}\mathbf{X}_1)^T \mathbf{X}_2, \quad (1)$$

gdzie  $y$  jest wynikiem realizacji algorytmu,  $\mathbf{A}$  jest macierzą diagonalną  $N \times N$  zawierającą współczynniki o stałych wartościach,  $\mathbf{X}_1$  wektorem wyników pomiaru wielkości  $x_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  wektorem wyników pomiaru wielkości  $x_2$  o postaciach:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_1(2) \\ \vdots \\ x_1(N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_2(1) \\ x_2(2) \\ \vdots \\ x_2(N) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

a  $T$  jest symbolem transformacji.

Po wykonaniu operacji zgodnie z (1) i (2), otrzymuje się algorytm w postaci wyrażenia:

$$y = a_1 x_1(1) x_2(1) + a_2 x_1(2) x_2(2) + \dots + a_N x_1(N) x_2(N) \quad (3)$$

będącego podstawą analizy metrologicznych właściwości algorytmu. Dla szczególnej postaci algorytmu multiplikatywnego obydwa wektory wyników są jednakowe, a wówczas wyrażenie (3) przyjmuje postać:

$$y = a_1 x_1^2(1) + a_2 x_1^2(2) + \dots + a_N x_1^2(N). \quad (4)$$

### 2. PROPAGACJA BŁĘDÓW PRZEZ ALGORYTM

Dla celów analizy błędów przyjmuje się, że wyniki pomiarów są obarczone błędami addytywnymi, a zatem dane przetwarzane przez algorytm mogą być zapisane jako suma dwóch wektorów:

$$\tilde{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 = [e_1(1) \quad e_1(2) \quad \dots \quad e_1(N)]^T \quad (5)$$

oraz

$$\tilde{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 = [e_2(1) \quad e_2(2) \quad \dots \quad e_2(N)]^T \quad (6)$$

gdzie  $e_1(1), \dots, e_1(N), e_2(1), \dots, e_2(N)$ , są realizacjami błędów w kolejnych wynikach pomiaru odpowiednich wielkości.

Uwzględniając zależności (5) i (6), wynik realizacji algorytmu, obciążony błędami powstałymi na skutek propagacji błędów danych przez algorytm, przyjmuje postać:

$$\tilde{y} = y + e = (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}_1)^T \tilde{\mathbf{X}}_2 = [\mathbf{A}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{e}_1)]^T (\mathbf{X}_2 + \mathbf{e}_2), \quad (7)$$

po przekształceniu której uzyskuje się:

$$y + e = (\mathbf{A}\mathbf{X}_1)^T \mathbf{X}_2 + (\mathbf{A}\mathbf{X}_1)^T \mathbf{e}_2 + (\mathbf{A}\mathbf{X}_2)^T \mathbf{e}_1 + (\mathbf{A}\mathbf{e}_1)^T \mathbf{e}_2. \quad (8)$$

Po rozdzieleniu składników równania (8) otrzymuje się równanie propagacji błędów:

$$e = (\mathbf{A}\mathbf{X}_1)^T \mathbf{e}_2 + (\mathbf{A}\mathbf{X}_2)^T \mathbf{e}_1 + (\mathbf{A}\mathbf{e}_1)^T \mathbf{e}_2, \quad (9)$$

które w postaci skalarnej ma postać:

$$e = a_1 x_1(1) e_2(1) + a_1 x_2(1) e_1(1) + a_1 e_1(1) e_2(1) + \dots + a_N x_1(N) e_2(N) + a_N x_2(N) e_1(N) + a_N e_1(N) e_2(N). \quad (10)$$

### 2. ALGORYTM CYFROWEGO POMIARU WARTOŚCI SKUTECZNEJ

Pomiar wartości skutecznej realizowany jest zasadniczo dla przebiegów okresowych zgodnie z definicją:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}, \quad (11)$$

gdzie  $T$  jest okresem przebiegu. Pomiar cyfrowy polega na równomiernym próbkowaniu przebiegu, kwantowaniu próbek, po czym zgodnie z algorytmem wykonywane są działania realizujące numeryczne całkowanie kwadratu przebiegu reprezentowanego przez próbki. Kolejny algorytm służy do pierwiastkowania tak uzyskanego wyniku.

Do numerycznego całkowania używany jest algorytm uzyskiwany z wyrażenia (1) przy założeniu, że  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}$ . Otrzymuje się wyrażenie:

$$y = (\mathbf{A}\mathbf{X})^T \mathbf{X}, \quad (12)$$

które w postaci skalarnej można zapisać jako równanie (4). Biorąc pod uwagę równość wektorów danych pomiarowych, równanie błędu (10) przyjmuje wówczas postać:

$$e = 2a_1x(1)e_1(1) + a_1e_1^2(1) + \dots + 2a_Nx(N)e_1(N) + a_Ne_1^2(N). \quad (13)$$

Wartości błędu obarczające próbki są z reguły znacznie mniejsze niż wartości próbek, a wówczas wyrażenia zawierające kwadraty błędu można pominąć. W takich przypadkach zależność (13) można zapisać jako:

$$e \cong 2[a_1x(1)e_1(1) + \dots + a_Nx(N)e_1(N)]. \quad (14)$$

We wzorze (14) widoczne jest występowanie wyrażeń charakterystycznych dla algorytmów multiplikatywnych, w których realizacje błędu mnożone są przez wyniki pomiaru oraz przez współczynniki algorytmu. W przypadku algorytmu realizującego całkowanie metodą prostokątów, współczynniki algorytmu mają takie same wartości [1]:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_N = \frac{T_p}{T} = \frac{1}{N}, \quad (15)$$

gdzie  $T_p$  jest okresem próbkowania,  $T$  – okresem przebiegu, a  $N$  liczbą próbek na okres. Po uwzględnieniu wzoru (15), zależność (14) przyjmuje postać:

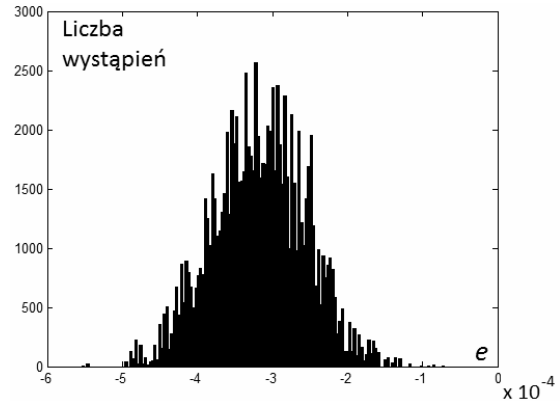
$$e = \frac{2}{N} [x(1)e_1(1) + \dots + x(N)e_1(N)] = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x(n)e_1(n). \quad (16)$$

Podstawowym błędem obarczającym próbki jest błąd kwantowania, który ma rozkład jednostajny w zakresie od  $-q/2$  do  $q/2$ . Poniższy przykład ilustruje wykorzystanie metody Monte Carlo do wyznaczania błędu kwadratu wartości skutecznej na podstawie ciągu próbek obarczonych błędem kwantowania.

**Przykład 1.** Obliczany jest kwadrat wartości skutecznej napięcia sinusoidalnego o amplitudzie 1 V próbkowanego z częstotliwością  $N = 20$  próbek na okres. Realizowany eksperyment symulacyjny ma na celu wyznaczenie błędu wyniku obliczeń przy założeniu, że do kwantowania próbek wykorzystywany jest 12-bitowy przetwornik A/C o wartości kwantu  $q = 0,5$  mV, którego zakres pomiaru wynosi od  $-1,024$  V do  $1,024$  V. Eksperyment realizowany jest w 100 000 krokach, przy czym na każdym kroku wyznaczane jest 20 wartości próbek napięcia sinusoidalnego dla równooddalonych chwil o numerach od 1 do 20, po czym próbki są kwantowane zgodnie z zależnością [1]:

$$n_q = \text{ent} \left( \frac{x}{q} + 0,5 \right), \quad (17)$$

gdzie  $\text{ent}$  jest funkcją zwracającą wartość całkowitą argumentu. Skwantowane próbki napięcia są przetwarzane zgodnie z algorytmem (12), po czym wynik jest odejmowany od prawdziwej wartości kwadratu wartości skutecznej uzyskiwanej zgodnie z definicją (11). Tak obliczona wartość błędu wprowadzana jest do zbioru zawierającego realizację błędu, który w końcowej fazie eksperymentu jest przedstawiany w postaci histogramu pokazanego na rysunku 1.



Rys. 1. Przykładowy histogram błędu wyniku obliczania kwadratu wartości skutecznej napięcia sinusoidalnego

Rozkład błędu z rysunku 1 ma składową systematyczną wynikającą z zastosowanej metody przybliżonego całkowania. Składowa ta może zostać wyeliminowana z wyniku pomiaru przez dodanie poprawki. W efekcie tego działania, błąd uzyskuje rozkład symetryczny (o zerowej wartości oczekiwanej), dla którego może być obliczana niepewność  $U$  [2] jako parametr zbioru wartości błędu przy wykorzystaniu funkcjonu [3]:

$$\int_{-U}^U g(e) de = p, \quad (18)$$

gdzie  $g(e)$  jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa błędu  $e$ ,  $p$  jest poziomem ufności i na ogół przyjmuje się  $p = 0,95$ .

Histogram stanowi statystyczny odpowiednik funkcji gęstości prawdopodobieństwa, w związku z czym może służyć do wyznaczania niepewności po odpowiednim przekształceniu wyrażenia (18) [3]. Niepewność uzyskana na podstawie histogramu z rysunku 1 wynosi  $U = 1,22 \cdot 10^{-4}$  V.

Niepewność stanowi dogodny parametr do porównywania dokładności wyników pomiaru. Jej wykorzystanie pozwala m. in. na analizę wpływu liczby próbek w okresie przebiegu na dokładność wyznaczania wartości skutecznej. Wyniki obliczeń niepewności dla zmieniającej się liczby próbek na okres zawarto w Tabeli 1.

Tabela 1. Niepewność kwadratu wartości skutecznej spowodowana błędem kwantowania zależnie od wartości liczby próbek na okres  $N$

$N$	10	20	30	40	50	60
$U \cdot 10^{-4} \text{V}$	1,72	1,22	0,96	0,81	0,74	0,70

Analiza błędu może być przeprowadzona na podstawie równania propagacji błędu (14). Z centralnego twierdzenia granicznego wynika [4], że rozkład błędu całkowitego dąży do rozkładu normalnego, gdy składana jest odpowiednio duża liczba błędów, z których żaden nie dominuje. W rozpatrywanej sytuacji wszystkie błędy we wzorze (14) mają

ten sam rozkład jednostajny, a zatem można przyjąć, że błąd wyniku ma rozkład zbliżony do normalnego o wariancji:

$$\sigma^2 = \sigma_q^2 \left( \frac{2}{N} \right)^2 \sum_{n=1}^N x(n)^2 = \frac{q^2}{3N^2} \sum_{n=1}^N \sin^2 \left( \frac{2\pi n}{N} \right), \quad (19)$$

gdzie uwzględniono, że wariancja błędu kwantowania wynosi  $\sigma_q^2/12$  oraz  $T/T_p = N$ ,  $T_p$  jest okresem próbkowania. Niepewność dla rozkładu normalnego na poziomie  $p = 0,95$  wynosi  $U \cong 2\sigma$  [2], a zatem dla  $N = 20$  uzyskuje się zgodnie z (19)  $U = 9,13 \cdot 10^{-5}$ .

Porównując obydwa zastosowane sposoby analizy błędu, tj. metodę Monte Carlo i metodę analityczną bazującą na równaniu propagacji błędu, trudno o jednoznaczną ocenę, która z tych metod jest bardziej efektywna. Metodę Monte Carlo cechuje prostota i łatwość implementacji w złożonych warunkach pomiarowych, co jest szczególnie istotne w przypadku występowania nieliniowości. W takich przypadkach wyznaczenie wyrażeń analitycznych, opisujących propagację błędu, może być trudne do realizacji.

### 3. ALGORYTM POMIARU MOCY CZYNNEJ

Moc czynna dla dwóch przebiegów napięcia i prądu elektrycznego, odpowiednio  $u(t)$  i  $i(t)$ , o tym samym okresie  $T$  definiowana jest jako:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt. \quad (20)$$

Dla potrzeb realizacji algorytmu wyznaczania mocy w postaci (1) obydwa przebiegi są próbkowane w tych samych momentach czasu rozłożonych równomiernie w okresie  $T$ , przy czym liczba próbek na okres wynosi  $N$ . Skwantowane próbki są mnożone przez siebie i w przypadku zastosowania do całkowania metody prostokątów współczynniki algorytmu mają takie same wartości równe  $1/N$ . W związku z tym równanie błędu (10) przyjmuje postać uproszczoną:

$$e \cong \frac{1}{N} [u(1)e_i(1) + i(1)e_u(1) + \dots + u(N)e_i(N) + i(N)e_u(N)]. \quad (21)$$

**Przykład 2.** W celu wyznaczenia błędu pomiaru mocy spowodowanego kwantowaniem wykonano eksperyment metodą Monte Carlo w sposób podobny do opisanego w przykładzie 1 dla  $N = 20$  próbek na okres pobieranych w tych samych momentach dla przebiegów napięcia i prądu o jednostkowej amplitudzie i przesuniętych w fazie o kąt  $\varphi$ . Próbkki były kwantowane zgodnie ze wzorem (17), mnożone przez siebie i dodawane, a na koniec mnożone przez  $1/N$ . Następnie był obliczany błąd pomiaru jako różnica między wartością mocy wyznaczoną z definicji (20) i obliczoną zgodnie z opisanym algorytmem. Dla  $\varphi = 0$  uzyskano histogram taki sam jak na rysunku 2. Wartości niepewności obliczone na podstawie histogramów dla wybranych wartości  $\varphi$  przedstawiono w Tabeli 2.

Tabela 2. Niepewność pomiaru mocy czynnej spowodowana błędem kwantowania zależnie od przesunięcia fazowego  $\varphi$  dla liczby próbek na okres  $N = 20$

$\varphi$	0	30	60	90
$U \cdot 10^{-5}$	8,40	9,15	9,75	9,40

Stosując takie same podejście, jak w przypadku poprzedniego algorytmu i zgodnie z zależnością (21), dla błędu kwantowania uzyskuje się następującą zależność opisującą wariancję błędu wyniku:

$$\sigma^2 \cong \frac{q^2}{12N^2} \sum_{n=1}^N \left[ \sin^2 \left( \frac{2\pi n}{N} \right) + \sin^2 \left( \frac{2\pi n}{N} + \varphi \right) \right], \quad (22)$$

gdzie przyjęto, że próbki zarówno napięcia, jak i prądu są kwantowane przetwornikami A/C o takiej samej wartości kwantu  $q$ .

Z analizy wyrażenia (22) wynika, że wariancja błędu całkowitego nie zależy od przesunięcia fazowego  $\varphi$  obu przebiegów (sumowane są próbki z pełnego okresu sinusoidy). Oznacza to, że dla przesunięć zbliżonych do  $\varphi = 90^\circ$ , kiedy wynik pomiaru ma małą wartość, błąd jest taki sam, jak dla  $\varphi = 0$ , gdy moc czynna jest największa. Zatem niepewność względna wyniku rośnie wraz ze wzrostem przesunięcia, mimo że warunki pomiaru nie zmieniają się. Wynika stąd wniosek, że w przypadku analizy metrologicznych właściwości algorytmów właściwą miarą niedokładności jest niepewność bezwzględna obliczana zgodnie ze wzorem (18).

### 4. PROPAGACJA BŁĘDU DRZĘCIA PRÓBEK

Proces kwantowania poprzedzony jest próbkowaniem, co polega na pobieraniu fizycznych przejawów sygnału, w rozpatrywanych sytuacjach napięcia i prądu elektrycznego. Charakterystycznym dla próbkowania jest zjawisko drżenia próbek (ang. jitter) przejawiające się losowym rozrzutem zbrocza sygnału powodującego pobranie próbki [5]. Skutkiem tego jest błąd zależny zarówno od przebiegu próbkowanego, jak i samego zjawiska drżenia próbek. Błąd ten, obok błędu kwantowania, jest drugim podstawowym błędem w procesie uzyskiwania cyfrowych reprezentacji sygnału analogowego.

Przebieg prostokątny taktujący próbkowanie powstaje w generatorze, w którym występują zjawiska losowe powodujące, że momenty wystąpienia kolejnych impulsów mają losowy rozrzut wokół wartości nominalnej. Ponadto przesyłanie tych impulsów przez obwody transmisyjne związane jest z występowaniem szumów dodatkowo wpływających na zbrocza impulsów.

Przyjmijmy, że okres impulsów próbkujących można opisać jako:

$$T_p = T_{nom} + \varepsilon, \quad (23)$$

gdzie  $T_{nom}$  jest okresem nominalnym, a  $\varepsilon$  rozrzutem o określonym rozkładzie. Dla prostoty przyjmijmy, że  $\varepsilon$  ma symetryczny rozkład jednostajny w zakresie od  $\varepsilon_{min}$  do  $\varepsilon_{max}$ . W tej sytuacji moment wystąpienia każdego z impulsów próbkujących musi być rozpatrywany jako suma okresów od momentu rozpoczęcia próbkowania, czyli zachodzi:

$$T_p(n) = \sum_{i=1}^n [T_{nom} + \varepsilon(i)] = nT_{nom} + \sum_{i=1}^n \varepsilon(i). \quad (24)$$

Powoduje to kumulację rozrzutów, czyli rozrzut w chwili  $n$  jest sumą rozrzutów z chwil poprzednich i chwili aktualnej.

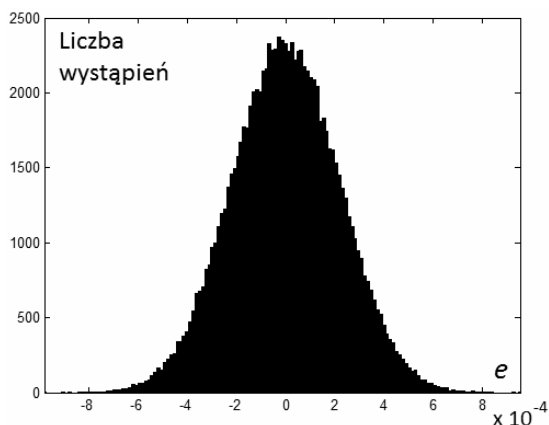
Rozrzut chwil próbkowania powoduje powstawanie błędów próbkowania nazywanych błędami drżenia próbek. Błąd ten zależy zarówno od aktualnej realizacji rozrzutu, jak

i od przebiegu sygnału próbkowanego, w tym przypadku punktu na sinusoidzie. W związku z tym opis analityczny takiego błędu jest trudny do uzyskania i w tym przypadku dobre efekty daje zastosowanie metody Monte Carlo.

**Przykład 3.** Wyznaczany jest rozkład błędu drżenia próbek pomiaru kwadratu wartości skutecznej sygnału dla 20 próbek na okres. Eksperyment symulacyjny realizowany jest w 100 000 krokach, przy czym na każdym kroku najpierw losowanych jest zgodnie z rozkładem jednostajnym  $N = 20$  wartości rozrzutu z zakresu od  $-10^{-4}$  do  $10^{-4}$ . Następnie kolejno wyznaczane są momenty próbkowania zgodnie z (24) przez sumowanie okresów obarczonych rozrzutem. Dla tak uzyskanych 20 wartości momentów próbkowania obliczane są wartości błędu jako:

$$e_\varepsilon(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} T_p(n)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{N} n\right). \quad (25)$$

Uzyskane wartości błędu są przetwarzane zgodnie z równaniem propagacji błędu (16) i lokowane w zbiorze wartości błędu, który po skompletowaniu przedstawiany jest w postaci histogramu pokazanego na rysunku 2. Niepewność błędu powodowanego drzeniem próbek w funkcji liczby próbek na okres sygnału podano w tabeli 3.



Rys. 2. Histogram błędu wyniku obliczania kwadratu wartości skutecznej spowodowanego drzeniem próbek

Tabela 3. Niepewność pomiaru kwadratu wartości skutecznej spowodowana drzeniem próbek

$N$	10	20	30	40	50	60
$U \cdot 10^{-4} V$	2,89	4,28	5,30	6,15	6,90	7,60

## 5. WNIOSKI KOŃCOWE

Analiza propagacji różnego rodzaju błędów z wejścia na wyjście algorytmu jest niezbędnym elementem oceny niedokładności wyników jego realizacji, gdyż pozwala na uzyskiwanie opisu błędu wyjściowego dla różnych rodzajów błędów wejściowych. Może być ona wykonana w sposób analityczny, za pomocą równań propagacji błędu, jak również przy użyciu metody Monte Carlo. Efektywność obu metod zależy od stopnia złożoności opisu błędu – w złożonych warunkach pomiarowych metoda Monte Carlo jest bardziej efektywna, jednak jej wyniki powinny być weryfikowane w sposób analityczny dla wybranych warunków przetwarzania.

## 6. BIBLIOGRAFIA

1. Jakubiec J.: Błędy i niepewności danych w systemach pomiarowo-sterujących. Wyd. Pol. Śląskiej, Gliwice 2010.
2. Wyrażanie niepewności wyniku pomiaru. Przewodnik GUM, 1999.
3. Jakubiec J.: A New Conception of Measurement Uncertainty Calculation. Acta Physica Polonica A. Vol. 124 (2013), No. 3, s. 436-444.
4. Skubis T.: Podstawy metrologicznej interpretacji wyników pomiaru. Wyd. Pol. Śląskiej, Gliwice 2004.
5. Jakubiec J., Roj J.: Pomiarowe przetwarzanie próbkujące. Wyd. Pol. Śląskiej, Gliwice 2000.

## RANDOM ERRORS PROPAGATION IN MULTIPLICATIVE ALGORITHMS OF MEASUREMENT DATA PROCESSING

Multiplicative algorithm, used for example for calculation of electrical power on the basis of digital representations of a voltage and current signal, characterize occurrence of products of measurement results. Accuracy of the results in the output of the algorithm can be analyzed by using error propagation equations for different kinds of the algorithm input errors. The alternative way consist in application of Monte Carlo method especially in sophisticated measurement condition. The general form of the multiplication algorithms is described in the paper and, for two kinds of the algorithm, the propagation equations have been determined. Error analysis of the algorithms applied for calculation of effective value and electric power has been performed for two basic errors caused by sampling jitter and quantization of samples.

**Keywords:** measurement data processing algorithm, signal sampling, quantization, measurement error, uncertainty.