ISSN 1232-3829
tts
10/2013
Technika Transportu Szynowego koleje ▪ tramwaje ▪ metro

GRUSZKA Piotr, MACIĄG Paweł, MARKIEWICZ Andrzej

KSZTAŁTOWANIE WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH PŁASKIEGO RÓWNOLEGŁOBOKU PRZEGUBOWEGO O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY POPRZEZ ZMIANĘ PARAMETRÓW INERCYJNYCH JEGO OGNIW

Streszczenie

W artykule przedstawiono analizę własności dynamicznych płaskiego równoległoboku przegubowego o dwóch stopniach swobody. Poprzez zmianę parametrów inercyjnych każdego z ogniw ruchomych mechanizmu uzyskano efekt linearyzacji i odsprzężenia dynamicznego równania ruchu polegający na wyeliminowaniu składników zawierających iloczyny współrzędnych niezależnych i ich pochodnych. Za pomocą symulacji numerycznych przedstawiono wpływ tych działań na przebiegi czasowe momentów napędowych i reakcji w przegubach mechanizmu.

WSTĘP

Dynamiczne równanie ruchu szeregowych struktur kinematycznych, stosowanych w budowie ramienia manipulatora, jest silnie nieliniowe oraz zawiera szereg sprzężeń pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi. Siły uogólnione (siły i momenty napędowe w przegubach) zależą od sił bezwładności, sił Coriolisa oraz sił grawitacji. Nieliniowości oraz sprzężenia kinematyczne dynamicznego równania ruchu manipulatora mają wpływ na jakość jego sterowania, szczególnie w przypadku ruchu manipulatora z dużymi prędkościami.

W oparciu o przeprowadzone badania zaproponowano szereg rozwiązań mających na celu linearyzację i odsprzężenie dynamicznego równania ruchu manipulatora (wyeliminowanie z równań składników zawierających iloczyny zmiennych niezależnych i ich pochodnych) poprzez modyfikację jego struktury kinematycznej. Takie działanie daje w efekcie możliwość uproszczenia budowy sterownika, w porównaniu do sterowania w oparciu o dynamiczne równanie ruchu manipulatora zawierającego nieliniowości i sprzężenia. W pierwszych rozwiązaniach zaproponowano odsprzężenie kinematyczne ramienia manipulatora poprzez zdalne umieszczenie silnika uruchamiającego przegub tak, aby ruch członu manipulatora zależał tylko od jednego napędu (np. napęd jest umieszczony na kolumnie manipulatora, a ruch w przegubie jest realizowany za pośrednictwem przekładni z paskiem zębatym). Inne metody [1,2,3] oparte są o taką redystrybucję ruchomych mas członów manipulatora tak, aby tensor bezwładności manipulatora był niezależny od jego konfiguracji. Znane jest również rozwiązanie polegające na zastąpieniu fragmentu struktury szeregowej ramienia manipulatora łańcuchem kinematycznym zamkniętym (równoległobokiem przegubowym) [5,6]. Takie rozwiązanie zastosowano np. w robocie Irb-60 [4].

W Zakładzie Podstaw Konstrukcji Maszyn Wydziału Mechanicznego Uniwersytetu Technologiczno-Humanistycznego w Radomiu podjęto pracę nad budową stanowiska do badań związanych z planowaniem trajektorii optymalnych manipulatorów o sześciu stopniach swobody. Strukturę kinematyczną tego manipulatora tworzy ramię połączone obrotowo z ortogonalną kiścią sferyczną. Na obrotowej kolumnie, zamiast klasycznego szeregowego łańcucha kinematycznego, zamontowano obrotowo zamknięty płaski łańcuch kinematyczny w postaci równoległoboku przegubowego.

W dalszej części artykułu przedstawiono matematyczny model dynamiki zastosowanego równoległoboku przegubowego oraz warunki, jakie muszą spełniać parametry geometryczne oraz inercyjne ogniw, aby można było uzyskać układ odsprzężonych i zlinearyzowanych równań opisujących dynamikę ruchu ramienia manipulatora. Zaprezentowano wyniki symulacji numerycznych parametrów dynamicznych ogniw równoległoboku dla zadanej trajektorii końca przedramienia.

1. DYNAMICZNE RÓWNANIA RUCHU PŁASKIEGO RÓWNOLEGŁOBOKU PRZEGUBOWEGO O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

Dynamikę dowolnego układu kinematycznego, składającego się z n ogniw, można opisać równaniem Eulera-Lagrange'a (1).

$$M_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \tag{1}$$

gdzie:
- M_i jest i-tym uogólnionym momentem napędowym,
- φ_i jest i-tą współrzędną uogólnioną,
- $L=K-P$ jest funkcją Lagrange'a,
- K jest energią kinetyczną całego układu,
- P jest energią potencjalną całego układu,
- $i=1,...,n$.

Ogólna struktura dynamicznych równań ruchu Eulera-Lagrange'a (2) zawiera trzy grupy składników. Pierwsza opisuje siły bezwładności, druga siły odśrodkowe i Coriolisa, a trzecia siły grawitacji działające na poszczególne ogniwa układu kinematycznego.

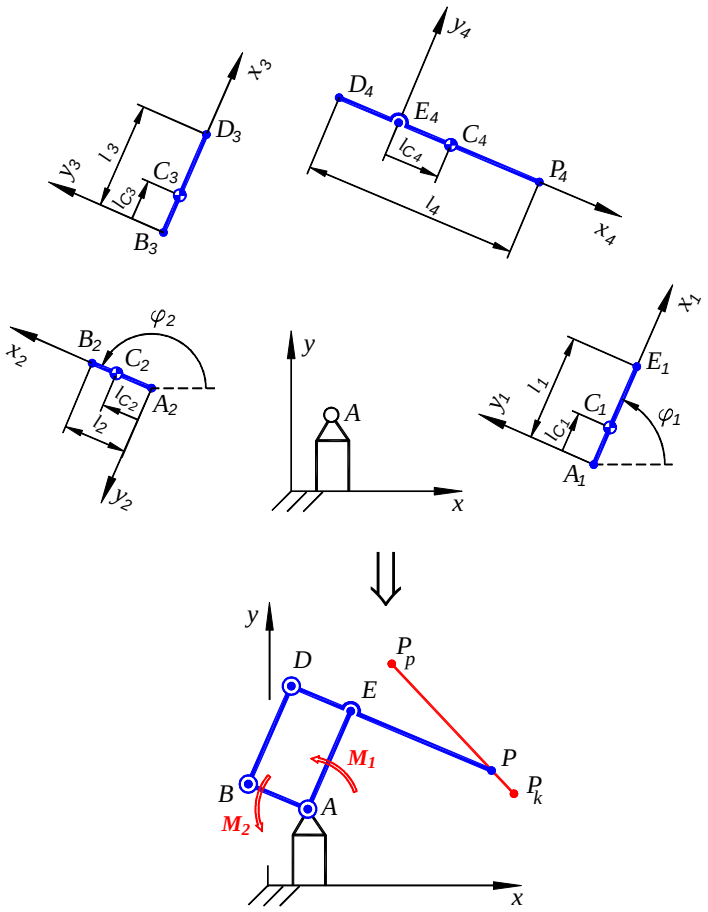
$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\varphi},\dot{\boldsymbol{\varphi}})\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{M} \tag{2}$$

gdzie:
- $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})$ jest macierzą bezwładności,
- $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\varphi},\dot{\boldsymbol{\varphi}})$ jest macierzą współczynników Christoffela,
- $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi})$ jest wektorem sił grawitacji,
- $\boldsymbol{M}$ jest wektorem sił uogólnionych.

Dla typowej szeregowej struktury kinematycznej wyrażenia zaliczane do pierwszej grupy zawierają drugą pochodną $\ddot{\varphi}_i$ współrzędnych uogólnionych. Wyrażenia drugiej grupy mogą zawierać kwadraty prędkości uogólnionych $\dot{\varphi}_i^2$ lub iloczyny $\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j$ (dla $i \neq j$) prędkości uogólnionych różnych ogniw. Wynika z tego, że dynamiczne równania ruchu typowej struktury

szeregowej są silnie nieliniowe i zawierają sprzężenia pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi oraz ich pochodnymi.

Rozważmy płaski mechanizm o dwóch stopniach swobody (rys1.) składający się z pięciu ogniw. Ogniwa ruchome tworzą równoległobok przegubowy. Ogniwa napędowe *1* i *2* połączone są z podstawą obrotowo.



Rys. 1. Płaski mechanizm o dwóch stopniach swobody z równoległobokiem przegubowym

Jego dynamikę opisują dwa równania Eulera-Lagrange'a (3).

$$
\begin{aligned}
&k_1\ddot{\varphi}_1 + k_2[\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2] + k_3 g\cos(\varphi_1) = M_1\\
&k_4\ddot{\varphi}_2 + k_2[\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_1 + \sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1^2] + k_5 g\cos(\varphi_2) = M_2\\
&k_1 = I_1 + I_3 + m_1 l_{c1}^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_1^2\\
&k_2 = m_3 l_2 l_{c3} - m_4 l_1 l_{c4}\\
&k_3 = m_1 l_{c1} + m_3 l_{c3} + m_4 l_1\\
&k_4 = I_2 + I_4 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{c4}^2\\
&k_5 = m_2 l_{c2} + m_3 l_2 - m_4 l_{c4}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

gdzie:

- M_1, M_2 są momentami napędowymi,
- φ_1, φ_2 są kątami przemieszczeń odpowiednio ogniwa *1* i *2* względem podstawy,
- $\dot{\varphi}_1$,$\dot{\varphi}_2$ są prędkościami kątowymi, odpowiednio ogniwa *1* i *2* względem podstawy,

– $\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2$ są przyśpieszeniami kątowymi, odpowiednio ogniwa *1* i *2* względem podstawy,
– l_1, l_2, l_3, l_4 są długościami odpowiednich ogniw,
– lc_1, lc_2, lc_3, lc_4 są odległościami środków mas od początkowego przegubu odpowiednich ogniw,
– m_1, m_2, m_3, m_4 oznaczają masy odpowiednich ogniw,
– I_1, I_2, I_3, I_4 oznaczają osiowe momenty bezwładności odpowiednich ogniw względem środka masy,

Struktura szeregowa, równoważna kinematycznie do przedstawionego na rysunku 1 mechanizmu, składała by się tylko z ogniw 1 i 4. Dynamiczne równania ruchu (3) tego mechanizmu nie zawierają, w porównaniu do struktury szeregowej, wyrażeń na siły Coriolisa. Efekt ten uzyskano poprzez umieszczenie napędu obu przegubów na podstawie, ale kosztem jej rozbudowy o dwa dodatkowe ogniwa *2* i *3*. Dynamiczne równania ruchu (3) nadal są nieliniowe i zawierają wyrażenia na siły odśrodkowe oraz sprzężenia pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi φ_1 i φ_2. Wyrażenia na siły odśrodkowe z równań (3) zostaną usunięte, jeżeli współczynnik k_2 będzie równy zero. Warunkiem zerowania się współczynnika k_2 jest następująca równość (4):

$$m_3 l_2 l_{c3} = m_4 l_1 l_{c4} \tag{4}$$

Warunek (4) najprościej jest spełnić poprzez sprowadzenie środka masy ogniwa *3* do punktu *B* oraz środka masy ogniwa *4* do punktu *E* (rys.1). Wówczas odległości lc_3, i lc_4 przyjmą wartości równe zero. Będzie to wymagać dodania na końcach ogniw *3* oraz *4* dodatkowych mas korekcyjnych zwiększających całkowitą masę mechanizmu. Wówczas z układu równań (3) wyeliminowane zostaną wyrażenia na siły Coriolisa oraz siły odśrodkowe. Dynamiczne równania ruchu mechanizmu przyjmą postać (5):

$$\begin{aligned}
&k_1\ddot{\varphi}_1 + k_3 g\cos(\varphi_1) = M_1\\
&k_4\ddot{\varphi}_2 + k_5 g\cos(\varphi_2) = M_2\\
&k_1 = I_1 + I_3 + m_1 l_{c1}^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_1^2\\
&k_3 = m_1 l_{c1} + m_3 l_{c3} + m_4 l_1\\
&k_4 = I_2 + I_4 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{c4}^2\\
&k_5 = m_2 l_{c2} + m_3 l_2 - m_4 l_{c4}
\end{aligned} \tag{5}$$

Dodatkowo układ równań będzie odsprzężony kinematycznie. Równanie pierwsze będzie zawierać tylko zmienną φ_1 oraz jej drugą pochodną, a równanie drugie tylko zmienną φ_2 oraz jej drugą pochodną.

W celu usunięcia nieliniowości, nadal występujących w obu równaniach, należy wyrównoważyć statycznie cały mechanizm. Wiąże się to z koniecznością dodania na końcach ogniw *1* oraz *2* kolejnych mas korekcyjnych zwiększających całkowitą masę mechanizmu.

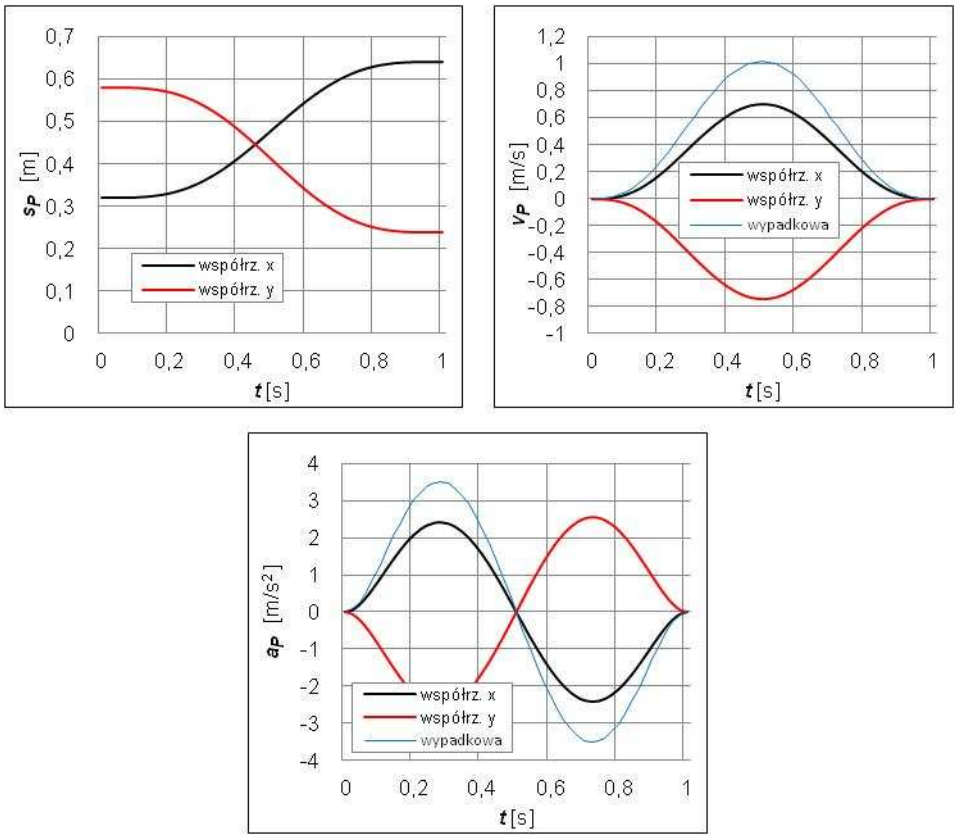
Ostatecznie, po wyrównoważeniu statycznym całego mechanizmu, dynamiczne równania ruchu (6) będą miały postać liniową.

$$\begin{aligned}
&k_1\ddot{\varphi}_1 = M_1\\
&k_4\ddot{\varphi}_2 = M_2\\
&k_1 = I_1 + I_3 + m_1 l_{c1}^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_1^2\\
&k_4 = I_2 + I_4 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{c4}^2
\end{aligned} \tag{6}$$

2. SYMULACJE NUMERYCZNE RUCHU PŁASKIEGO MECHANIZMU PRZEGUBOWEGO O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

Dla zilustrowania wpływu działań, mających na celu odsprzężenie i linearyzację dynamicznych równań ruchu na dynamikę napędów, przeprowadzono numeryczne symulacje. Symulacje przeprowadzono dla trajektorii punktu *P* (rys.1) końcówki roboczej równoległoboku, której torem przyjęto odcinek P_pP_k. Długości poszczególnych ogniw mechanizmu przyjęto następująco: l_1=0,28 m, l_2=0,12 m, l_3=0,28 m oraz l_4=0,4 m.
Przemieszczenie punktu *P* po torze opisano wielomianem 7-ego stopnia, zapewniającym ciągłość prędkości, przyśpieszeń oraz udarów. Czas trwania ruchu przyjęto równy t=1 s.

Na rysunku 2 przedstawiono przebiegi czasowe przemieszczeń, prędkości i przyśpieszeń punktu *P* poruszającego się po tak zdefiniowanej trajektorii. Parametry geometryczne ogniw przyjęto tak, jak na rysunku 1.



Rys. 2. Parametry kinematyczne trajektorii punktu *P*

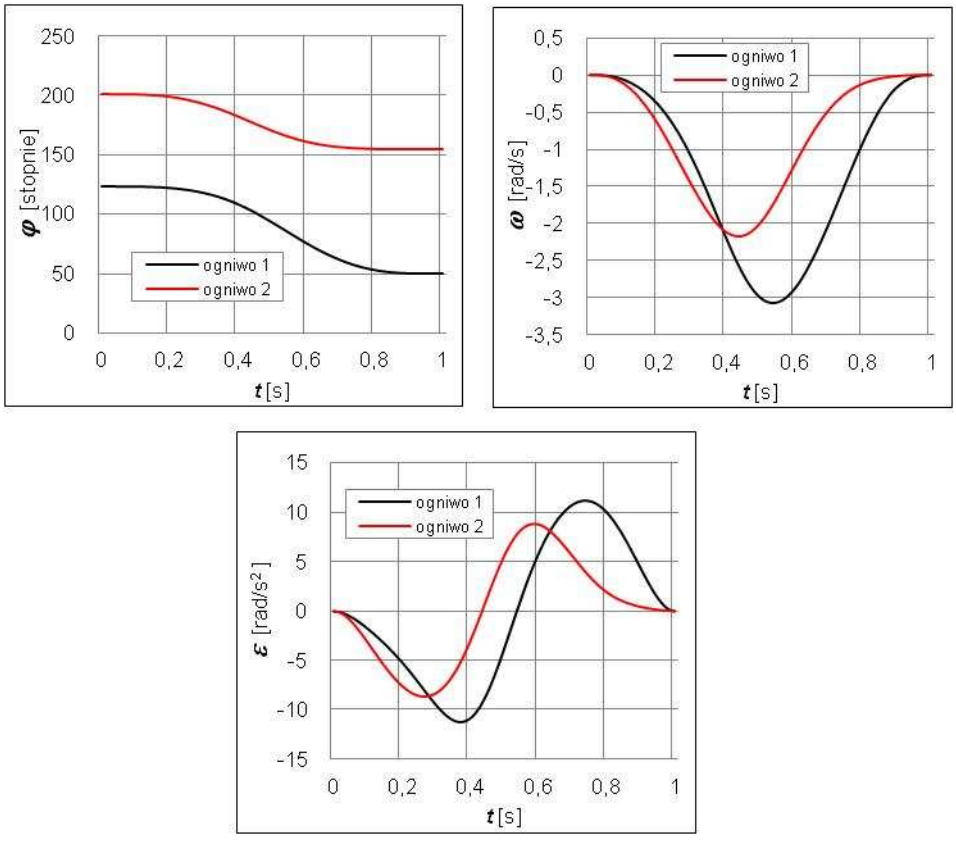
Symulacje przeprowadzono dla trzech wariantów różniących się tylko wartościami parametrów inercyjnych poszczególnych ogniw mechanizmu. Długości ogniw w każdym z wariantów pozostają bez zmian. Wariant 1 (bazowy) nie uwzględnia żadnych działań w kierunku odsprzężenia i linearyzacji dynamicznych równań ruchu mechanizmu. W wariancie 2 (pośrednim) dokonano zmiany parametrów inercyjnych ogniwa *3* i *4* poprzez dodanie przeciwwag na ich końcach tak, aby uzyskać odsprzężenie dynamicznych równań ruchu. W wariancie 3 doprowadzono do pełnego wyrównoważenia statycznego mechanizmu poprzez dodanie przeciwwag na końcach ogniw *1* i *2*. Uzyskano dzięki temu również zlinearyzowaną postać dynamicznych równań ruchu mechanizmu. W tabeli 1 zestawiono parametry geometryczne oraz inercyjne ogniw mechanizmu przyjęte dla poszczególnych wariantów symulacji nume-

rycznej ruchu. Dane zaczerpnięto z modelu bryłowego rozwiązania konstrukcyjnego, projektowanego w Zakładzie Podstaw Konstrukcji Maszyn stanowiska badawczego.

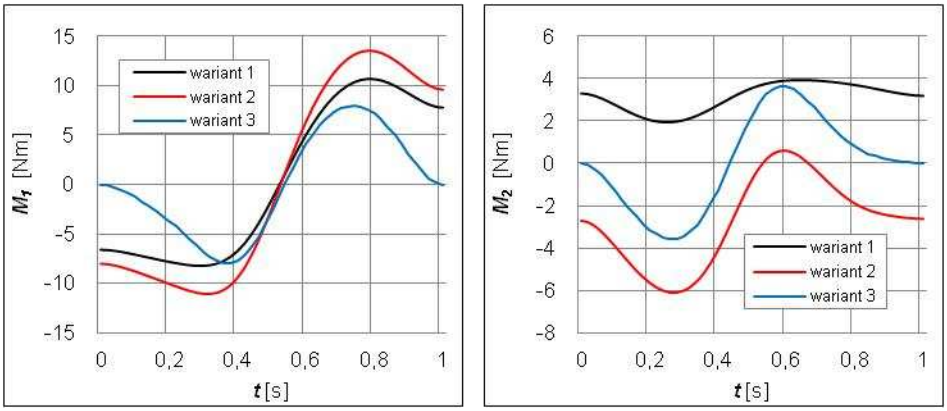
Tab. 2. Parametry geometryczne oraz inercyjne ogniw równoległoboku dla poszczególnych wariantów symulacji numerycznej

Oznaczenie	Wariant 1	Wariant 2	Wariant 3
Masa ogniwa [kg]:			
m_1	2,911	2,911	12,555
m_2	0,212	0,212	3,208
m_3	0,964	2,376	2,376
m_4	3,827	5,23	5,23
Moment bezwładności [kgm^2]:			
I_1	0,009344671	0,009344671	0,103396142
I_2	0,000471474	0,000471474	0,008692982
I_3	0,008080584	0,028916679	0,028916679
I_4	0,111901486	0,347466118	0,347466118
Położenie środka masy [m]:			
l_{c1}	0,016252	0,016252	-0,116641
l_{c2}	0,068476	0,068476	-0,088867
l_{c3}	0,117139	0	0
l_{c4}	0,128292	0	0

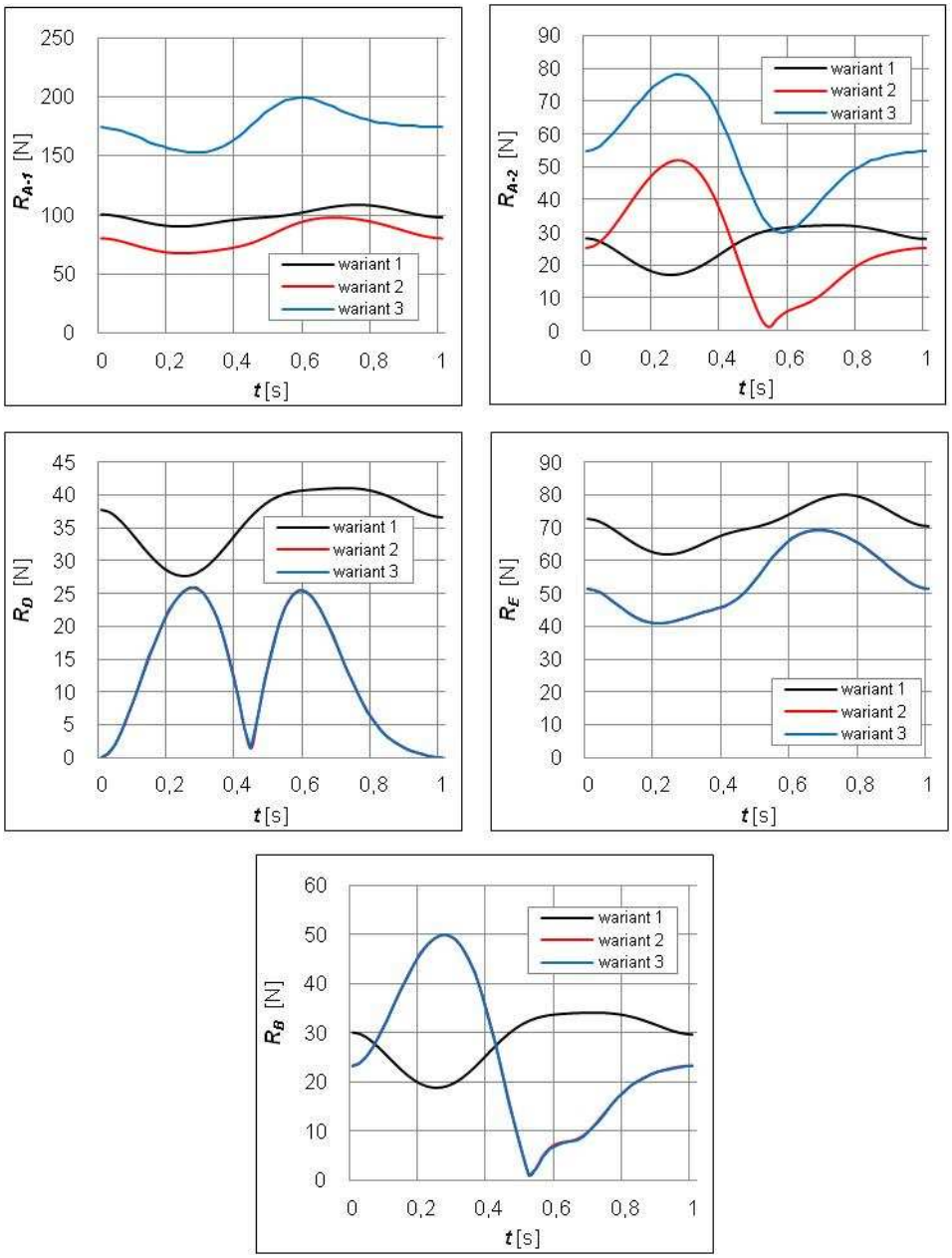
Przebiegi czasowe parametrów kinematycznych przemieszczeń w przegubach ogniw napędowych *1* i *2* przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Parametry kinematyczne trajektorii zmiennych przegubowych



Rys. 4. Przebiegi momentów napędowych M_1 i M_2



Rys. 5. Przebiegi wypadkowej reakcji w przegubach mechanizmu

Matematyczny model opisu dynamiki mechanizmu, wg którego rozwiązywano odwrotne zadanie dynamiki dla zadanej trajektorii punktu *P*, zbudowano w oparciu o równania Newtona-Eulera. Umożliwiły one wyznaczenie, oprócz momentów napędowych, także reakcji w przegubach mechanizmu. Wyniki symulacji zestawiono na rysunku 4 i rysunku 5.

W wariancie 1 (bazowym) mechanizm nie jest wyrównoważony statycznie, a dynamiczne równania ruchu (3) zawierają sprzężenia oraz nieliniowości. Z przedstawionych wykresów wynika, że duży wpływ na wartość momentów napędowych mają siły grawitacji.

W wariancie 2 (pośrednim), poprzez zmianę parametrów inercyjnych ogniw *3* i *4*, został spełniony warunek (4). Dodanie mas korekcyjnych na końcach ogniw *3* i *4* spowodowało przesunięcie środków mas tych ogniw odpowiednio do punktów *B* i *E* mechanizmu (rys.1). Uzyskano efekt odsprzężenia dynamicznych równań ruchu (5). Całkowita masa mechanizmu zwiększyła się z 7,914 kg do10,729 kg, co w efekcie końcowym prowadzi do zwiększenia momentów napędowych M_1 i M_2 oraz zmian reakcji w przegubach.

W wariancie 3 całkowicie wyrównoważono statycznie mechanizm poprzez dodanie mas korekcyjnych na końcach ogniw napędowych *1* i *2*. Uzyskano efekt linearyzacji dynamicznych równań ruchu (6) (znikają wyrażenia z siłami grawitacji). Momenty napędowe M_1 i M_2 są proporcjonalne do przyśpieszeń kątowych ogniw. Potwierdza to porównanie przebiegów przyśpieszeń kątowych ogniw napędowych *1* i *2* (rys.3) i odpowiadających im przebiegów momentów napędowych (rys.4). Całkowita masa mechanizmu wzrosła do 23,409 kg, ale maksymalne wartości momentów napędowych uległy zmniejszeniu w porównaniu z wariantem 1 i wariantem 2. Wzrastają natomiast reakcje (rys.5) w przegubach ogniw napędowych, co ma istotne znaczenie w przypadku zastosowania łożysk ślizgowych, charakteryzujących się większymi oporami ruchu w porównaniu z łożyskami tocznymi. W wariancie 2 i 3, reakcje w przegubach *B, D* i *E*, są identyczne.

PODSUMOWANIE

Zamknięty łańcuch kinematyczny w postaci równoległoboku przegubowego o dwóch stopniach swobody jest równoważnym układem kinematycznym dla dwuogniwowej struktury szeregowej. Różni go od niej, zwiększona o dwa, liczba ogniw ruchomych, co z reguły prowadzi do zwiększenia całkowitej masy mechanizmu. Jego zaletą jest możliwość, stosunkowo prostymi metodami, odsprzężenia i linearyzacji dynamicznych równań ruchu. Wyniki przeprowadzonych symulacji numerycznych wskazują na skuteczność metody polegającej na modyfikowaniu parametrów inercyjnych ogniw równoległoboku przegubowego. Działania te prowadzą do pełnego wyrównoważenia statycznego mechanizmu. Powoduje to znaczne zwiększenie masy całkowitej mechanizmu, co jak pokazują wyniki symulacji w wariancie 3, nie musi prowadzić do zwiększenia momentów napędowych. W przedstawionej symulacji numerycznej, momenty napędowe w wariancie 3 są mniejsze w porównaniu do wariantu 1 (bazowego) oraz wariantu 2 (tylko odsprzężenie dynamicznych równań ruchu).

BIBLIOGRAFIA

1. Arakelian V., Sargsyan S., *On the design of serial manipulators with decoupled dynamics*. Mechatronics 2012, nr 22, s. 904-909.
2. Arakelian V., Baron J., Mottu P., *Torque minimisation of the 2-DOF serial manipulators based on minimum energy consideration and optimum mass redistribution.* Mechatronics 2011, nr 21, s. 310-314.
3. Coelho T.A.H, Young L., Alves V.F.A, *Decoupling of dynamics equations by means of adaptive balancing of 2-dof open-loop mechanisms.* Mechanism and Machine Theory 2004, nr 39, s. 871-881.

4. Morecki A., Knapczyk J., Kędzior K., *Teoria mechanizmów i manipulatorów*. WNT, Warszawa 2002.
5. Pons J.L., Ceres A., Jimenez R., Calderon L., Martin J.M., *Torque minimisation of the 2-DOF serial manipulators based on minimum energy consideration and optimum mass re-distribution.* Journal of Intelligent and Robotic Systems 1997, nr 18, s. 277-287.
6. Spong M.W., Vidyasagar M., *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa 1997.

FORMING DYNAMIC PROPERTIES OF ARTICULATED FLAT PARALLELOGRAM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM BY CHANGING THE INERTIA PARAMETERS FOR ITS BARS

Abstract

This paper presents the analysis of the dynamic properties of flat parallelogram with two degrees of freedom. Changing the inertia parameters for each bar of the mechanism resulted in linearization and dynamic decoupling of the motion equation in which the terms including the products of the independent coordinates and their derivatives were eliminated. This affects the timing of input torques and performance of the joints which was shown by means of numerical simulations.

Autorzy:
dr inż. **Piotr Gruszka** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny w Radomiu
dr inż. **Paweł Maciąg** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny w Radomiu
dr inż. **Andrzej Markiewicz** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny w Radomiu